Прикладная математика и механика. Том XXV, 1961
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

О НАКОПЛЕНИИ ВОЗМУЩЕНИЙ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

Л. С. Гноенский
(Москва)

§ 1. Задача об определении максимального в момент времени T значения $y_{max}(T)$, решения линейного дифференциального или разностного уравнения $L_n(y) = f(t)$ при условии $|f(t)| \leqslant M_0$ на $[0, T]$ рассматривалась в работах [1,2,3]. Здесь эта задача рассматривается при более жестких ограничениях для правой части уравнения, а именно, в уравнении

$$L_n(y) \equiv y^{(n)} + a_1(t) y^{(n-1)} + \ldots + a_n(t) y = f(t) \tag{1.1}$$

функция $f(t)$ должна удовлетворять условиям

$$|f(t)| \leqslant M_0, \qquad |f'(t)| \leqslant M_1 \tag{1.2}$$

Требуется определить функцию $f_m(t)$, удовлетворяющую (1.2) и доставляющую наибольшее значение модулю решения $y(t)$ уравнения $L_n(y) = f_m(t)$ в момент времени T. Для определенности предполагается, что

$$y(0) = y'(0) = \ldots = y^{(n-1)}_{(0)} = 0$$

Подобная задача ставилась в работе [4] при некоторых ограничениях, накладываемых на расстояния между экстремумами функции (1.5). При аналогичных ограничениях в работе [5] для разностных уравнений решалась более общая задача: предполагалось, что

$$|f(t)| \leqslant M_0, \qquad |f'(t)| \leqslant M_1, \qquad |f''(t)| \leqslant M_2$$

Алгоритм, приведенный в работе [6], позволяет построить функцию $f_m(t)$, доставляющую модулю $y(T)$, вообще говоря, экстремальное, а не наибольшее значение. В настоящей работе эти ограничения сняты.

Поставленная выше задача встречается при проектировании управляющих систем, когда: 1) относительно возмущений, действующих на систему, известно лишь, что они ограничены по модулю и по производной; 2) применение более грубых, но и более простых оценок накладывает слишком тяжелые требования на параметры системы; 3) статистические характеристики возмущений неизвестны или применение их нежелательно из-за ответственности системы.

Задача о накоплении возмущений является частным случаем вопроса об оптимальном регулировании в постановке Л. С. Понтрягина. Трудности, возникающие при нахождении максимальной функции $f_m(t)$, связаны с наличием двух ограничений на правую часть уравнения (1.1), поэтому эта задача и требует особого рассмотрения.

Как известно, решение $y(T)$ уравнения (1.1) можно представить в виде

$$y(T) = \int_0^T G(T, t) f(t)\, dt \tag{1.3}$$

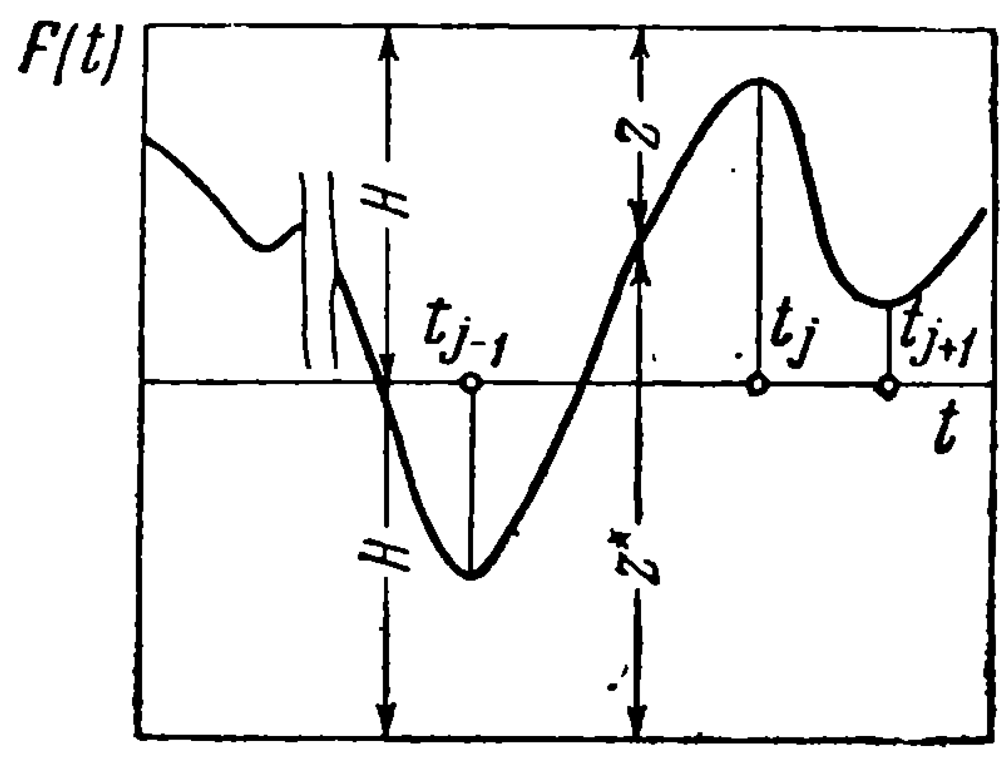
Пусть $f'(t) = \varphi(t)$, тогда (1.3) может быть представлено в виде

$$y(T) = \int_0^T F(t) \varphi(t)\, dt, \qquad F(t) = \int_t^T G(T, \tau)\, d\tau \tag{1.4}$$

Выражение для $F(t)$ получается, если подставить

$$f(t)=\int_0^t \varphi(\tau)\,d\tau \tag{1.5}$$

в (1.3) и изменить порядок интеграции в полученном повторном интеграле. Функция $F(t)$ — непрерывная дифференцируемая, имеющая на $[0, T]$ конечное число экстремумов; модуль $F'(t)$ ограничен на $[0, T]$. Поставленная выше задача может быть сформулирована как следующая выродженна явариационная задача: найти функцию $\varphi_m(t)$, принадлежащую к классу функций A, удовлетворяющих на $[0, T]$ условиям



Фиг. 1

$$|\varphi(t)|\leqslant M_1,\qquad \left|\int_0^t \varphi(t)\,dt\right|\leqslant M_0 \tag{1.6}$$

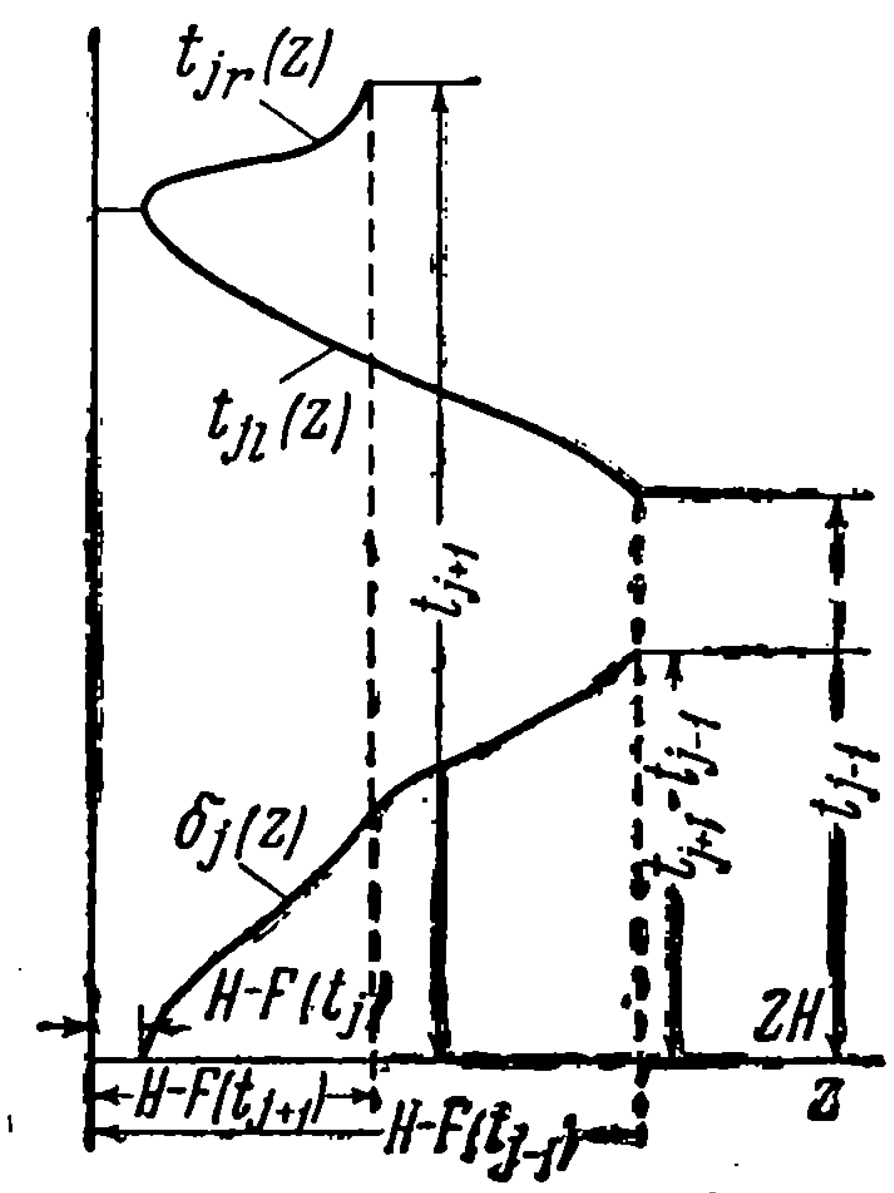
и доставляющую наибольшее значение функционалу

$$Y(\varphi)=\int_0^T F(t)\,\varphi(t)\,dt \tag{1.7}$$

§ 2. Найдем алгоритм для построения функции $\varphi_m(t)$, которую будем называть максимальной. Сначала введем некоторые обозначения. Через t_j $(j=2,\ldots, p)$ обозначим точки экстремумов функции $x=F(t)$, полагая, $t_1=0$, $t_{p+1}=T$. Для определенности предполагается, что t_2 и, следовательно, все t_j, где j четное, точки максимумов $F(t)$.

Пусть (фиг. 1)

$$H=\max F(t),\qquad t\in[0, T],\qquad z=H-F(t)$$
$$z^*=|-H-F(t)|=H+F(t)$$



Фиг. 2

При четном j введем функции $t_{jr}(z)$ и $t_{jl}(z)$, а при нечетном j функции $t_{jr}(z^*)$ и $t_{jl}(z^*)$.

Пусть j четное, тогда значения

$$t_{jl}(z)=t_j \quad \text{при } z\leqslant H-F(t_j)$$
$$t_{jl}(z)=t_{j-1} \quad \text{при } z\geqslant H-F(t_{j-1})$$
$$t_{jl}(z) \quad \text{при } H-F(t_j)<z<H-F(t_{j-1})$$

есть ближайший слева к t_j корень (фиг. 2) уравнения $H-z=F(t)$ относительно t. Далее значения

$$t_{jr}(z)=t_j \quad \text{при } z\leqslant H-F(t_j),\qquad t_{jr}(z)=t_{j+1} \quad \text{при } z\geqslant H-F(t_{j+1})$$
$$t_{jr}(z)=\tau \text{ при } H-F(t_j)<z<H-F(t_{j+1})$$

есть ближайший справа к t_j корень уравнения $H-z=F(t)$.

Пусть j нечетное, тогда значения

$$t_{jl}(z^*)=tj \quad \text{при } z^*\leqslant H+F(t_j),\qquad t_{jl}(z^*)=t_{j-1} \quad \text{при } z^*\geqslant H+F(t_{j-1}),$$
$$t_{jl}(z^*) \quad \text{при } H+F(t_j)<z^*<H+F(t_{j-1})$$

есть ближайший слева к t_j корень уравнения $H + F(t) = z^*$. Далее значения

$$t_{jr}(z^*) = t_j \quad \text{при } z^* \leqslant H + F(t_j), \qquad t_{jr}(z^*) = t_{j+1} \quad \text{при } z^* \geqslant H + F(t_{j+1})$$

$$t_{jr}(z^*) \text{ при } H + F(t_j) < z^* < H + F(t_{j+1})$$

есть ближайший справа к t_j корень уравнения $H + F(t) = z^*$.

Положим

$$\delta_j(z) = t_{jr}(z) - t_{jl}(z), \qquad \delta_j(z^*) = t_{jr}(z^*) - t_{jl}(z^*)$$

Введем зависящие от параметра u функционалы $\Phi_{ij}(z, z^*)$, где индексы i, j могут принимать всевозможные целые значения от нуля до p, но для каждого из функционалов должно быть $i < j$.

Функционалы $\Phi_{ij}(z, z^*)$ определяются на множестве всех положительных непрерывных монотонно возрастающих в строгом смысле функций $z = \gamma_1(u)$, $z^* = \gamma_2(u)$, где $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = 0$. Если $z + z^* \leqslant 2H$, то

$$\Phi_{ij}(z, z^*) = \sum_{k=i+1}^{j}{}' \delta_k(z) - \sum_{k=i+1}^{j}{}'' \delta_k(z^*) \tag{2.1}$$

В первую сумму включены члены с четными, а во вторую сумму члены с нечетными значениями индекса k.

Если для некоторого u_a имеет место равенство

$$z_a + z_a^* = \gamma_1(u_a) + \gamma_2(u_a) = 2H$$

то для $u > u_a$ и, следовательно, для $z > z_a$, $z^* > z_a^*$

$$\Phi_{ij}(z, z^*) = \sum_{k=i+1}^{j}{}' \delta_k(z_a) - \sum_{k=i+1}^{j}{}'' \delta_k(z_a^*) \tag{2.2}$$

Первая сумма в (2.1) равна сумме длин интервалов, лежащих между $t_{j+1,l}$ и t_{jr}, на которых $F(t) \geqslant z$; вторая сумма равна сумме длин интервалов, лежащих между $t_{j+1,l}$ и t_{jr}, на которых $F(t) \leqslant z^*$.

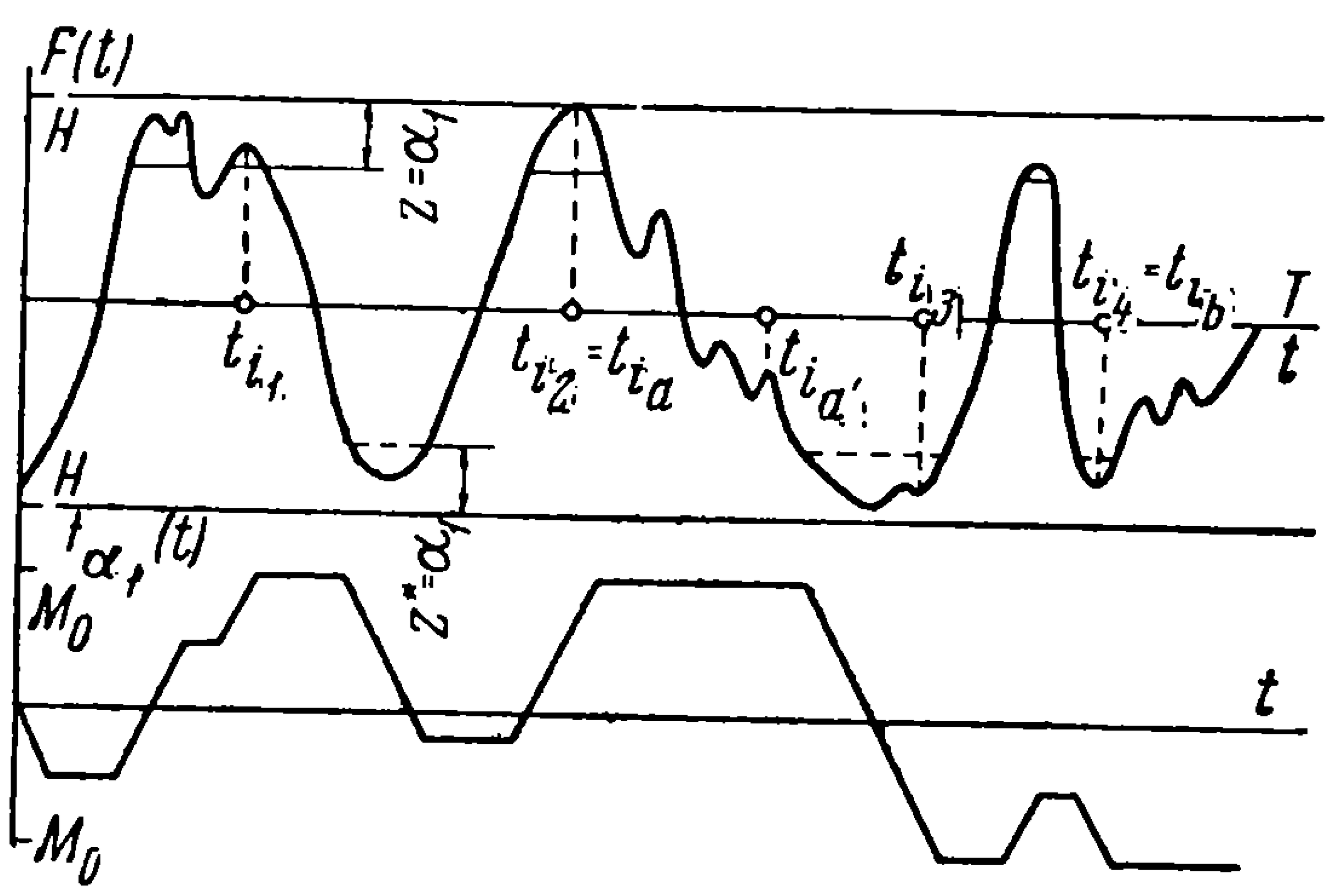
При помощи функционалов $\Phi_{ij}(z, z^*)$ строится по шагам максимальная функция $\varphi_m(t)$.

Первый шаг. Положим $z = z^* = u$ и пусть α_1 первое при увеличении от нуля значение u, при котором, хотя бы для одной из функций $\Phi_{0j}(u, u)$, выполняется равенство

$$|\Phi_{0j}(\alpha_1, \alpha_1)| = C_0$$

$$C_0 = \frac{M_0}{M_1}, \qquad 0 \leqslant \alpha_1 \leqslant H$$

и $\Phi_{0j}(u, u)$ возрастает в некоторой правой окрестности точки $u = \alpha_1$.



Фиг. 3

Через $E_{\alpha_1}^+$ обозначим систему интервалов, принадлежащих $[0, T]$, на которых $F(t) > H - \alpha_1$, а через $E_{\alpha_1}^-$ — систему интервалов из $[0, T]$, на которых $F(t) < -H + \alpha_1$. Положим (фиг. 3)

$$\varphi_{\alpha_1}(t) = M_1 \quad \text{для } t \in E_{\alpha_1}^+, \qquad \varphi_{\alpha_1}(t) = -M_1 \quad \text{для } t \in E_{\alpha_1}^-$$

$$\varphi_{\alpha_1}(t) = 0 \quad \text{для } t \in [0, T] - E_{\alpha_1}^+ - E_{\alpha_1}^-$$

Если $\alpha_1 = H$, то $\varphi_{\alpha_1}(t)$, где $\alpha_1 = H$ и есть максимальная функция. Если $\alpha_1 < H$, то $\varphi_m(t)$ совпадает с $\varphi_{\alpha_1}(t)$ только на множестве

$$E_{\alpha_1} = E_{\alpha_1}^{+} + E_{\alpha_1}^{-}$$

На последующих шагах $\varphi_m(t)$ будет доопределена на множестве $[0, T] - E_{\alpha_1}$. Заметим, что если $\Phi_{0j}(\alpha_1, \alpha_1) = C_0$, то (фиг. 3)

$$f_{\alpha_1}(t_{jr}) = \int\limits_0^{t_{jr}} \varphi_{\alpha_1}(t)\,dt = M_1\Phi_{0j}(\alpha_1, \alpha_1) = M_1C_0 = M_0$$

Таким образом, для выполнения первого шага необходимо построить функции $\Phi_{0j}(u, u)$ $(j = 1,\ldots p)$ и определить значение $u = \alpha_1$, при котором хотя бы для одного j модуль $|\Phi_{0j}(u, u)| = C_0$ при $u = \alpha_1$ и возрастает при дальнейшем увеличении u.

Второй шаг. В общем случае при $u = \alpha_1$ может иметь место следующая система равенств:

$$\begin{aligned} &\Phi_{0i_1}(\alpha_1, \alpha_1) = \Phi_{0i_2}(\alpha_1, \alpha_1) = \ldots = \Phi_{0i_a}(\alpha_1, \alpha_1) = C_0 \\ &\Phi_{0i_{a+1}}(\alpha_1, \alpha_1) = \Phi_{0i_{a+2}}(\alpha_1, \alpha_1) = \ldots = \Phi_{0i_b}(\alpha_1, \alpha_1) = -C_0 \\ &\Phi_{0i_{b+1}}(\alpha_1, \alpha_1) = \Phi_{0i_{b+2}}(\alpha_1, \alpha_1) = \ldots = \Phi_{0i_c}(\alpha_1, \alpha_1) = C_0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{2.3}$$

В системе равенств (2.3) имеется N таких строк. В каждую строку входит не меньше одной функции. Функции в (2.3) расположены так, что их индексы удовлетворяют неравенству $i_1 < i_2 < \ldots < i_a < i_{a+1} < \ldots \ldots < i_b < i_{b+1} \ldots < i_c < \ldots$. Для любой функции из нечетной строки $\Phi_{0j}(u, u)$ возрастает, а для любой функции из четной строки — убывает в некоторой правой окрестности точки $u = \alpha_1$. Если

$$|\Phi_{0, j-1}(\alpha_1, \alpha_1)| = |\Phi_{0j}(\alpha_1, \alpha_1)|, \qquad \Phi_{0, j-1}(u, u) \equiv \Phi_{0j}(u, u)$$

в некоторой правой окрестности точки $u = \alpha_1$, то в систему равенств (2.3) включается только $\Phi_{0, j-1}(\alpha_1, \alpha_1)$.

Рассмотрим $\Phi_{0i_1}(z, z^*)$ для значений z и z^*, больших α_1. Из соотношения

$$\Phi_{0i_1}(z, z^*) = C_0 \tag{2.4}$$

найдем в некоторой правой окрестности точки $z = \alpha_1$ функцию $z^* = \vartheta_{0i_1}(z)$. Из определения $\Phi_{0i_1}(z, z^*)$ следует, что пока $z + z^* \leqslant 2H$, функция $\vartheta_{0i_1}(z)$ определяется однозначно и в некоторой правой окрестности $z = \alpha_1$ выполняется неравенство $z^* = \vartheta_{0i_1}(z) > z$.

Если при увеличении z от α_1 для некоторого α выполняется равенство $\vartheta_{0i_1}(\alpha) + \alpha = 2H$, то при $z > \alpha$ положим $\vartheta_{0i_1}(z) = \vartheta_{0i_1}(\alpha)$.

Заметим, что если у $\Phi_{0i_2}(z, z^*)$ сумма

$$\sum_{k=1}^{i_1}{}'' \delta_k(z^*) = 0 \text{ при } z > \alpha_1,\ z^* > \alpha_1, \text{ то } \vartheta_{0i_1}(z) = 2H - \alpha_1$$

Переходим к $\Phi_{0i_2}(z, z)$. Из соотношения

$$\Phi_{0i_2}(z, z^*) = C_0 \tag{2.5}$$

находим функцию $z^* = \vartheta_{0i_2}(z)$.

Если $\vartheta_{0i_2}(z) > \vartheta_{0i_1}(z)$, в правой окрестности $z = \alpha_1$, то для дальнейших построений будем использовать лишь функцию $\vartheta_{0i_2}(z)$.

Если $\vartheta_{0i_2}(z) < \vartheta_{0i_1}(z)$, то из соотношения

$$\Phi_{i_1 i_2}(z, z^*) \equiv \Phi_{0i_2}(z, z^*) - \Phi_{0i_1}(z, z^*) = \Phi_{i_1 i_2}(\alpha_1, \alpha_1) = 0 \qquad (2.6)$$

находим в некоторой правой окрестности $z = \alpha_1$ функцию $z^* = \vartheta_{i_1 i_2}(z)$ (это возможно, так как иначе $\Phi_{0i_2}(\alpha_1, \alpha_1)$ было бы больше C_0) и дальше используем функции $\vartheta_{0i_1}(z)$ и $\vartheta_{i_1 i_2}(z)$.

Пусть теперь в первой строке системы равенств (2.3) рассмотрены все функционалы до Φ_{0i_ν} включительно ($i_\nu < i_a$) и оставлены для дальнейших построений функции

$$\vartheta_{0i_\alpha}, \quad \vartheta_{i_\alpha i_\beta}, \quad \vartheta_{i_\beta i_\gamma}, \ldots, \vartheta_{i_\mu i_\nu} \qquad (2.7)$$

где $i_\alpha < i_\beta < i_\gamma < \ldots < i_\mu < i_\nu$ и в правой окрестности $z = \alpha_1$

$$\vartheta_{0i_\alpha}(z) > \vartheta_{i_\alpha i_\beta}(z) > \ldots > \vartheta_{i_\mu i_\nu}(z)$$

Из соотношения

$$\Phi_{0i_\nu}(z, z^*) = \Phi_{0i_\nu}(\alpha_1, \alpha_1) = C_0 \qquad (2.8)$$

находим функцию $\vartheta_{0i_\nu}(z)$. Если $\vartheta_{0i_\nu}(z)$ в правой окрестности $z = \alpha$ больше, чем $\vartheta_{i_\varepsilon i_\zeta}$, но меньше предшествующей $\vartheta_{i_\varepsilon i_\zeta}$ функции из (2.7), то для дальнейших построений оставляем все функции из (2.7), предшествующие $\vartheta_{i_\varepsilon i_\zeta}(z)$, и функцию $\vartheta_{i_\varepsilon i_\nu}(z)$, которую находим из соотношения

$$\Phi_{i_\varepsilon i_\nu}(z, z^*) \equiv \Phi_{0i_\nu}(z, z^*) - \Phi_{0i_\varepsilon}(z, z^*) = 0 \qquad (2.9)$$

Рассмотрим, таким образом, все Φ_{0i_k} из первой строки (2.3) и определим соответствующие функции $\vartheta_{ij}(z)$.

Перейдем ко второй строке из (2.3). Из соотношения

$$\Phi_{i_{a'} i_{a+1}}(z, z^*) \equiv \Phi_{0i_{a+1}}(z, z^*) - \Phi_{0i_{a'}}(z, z^*) = \Phi_{i_{a'} i_{a+1}}(\alpha_1, \alpha_1) = -2C_0 \qquad (2.10)$$

где $i_a \leqslant i_{a'} < i_{a+1}$, находим функцию $z = \vartheta_{i_{a'} i_{a+1}}(z^*)$. Индекс $i_{a'}$ определяется следующим образом.

В некоторой правой окрестности точки α_1 выполняется тождественно относительно аргумента u для всех $\Phi_{0j}(u, u)$ при $i_a \leqslant j \leqslant i_{a'}$ соотношение $\Phi_{0i_a}(u, u) = \Phi_{0j}(u, u)$, а для индекса $j > i_{a'}$, но меньшего, чем i_{a+1}, в любой произвольно малой правой окрестности (фиг. 3) точки α_1 выполняется неравенство $\Phi_{0i_a}(u, u) > \Phi_{0j}(u, u)$.

Затем переходим к $\Phi_{0i_{a+2}}(z, z^*)$. Из соотношения

$$\Phi_{i_{a'} i_{a+2}}(z, z^*) \equiv \Phi_{0i_{a+2}}(z, z^*) - \Phi_{0i_{a'}}(z, z^*) = -2C_0 \qquad (2.11)$$

находим $z = \vartheta_{i_{a'} i_{a+2}}(z^*)$. Если в некоторой правой окрестности $z^* = \alpha_1$ функция $\vartheta_{i_{a'} i_{a+2}}(z^*)$ больше, чем $\vartheta_{i_{a'} i_{a+1}}(z^*)$, то оставляем одну функцию $\vartheta_{i_{a'} i_{a+2}}(z^*)$. В противном случае из соотношения

$$\Phi_{i_{a+1} i_{a+2}}(z, z^*) \equiv \Phi_{0i_{a+2}}(z, z^*) - \Phi_{0i_{a+1}}(z, z^*) = 0 \qquad (2.12)$$

находим функцию $z = \vartheta_{i_{a+1} i_{a+2}}(z^*)$. Дальше будем рассматривать функции $\vartheta_{i_{a'} i_{a+1}}(z^*)$ и $\vartheta_{i_{a+1} i_{a+2}}(z^*)$ и т. д.

Проводя аналогичные рассуждения, можно, переходя от строки к строке, рассмотреть все функции, входящие в систему равенств (2.3), и построить в некоторой правой окрестности точки $u=\alpha_1$ систему функций $z=\vartheta_{ij}(u)$ и $z^*=\vartheta_{ij}(u)$.

Расположим все $\Phi_{ij}(z, z^*)$, использованные при определении системы функций ϑ_{ij} в порядке возрастания индексов

$$\Phi_{i_1 j_1}(z, z^*), \quad \Phi_{i_2 j_2}(z, z^*), \ldots, \Phi_{i_m j_m}(z, z^*) \tag{2.13}$$

Подставив в каждый элемент из (2.13) на место соответствующего аргумента функции $\vartheta_{ij}(u)$, получим функции $\Phi_{ij}(\vartheta_{ij}(u), u)$ или $\Phi_{ij}(u, \vartheta_{ij}(u))$. Если $j_k < i_{k+1}$ в (2.13), то дополним последовательность (2.13) функцией $\Phi_{j_k i_{k+1}}(u, u)$, вставив ее между $\Phi_{i_k j_k}$ и $\Phi_{i_{k+1} j_{k+1}}$. Если $j_m < j_p$, то дополним (2.13) функцией $\Phi_{j_m j_p}(u, u)$. Получаем последовательность

$$\Phi_{j_0 j_1}, \quad \Phi_{j_1 j_2}, \quad \Phi_{j_2 j_3}, \ldots, \Phi_{j_{p-1} j_p} \tag{2.14}$$

Как указывалось выше, каждому $\Phi_{j_{k-1} j_k}$ из (2.14) соответствует функция $\vartheta_{j_{k-1} j_k}(u)$. Эти функции образуют последовательность

$$\vartheta_{j_0 j_1}, \quad \vartheta_{j_1 j_2}, \quad \vartheta_{j_2 j_3}, \ldots, \vartheta_{j_{p-1} j_p} \tag{2.15}$$

Пусть $j_k \leqslant j \leqslant j_{k+1}$, где j_k и j_{k+1} — индексы какой-либо функции $\Phi_{j_k j_{k+1}}(u)$ из (2.14).

Если $\Phi_{j_k j_{k+1}}(u) \equiv \Phi_{j_k j_{k+1}}(u, \vartheta_{j_k j_{k+1}}(u))$, то через $\Phi_j(u)$ обозначим функцию

$$\Phi_j(u) = \sum_{i=1}^{k} \Phi_{j_{i-1} j_i}(u) + \Phi_{j_k j}(u, \vartheta_{j_k j_{k+1}}(u)) \tag{2.16}$$

Если

$$\Phi_{j_k j_{k+1}}(u) \equiv \Phi_{j_k j_{k+1}}(\vartheta_{j_k j_{k+1}}(u), u)$$

то

$$\Phi_j(u) = \sum_{i=1}^{k} \Phi_{j_{i-1} j_i}(u) + \Phi_{j_k j}(\vartheta_{j_k j_{k+1}}(u), u) \tag{2.17}$$

Если $j=j_k$, то функции $\Phi_{j_k} = \sum\limits_{i=1}^{k} \Phi_{j_{i-1} j_i}(u)$ образуют последовательность

$$\Phi_{j_1}(u), \quad \Phi_{j_2}(u), \ldots, \Phi_{j_p}(u) \tag{2.18}$$

Их индексы образуют последовательность

$$j_1, \quad j_2, \ldots, j_p \tag{2.19}$$

Все элементы из (2.19) можно разделить на N групп по числу строк в (2.3). В каждой группе элементы j_k расположены в порядке возрастания индекса k, а индексы у элементов i-й группы меньше индексов элементов $i+1$-й группы. Пусть j_k принадлежит i-й группе из (2.19), тогда Φ_{j_k}, $\Phi_{j_{k-1} j_k}$, $\vartheta_{j_{k-1} j_k}$ принадлежат i-ым группам последовательностей (2.18), (2.14), (2.15). Если $\vartheta_{j_k j_{k+1}}$ принадлежит i-й группе и определяется из соотношения

$$\Phi_{j_k j_{k+1}}(z, z^*) = \Phi_{j_k j_{k+1}}(\alpha_1, \alpha_1)$$

как функция от z, т. е. $\vartheta_{j_k j_{k+1}} = \vartheta_{j_k j_{k+1}}(z)$, то и остальные функции этой группы определяются из соответствующих соотношений как функции от z. Если же $\vartheta_{j_k j_{k+1}}$ определяется как функция от z^*, то так же определяются и все остальные функции из этой группы. Из способа построения функций $\vartheta_{j_k j_{k+1}}$ следует.

1) В некоторой правой окрестности точки $u=\alpha_1$ для всех u функции $\vartheta_{j_k j_{k+1}}(u)$ из одной группы монотонно изменяются с ростом индекса k, причем разность $\vartheta_{j_k j_{k+1}}(u)-\vartheta_{j_{k-1} j_k}(u)$ не меняет знака при возрастании u в пределах этой окрестности.

2) В этой же окрестности $\vartheta_{j_k j_{k+1}}(u)\geqslant u$ для любого k.

3) Все $\Phi_{j_k}(u)$, принадлежащие одной группе, тождественно равны между собой в правой окрестности $u=\alpha_1$.

Заметим, что

$$\begin{aligned}
\Phi_{j_k j_{k+1}}(u,\ \vartheta_{j_k j_{k+1}}(u)) &= \sum_{i=j_k+1}^{j_{k+1}}{}' \delta_i(u)-\sum_{i=j_k+1}^{j_{k+1}}{}'' \delta_i(\vartheta_{j_k j_{k+1}}(u)) \\
\Phi_{j_k j_{k+1}}(\vartheta_{j_k j_{k+1}}(u),\ u) &= \sum_{j=j_k+1}^{j_{k+1}}{}' \delta_i(\vartheta_{j_k j_{k+1}}(u))-\sum_{i=j_k+1}^{j_{k+1}}{}'' \delta_i(u)
\end{aligned} \tag{2.20}$$

где каждая из сумм есть монотонно возрастающая функция аргумента u. Обозначим через E_u^+ систему интервалов, определяемую суммой первых слагаемых всех функций из (2.14), а через E_u^- — систему интервалов, определяемую суммой вторых слагаемых всех функций из (2.14). Из (2.20) следует, что если $\alpha_1<u_1<u_2$, то

$$E_{\alpha_1}^+\subset E_{u_1}^+\subset E_{u_2}^+,\qquad E_{\alpha_1}^-\subset E_{u_1}^-\subset E_{u_2}^- \tag{2.21}$$

Определим теперь функцию $\varphi_u(t)$.

$$\varphi_u(t)=M_1,\ \text{если } t\in E_u^+;\qquad \varphi_u(t)=-M_1,\ \text{если } t\in E_u^-$$
$$\varphi_u(t)=0,\ \text{если } t\in[0,\ T]-E_u^+-E_u^-$$

Из п. 3 следует, что $\varphi_u(t)$ принадлежит к классу A рассматриваемых функций; нетрудно показать, что $Y(\varphi_u)$ увеличивается с возрастанием u. Все это справедливо в некоторой правой окрестности точки $u=\alpha_1$. Второй шаг оканчивается, когда $u=\alpha_2$, если при этом значении u имеет место хотя бы один из приводимых ниже четырех случаев.

1°. Может оказаться, что при $u=\alpha_2$ для всех функций из (2.15)

$$\alpha_2+\vartheta_{j_k j_{k+1}}(\alpha_2)=2H$$

В этом случае мы считаем, что $\varphi_{\alpha_2}(t)$ совпадает с максимальной функцией $\varphi_m(t)$, построение которой на этом заканчивается.

2°. Пусть $j_k<j<j_{k+1}$, где j_k и j_{k+1} элементы из (2.19), может оказаться, что $|\Phi_j(\alpha_2)|=C_0$ и $|\Phi_j(u)|$ возрастает справа от $u=\alpha_2$. Эти соотношения могут иметь место сразу для нескольких j, лежащих между j_k и j_{k+1}, и для нескольких значений индекса k.

3°. Для одного или нескольких значений k при $u=\alpha_2$ меняет знак разность $\vartheta_{j_k j_{k+1}}(u)-\vartheta_{j_{k-1} j_k}(u)$. Предполагается, что $\vartheta_{j_{k-1} j_k}(u)$ и $\vartheta_{j_k j_{k+1}}(u)$ принадлежат одной группе из (2.15).

4°. При $u=\alpha_2$ для одного или нескольких значений k меняет знак разность $\vartheta_{j_k j_{k+1}}(u)-u$. Если при $u=\alpha_2$ имеет место хотя бы один из пп. 2°, 3°, 4°, то для того чтобы определить $\varphi_u(t)$ при $u > \alpha_2$, необходимо преобразовать и дополнить последовательности (2.14), (2.15) (2.18), (2.19) по приводимым ниже правилам.

Пусть имеет место 2°. В зависимости от знаков $\Phi_j(\alpha_2)$, $\Phi_{j_k}(\alpha_2)$, $\Phi_{j_{k+1}}(\alpha_2)$ может быть восемь случаев, которые можно представить следующей схемой

$$\begin{array}{lcccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \Phi_{j_k} = & C_0 & C_0 & C_0 & C_0 & -C_0 & -C_0 & -C_0 & -C_0 \\ \Phi_j = & C_0 & -C_0 & +C_0 & -C_0 & +C_0 & -C_0 & +C_0 & -C_0 \\ \Phi_{j_{k+1}} = & C_0 & C_0 & -C_0 & -C_0 & C_0 & C_0 & -C_0 & -C_0 \end{array}$$

Рассмотрим $\Phi_{j_k j_{k+1}}(z, z^*)$. При $u = \alpha_2$ будет

$$\text{либо (а)} \quad z = \alpha_2, \quad z^* = \vartheta_{j_k j_{k+1}}(\alpha_2)$$
$$\text{либо (б)} \quad z^* = \alpha_2, \quad z = \vartheta_{j_k j_{k+1}}(\alpha_2)$$

В случае (а) в некоторой правой окрестности $z = \alpha_2$ из соотношения

$$\Phi_{j_k j}(z, z^*) = \Phi_j(\alpha_2) - \Phi_{j_k}(\alpha_2)$$

находим $z^* = \vartheta_{j_k j}(z)$; из соотношения $\Phi_{jj_{k+1}}(z, z^*) = \Phi_{j_{k+1}}(\alpha_2) - \Phi_j(\alpha_2))$ находим $z^* = \vartheta_{j_k j}(z)$; и в последовательность (2.14) вместо функции $\Phi_{j_k j_{k+1}}(u, \vartheta_{j_k j_{k+1}}(u))$ подставляем $\Phi_{j_k j}(u, \vartheta_{j_k j}(u))$ и $\Phi_{jj_{k+1}}(u, \vartheta_{jj_{k+1}}(u))$; в (2.15) вместо $\vartheta_{j_k j_{k+1}}$ подставляем $\vartheta_{j_k j}(u)$ и $\vartheta_{jj_{k+1}}(u)$; в (2.18) и (2.19 между Φ_{j_k} и $\Phi_{j_{k+1}}$, j_k и j_{k+1} вставим соответственно Φ_j и j.

В случае (б) находим из тех же соотношений функцию $z = \vartheta_{j_k j}(z^*)$ и $z = \vartheta_{jj_{k+1}}(z^*)$ и повторяем затем те же операции, что и в случае (а).

Если между Φ_{j_k} и $\Phi_{j_{k+1}}$, при $u = \alpha_2$ имеют место несколько соотношений типа $|\Phi_j^i(\alpha_2)| = C_0$, то используем тот же метод, который применялся в начале второго шага для определения $\vartheta_{ij}(u)$, и вносим в последовательности (2.14), (2.15), (2.18), (2.19) соответствующие коррективы.

Пусть имеет место пункт 3° и пусть, например, $\vartheta_{j_{k-1} j_k}$ определяется из соотношения $\Phi_{j_{k-1} j_k}(z, z^*) = \Phi_{j_{k-1} j_k}(\alpha_1, \alpha_1)$ как функция от z. Тогда из соотношения $\Phi_{j_{k-1} j_{k+1}}(z, z^*) = \Phi_{j_{k+1}}(\alpha_1) - \Phi_{j_{k-1}}(\alpha_1)$ в правой окрестности $z = \alpha_2$ находим функцию $z^* = \vartheta_{j_{k-1} j_{k+1}}(z)$.

В (2.14) вместо $\Phi_{j_{k-1} j_k}(u, \vartheta_{j_{k-1} j_k}(u))$ и $\Phi_{j_k j_{k+1}}(u, \vartheta_{j_k j_{k+1}}(u))$ подставляем $\Phi_{j_{k-1} j_{k+1}}(u, \vartheta_{j_{k-1} j_{k+1}}(u))$; в (2.15) вместо $\vartheta_{j_{k-1} j_k}$ и $\vartheta_{j_k j_{k+1}}$ подставляем $\vartheta_{j_{k-1} j_{k+1}}$; в (2.18)) и (2.19) вычеркнем Φ_{j_k} и j_k.

Пусть имеет место пункт 4°, т. е. $\vartheta_{j_{k-1} j_k}(u) - u$ меняет знак при $u = \alpha_2$. Пункт 4° может иметь несколько вариантов:

1) в (2.15) $\vartheta_{j_{k-1} j_k}$ — самая правая функция или правее ее стоит только функция $\vartheta_{j_k j_{k+1}} \equiv u$.

В этом случае в (2.15) вместо $\vartheta_{j_{k-1} j_k}$ и $\vartheta_{j_k j_{k+1}}$ подставляем $\vartheta_{j_{k-1} j_{k+1}}(u) \equiv u$, в (2.14) вместо $\Phi_{j_{k-1} j_k}$ и $\Phi_{j_k j_{k+1}}$ подставляем $\Phi_{j_{k-1} j_{k+1}}(u, u)$; в (2.18) и (2.19) вычеркиваем Φ_{j_k} и j_k.

2) Функция $\vartheta_{j_{k-1} j_k}$ принадлежит i-й группе из (2.15) и правее ее в этой группе может лежать лишь функция $\vartheta_{j_k j_{k+1}}(u) \equiv u$; пусть, например,

$$\Phi_{j_{k-1} j_k}(u, \vartheta_{j_{k-1} j_k}(u)) = \Phi_{j_{k-1} j_k}(\alpha_1, \alpha_1)$$

Тогда из соотношения

$$\Phi_{j_{k-1} j_{k+1}}(z, z^*) = \Phi_{j_{k-1} j_{k+1}}(\alpha_1, \alpha_1)$$

найдем $z = \vartheta_{j_{k-1} j_{k+1}}(z^*)$; подставим в (2.15) вместо $\vartheta_{j_{k-1} j_k}(u)$ и $\vartheta_{j_k j_{k+1}}(u)$ функцию $\vartheta_{j_{k-1} j_{k+1}}(u)$; в (2.14) подставим $\Phi_{j_{k-1} j_{k+1}}$ вместо $\Phi_{j_{k-1} j_k}$ и $\Phi_{j_k j_{k+1}}$ и т. д.

3) Функция $\vartheta_{j_{k-1} j_k}$ является самой левой функцией в i-й группе из (2.15). Пусть, например,

$$\Phi_{j_{k-1} j_k}(\vartheta_{j_{k-1} j_k}(u), u) = \Phi_{j_{k-1} j_k}(\alpha_1, \alpha_1)$$

Если $\vartheta_{j_{k-2} j_{k-1}}(u) \equiv u$, то из соотношения $\Phi_{j_{k-2} j_k}(z, z^*) = \Phi_{j_{k-2} j_k}(\alpha_1, \alpha_1)$ находим функцию $z = \vartheta_{j_{k-2} j_k}(z^*)$; $\vartheta_{j_{k-2} j_k}(u)$ подставляем в (2.15) вместо $\vartheta_{j_{k-2} j_{k-1}}$ и $\vartheta_{j_{k-1} j_k}$; $\Phi_{j_{k-2} j_k}(u, \vartheta_{j_{k-2} j_k}(u))$ подставляем в (2.14), вместо $\Phi_{j_{k-2} j_{k-1}}(u, u)$ и $\Phi_{j_{k-1} j_k}(\vartheta_{j_{k-1} j_k}(u), u)$ и т. д.

Если $\vartheta_{j_{k-2} j_{k-1}}(u) \not\equiv u$, то из соотношения $\Phi_{j_{k-1} j_k}(z, z^*) = \Phi_{j_{k-1} j_k}(\alpha_1, \alpha_1)$ найдем $z = \vartheta_{j_{k-1} j_k}(z^*)$ и в (2.15) подставим $\vartheta_{j_{k-1} j_k}(u)$ вместо прежней функции с тем же индексом; в (2.14) подставим $\Phi_{j_{k-1} j_k}(u, \vartheta_{j_{k-1} j_k}(u))$ вместо $\Phi_{j_{k-1} j_k}(\vartheta_{j_{k-1} j_k}(u), u)$ (функции $\vartheta_{j_{k-1} j_k}(u)$ в последних двух выражениях различны). Таким образом, рассмотрены все случаи, которые могут встретиться при $u = \alpha_2$.

Преобразованные указанным выше способом последовательности (2.14), (2.15), (2.18), (2.19) образуют новые последовательности, которые могут отличаться от исходных только количеством групп. Используя эти новые последовательности, можно определить $\varphi_u(t)$ в некоторой правой окрестности $u = \alpha_2$. Если при $u = \alpha_3$ будет иметь место п. 1°, то $\varphi_{\alpha_3}(t)$ совпадет с максимальной функцией, если же при $u = \alpha_3$ будет иметь место хотя бы один из пп. 2°, 3°, 4°, то надо преобразовать полученные новые последовательности, по указанным выше правилам, и определять $\varphi_u(t)$ для $u > \alpha_3$. Построение $\varphi_m(t)$ будет закончено, если на каком-нибудь из аналогичных шагов для $0 < u \leqslant H$ будут выполнены условия п. 1°. Так как $F'(t)$ ограничена на $[0, T]$, то понадобится конечное число шагов, чтобы построить максимальную функцию. Таким образом, указан алгоритм построения $\varphi_m(t)$.

§ 3. Докажем теперь, что построенная в предыдущем параграфе максимальная функция $\varphi_m(t)$ действительно доставляет наибольшее значение функционалу (1.7). Пусть $\varphi_r(t)$ произвольная функция из класса A; докажем, что

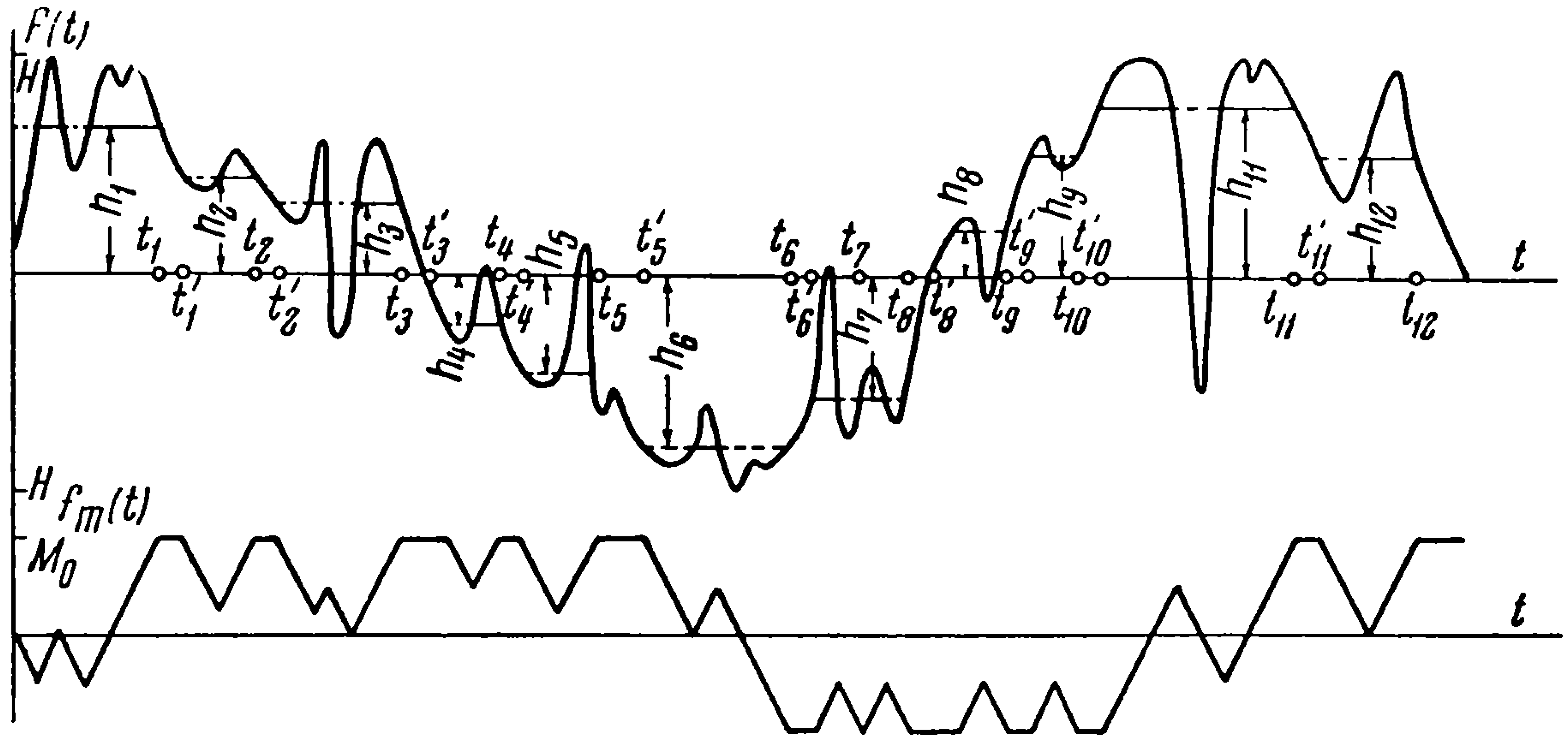
$$Y(\varphi_m) - Y(\varphi_r) \geqslant 0 \tag{3.1}$$

Из § 2 следует, что если на $[0, T]$ нет такой точки t_0, для которой

$$|f_m(t_0)| = \left|\int_0^{t_0} \varphi_m(t)\,dt\right| = M_0, \qquad \text{то } \varphi_m(t) = M_1 \operatorname{sign} F(t)$$

Из (1.7) сразу следует, что в этом случае $\varphi_m(t)$ доставляет наибольшее значение функционалу $Y(\varphi)$.

Рассмотрим наиболее общий случай. Из алгоритма построения $\varphi_m(t)$ следует, что для $f_m(t)$ могут выполняться следующие соотношения



Фиг. 4

(фиг. 4, где на интервалах, отмеченных сплошной линией, $\varphi_m = M_1$ пунктирной линией $\varphi_m = -M_1$; вне этих интервалов $\varphi_m = 0$; $t_3 = t_{i_1}$ $t_5 = t_{i_2}$, $t_8 = t_{i_3}$, $t_{10} = t_{i_4}$, $t_{12} = t_{i_5}$).

1°. В точках $t_1, t_2, \dots, t_{i_1}$ выполняются равенства

$$f_m(t_1) = f_m(t_2) = \dots = f_m(t_{i_1}) = M_0 \tag{3.2}$$

причем в некоторой левой окрестности каждой из этих точек $f_m(t) < M_0$. Имеются i_1 чисел $h_1 \geqslant h_2 \geqslant \dots \geqslant h_{i_1} \geqslant 0$ таких, что

$$\varphi_m(t) = M_1 \operatorname{sign}(F(t) - h_1) \tag{3.3}$$

Функция $\varphi_m(t) = M_1 \operatorname{sign}(F(t) - h_2)$ на интервале (t_1, t_2) за исключением интервала $(t_1, t_1') \in (t_1, t_2)$, где t_1' — ближайшая к t_1 точка пересечения функции $x = F(t)$ с прямой $x = h_2$; на этом интервале $\varphi_m(t) = 0$.

Функция $\varphi_m(t) = M_1 \operatorname{sign}(F(t) - h_3)$ на интервале (t_2, t_3) за исключением интервала (t_2, t_2'), где t_2' — ближайшая к t_2 точка пересечения функции $x = F(t)$ с прямой $x = h_3$; на этом интервале $\varphi_m(t) = 0$ и т. д.

2°. В точках $t_{i_1+1}, t_{i_1+2} \dots t_{i_2}$ выполняются равенства

$$f_m(t_{i_1+1}) = f_m(t_{i_1+2}) = \dots f_m(t_{i_2}) = M_0 \qquad (t_{i_1} < t_{i_1+1} < t_{i_1+2} < \dots < t_{i_2}) \tag{3.4}$$

Относительно этой группы равенств и определения на соответствующих интервалах функции $\varphi_m(t)$ надо повторить буквально то же самое, что и в предыдущем случае, с той только разницей, что

$$0 > h_{i_1+1} \geqslant h_{i_1+2} \geqslant \dots \geqslant h_{i_2}$$

3°. В точках $t_{i_2+1}, t_{i_2+2}, \dots, t_{i_3}$ выполняются равенства

$$f_m(t_{i_2+1}) = f_m(t_{i_2+2}) = \dots = f_m(t_{i_3}) = -M_0 \tag{3.5}$$

причем $f_m(t) > -M_0$ некоторой левой окрестности точек $t_{i_2+1}, t_{i_2+2}, \ldots t_{i_3}$. Функция $\varphi_m(t)$ определена на интервалах $(t_{i_2+1}, t_{i_2+2}) \ldots (t_{i_3-1}, t_{i_3})$ так же, как и в предыдущих пунктах, но здесь

$$0 > h_{i_3} \geqslant h_{i_3-1} \geqslant \ldots \geqslant h_{i_2+1} \tag{3.6}$$

4°. В точках $t_{i_3+1}, t_{i_3+2}, \ldots, t_{i_4}$ выполняются равенства

$$f_m(t_{i_3+1}) = f_m(t_{i_3+2}) = \ldots = f_m(t_{i_4}) = -M_0 \tag{3.7}$$

Все определяется так, как и в п. 3°, за тем только исключением, что

$$0 \leqslant h_{i_3+1} \leqslant h_{i_3+2} \leqslant \ldots h_{i_4} \tag{3.8}$$

5°. В точках $t_{i_4+1}, t_{i_4+2}, \ldots, t_{i_5}$ выполняются равенства

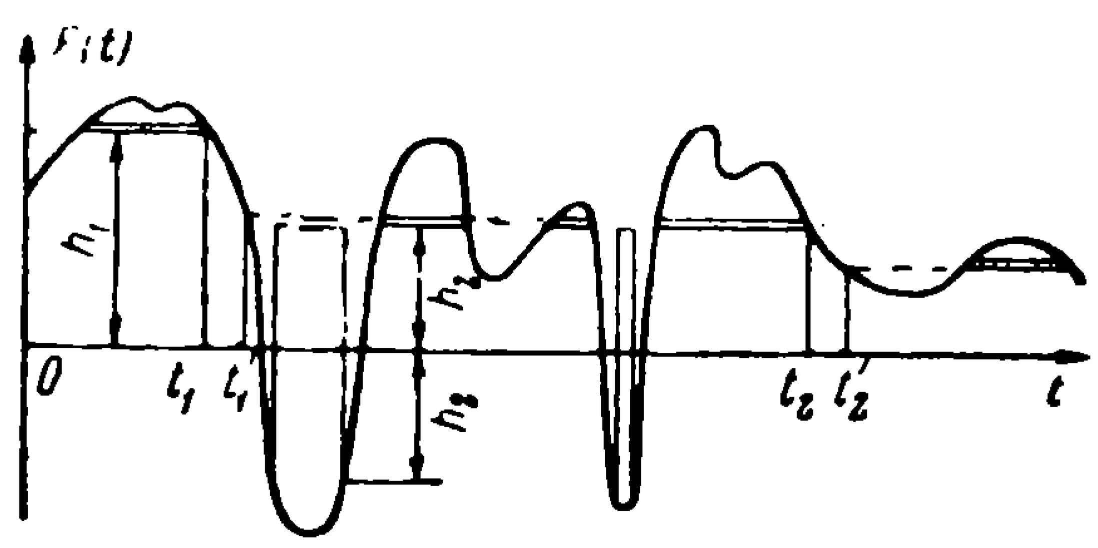
$$f_m(t_{i_4+1}) = f_m(t_{i_4+2}) = \ldots f_m(t_{i_5}) = M_0 \tag{3.9}$$

Здесь надо дословно повторить все, что было сказано в п. 1°. Затем идут равенства 6°, совпадающие с равенствами п. 2° и т. д.

На фиг. 4 изображена такая функция $f_m(t)$. Покажем, что

$$\int_0^{t_{i_1}'} F(t)(\varphi_m - \varphi_r)\,dt \geqslant 0 \tag{3.10}$$

где t_{i_1}' — ближайший к t_{i_1} справа корень уравнения $F(t) = 0$.



Фиг. 5

Через Δ_j, Δ_j', Δ_j'' $(j = 1, \ldots, i_1)$ обозначим следующие системы интервалов, принадлежащие $(0, t_{i_1}')$ (фиг. 5, где интервалы из (t_1', t_2'), отмеченные двойной линией, образуют Δ_2; (t_2, t_2') есть Δ_2'', все остальные интервалы из (t_1', t_2') образуют Δ_2'.

1) $\Delta_j + \Delta_j' + \Delta_j'' = (t_{j-1}', t_j)$.

2) Если $t \in \Delta_j$, то $|F(t)| > h_j$ и $\varphi_m(t) = M_1 \operatorname{sign} F(t)$; если $t \in \Delta_j'$, то $|F(t)| < h_j$ и $\varphi_m(t) = -M_1$; если $t \in \Delta_j''$, то $h_j \geqslant F(t) \geqslant h_{j+1}$ и $\varphi_m(t) = 0$ (Δ_j'' — интервал (t_j, t_j')).

Из сказанного выше следует, что

$$\int_0^{t_{i_1}} F(t)(\varphi_m - \varphi_r)\,dt =$$

$$= \sum_{j=1}^{i_1} \left\{ \int_{\Delta_j} F(\varphi_m - \varphi_r)\,dt + \int_{\Delta_j'} F(\varphi_m - \varphi_r)\,dt + \int_{\Delta_j''} F(-\varphi_r)\,dt \right\}$$

Интегралы в правой части вычисляются вдоль интервалов, входящих в Δ_j, Δ_j', Δ_j''. Используя обобщенную теорему о среднем, можно показать, что

$$\int_{\Delta_j} F(\varphi_m - \varphi_r)\,dt = |F(a_j)| \int_{\Delta_j} |\varphi_m - \varphi_r|\,dt \qquad (a_j \in \Delta_j)$$

$$\int_{\Delta_j'} F(\varphi_m - \varphi_r)\,dt = F(b_j) \int_{\Delta_j'} (\varphi_m - \varphi_r)\,dt \qquad (b_j \in \Delta_j')$$

$$\int_{\Delta_j''} F(-\varphi_r)\,dt = F(c_j) \int_{\Delta_j''} (-\varphi_r)\,dt \qquad (c_j \in \Delta_j'')$$

Поэтому

$$\int_0^{t_{i_1}'} F(\varphi_m-\varphi_r)\,dt = \tag{3.11}$$

$$=\sum_{j=1}^{i_1}\left\{|F(a_j)|\int_{\Delta_j}|\varphi_m-\varphi_r|\,dt+F(b_j)\int_{\Delta_j'}(\varphi_m-\varphi_r)\,dt+F(c_j)\int_{\Delta_j''}(-\varphi_r)\,dt\right\}$$

Заметим, что $\int\limits_{\Delta_j'}(\varphi_m-\varphi_r)\,dt\leqslant 0$, так как $\varphi_m(t)=-M_1$ на Δ_j'. Очевидно, что

$$\sum_{j=1}^{k}\left\{\int_{\Delta_j}(\varphi_m-\varphi_r)\,dt+\int_{\Delta_j'}(\varphi_m-\varphi_r)\,dt+\int_{\Delta_j''}(-\varphi_r)\,dt\right\}\geqslant 0 \qquad (k=1,\ldots i_1)$$

Пусть для некоторого $k<i_1$ показано, что

$$\sum_{j=1}^{k}\left\{|F(a_j)|\int_{\Delta_j}|\varphi_m-\varphi_r|\,dt+F(b_j)\int_{\Delta_j'}(\varphi_m-\varphi_r)\,dt+F(c_j)\int_{\Delta_j''}(-\varphi_r)\,dt\right\}\geqslant 0$$

Покажем, что такое же неравенство имеет место и для $k+1$. Действительно, пусть

$$\int_{\Delta_{k+1}''}(-\varphi_r(t))\,dt<0$$

Тогда, если

$$\int_{\Delta_{k+1}}(\varphi_m-\varphi_r)\,dt>\left|\int_{\Delta_{k+1}'}(\varphi_m-\varphi_r)\,dt+\int_{\Delta_{k+1}''}(-\varphi_r)\,dt\right|$$

то из неравенства $|F(a_{k+1})|>\max(|F(b_{k+1})|,\ F(c_{k+1}))$ следует, что

$$|F(a_{k+1})|\int_{\Delta_{k+1}}|\varphi_m-\varphi_r|\,dt+F(b_{k+1})\int_{\Delta_{k+1}'}(\varphi_m-\varphi_r)\,dt+$$
$$+F(c_{k+1})\int_{\Delta_{k+1}''}(-\varphi_r)\,dt\geqslant 0$$

Если

$$\int_{\Delta_{k+1}}(\varphi_m-\varphi_r)\,dt<\left|\int_{\Delta_{k+1}'}(\varphi_m-\varphi_r)\,dt+\int_{\Delta_{k+1}''}(-\varphi_r)\,dt\right|$$

то из неравенств

$$\sum_{j=1}^{k+1}\left\{\int_{\Delta_j}(\varphi_m-\varphi_r)\,dt+\int_{\Delta_j'}(\varphi_m-\varphi_r)\,dt+\int_{\Delta_j''}(-\varphi_r)\,dt\right\}\geqslant 0$$

$$\max(|F(b_{k+1})|,F(c_{k+1}))<\min_{j\leqslant k}(|F(a_j)|,\ F(c_j))$$

следует, что

$$\sum_{j=1}^{k+1}\left\{|F(a_j)|\int_{\Delta_j}|\varphi_m-\varphi_r|\,dt+F(b_j)\int_{\Delta_j'}(\varphi_m-\varphi_r)\,dt+F(c_j)\int_{\Delta_j''}(-\varphi_r)\,dt\right\}\geqslant 0$$

Неравенство

$$|F(a_1)|\int_{\Delta_1}|\varphi_m-\varphi_r|\,dt+F(b_1)\int_{\Delta_1'}(\varphi_m-\varphi_r)\,dt+F(c_1)\int_{\Delta_1''}(-\varphi_r)\,dt\geqslant 0$$

следует из того, что

$$\int\limits_{\Delta_1+\Delta_1'+\Delta_1''} (\varphi_m - \varphi_r)\, dt \geqslant 0, \qquad |F(a_j)| > \max(|F(b_1)|,\ F(c_1))$$

Таким образом, доказано неравенство (3.10). Аналогичным образом оно доказывается и когда

$$\int\limits_{\Delta''_{k+1}} (-\varphi_r)\, dt \geqslant 0$$

Затем рассматривается интервал (t_{i_1}', t_{i_3}'), где t_{i_3}' — ближайший к t_{i_3} справа корень уравнения $F(t) = 0$. Можно показать, что

$$\int\limits_{t_{i_1}'}^{t_{i_3}'} F(\varphi_m - \varphi_r) \geqslant 0 \tag{3.12}$$

Доказательство этого неравенства аналогично доказательству неравенства (3.10) и поэтому здесь не приводится. Заметим только, что при доказательстве используются неравенства вида (3.8) и неравенство

$$\int\limits_{t_{i_1}'}^{t_j} (\varphi_m - \varphi_r)\, dt \leqslant 0 \qquad (j = i_2 + 1,\ i_2 + 2, \ldots, i_3)$$

Затем рассматривается интервал (t_{i_3}', t_{i_5}') и доказывается неравенство

$$\int\limits_{t_{i_3}'}^{t'_{i_5}} F(\varphi_m - \varphi_r)\, dt \geqslant 0 \qquad \text{и т. д.} \tag{3.13}$$

Все эти неравенства доказываются аналогично неравенству (3.10). Так как таких интервалов конечное число, то тем самым показано, что неравенство (3.1) справедливо.

Может оказаться, что предельные равенства для $f_m(t)$ будут начинаться не с п. 1, как указано выше, а с любого из последующих пунктов. Кроме того, за п. 1 может следовать сразу п. 3 и т. д. При этом доказательство неравенства (3.1) не изменяется.

Пример. В уравнении $\ddot{y} + 2\dot{y} + 100y = f(t)$ при $T = 1$ $y_{\max}(1) = 4k$ при условии $|f(t)| \leqslant 100k$; $y_{\max}(1) = 3{,}3k$ при условии $|f(t)| \leqslant 100k$; $|f'(t)| \leqslant 830k$.

Замечание 1. Приведенный выше алгоритм построения $\varphi_m(t)$ можно применить и для случая линейного разностного уравнения, однако, в отличие от приведенного случая, $\varphi_m(t)$ может оказаться не единственной функцией, дающей максимум решению в момент времени T см. [5].

Замечание 2. Если для определения $\varphi_m(t)$ требуется небольшое количество шагов, то оно легко может быть проведено графически. В общем случае нетрудно составить программу для вычисления $\varphi_m(t)$ и $Y_m(T)$ на электронных цифровых машинах.

Поступила 17 XI 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Булгаков Б. В. О накоплении возмущений в линейных колебательных системах с постоянными параметрами. Докл. АН СССР, 1946, т. 51, № 5.
2. Булгаков Б. В., Кузовков Н. Т. О накоплении возмущений в линейных системах с переменными параметрами. ПММ, 1950, т. XIV, вып. 1.
3. Ройтенберг Я. Н. О накоплении возмущений в нестационарных линейных импульсных системах. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 4.
4. Гноенский Л. С. О накоплении возмущений в линейных системах. Научн. докл. Высш. школы. физ.- матем. науки, 1959, № 1.
5. Гноенский Л. С. О накоплении возмущений в нестационарных линейных импульсных системах. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 6.
6. Birch B. J. and Jackson R. The Behaviour of Linear Systems With Inputs Satisfying Certain Bounding Conditions. Journal of Electronics and Control. First Series. April, 1959. Vol. VI, n° 4.