Прикладная математика и механика. Том XXV, 1961
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

К МЕТОДУ ХИЛЛА В ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

К. Г. Валеев

(Ленинград)

В статье [1] было выведено уравнение [5,8] для определения в первом приближении характеристических показателей в случае параметрического резонанса квазигармонических квазистационарных систем. Ниже выводится уравнение, при помощи которого можно определить характеристические показатели с любой степенью точности. Это уравнение применяется для вывода важной в приложениях формулы, позволяющей с точностью до малых второго порядка включительно определять границы областей параметрического резонанса упругих систем. Дается простой критерий устойчивости решений уравнения второго порядка.

1. Рассматривается система дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d^2Y}{dt^2} + \mu N(\theta t)\frac{dY}{dt} + (C + \mu P(\theta t))Y = 0 \qquad (\theta > 0) \tag{1.1}$$

Здесь μ — малый параметр, $C = (\omega_1^2, \ldots, \omega_m^2)$ — диагональная матрица, $\omega_j^2 > 0$ $(j = 1, \ldots, m)$

$$N(\tau) = \sum_{k=-l}^{l} N^{(k)} e^{ik\tau}, \qquad N^{(k)} = \| \nu_{js}^{(k)} \|_1^m \qquad (k = 0, \pm 1, \ldots, \pm l)$$

$$P(\tau) = \sum_{k=-l}^{l} P^{(k)} e^{ik\tau}, \qquad P^{(k)} = \| \pi_{js}^{(k)} \|_1^m \qquad (k = 0, \pm 1, \ldots, \pm l) \tag{1.2}$$

где $\nu_{js}^{(k)}$, $\pi_{js}^{(k)}$ — комплексные числа.

Рассмотрим определитель Хилла [1] (формулы (1.8)), составленный для системы (1.1) и зависящий от комплексной переменной p. Матрица определителя Хилла X будет состоять из квазиэлементов — матриц порядка $m \times m$. На главной диагонали будут стоять элементы вида [1] (считаем $(k\theta)^2 \equiv 1$ при $k = 0$)

$$c_{rr}^{0k}(p) = -(k\theta)^{-2}((p + k\theta i)^2 + \mu\nu_{rr}^{(0)}(p + k\theta i) + \omega_r^2 + \mu\pi_{rr}^{(0)})$$
$$(r = 1, \ldots, m, \ k = 0, \pm 1, \ldots) \tag{1.3}$$

Все элементы матрицы X вне главной диагонали имеют порядок малости μ. Пусть $\theta = \theta_0$, $\mu = 0$. Рассмотрим совокупность $2m$ чисел

$$\omega_1, \ldots, \quad \omega_m, \quad -\omega_1, \ldots, \quad -\omega_m \tag{1.4}$$

и выделим из них те, которые отличаются от данного ω_g на слагаемое вида $k\theta_0$ (k — целое число). Переобозначим их в $\rho_1, \ldots, \rho_n$ $(n \leqslant 2m)$. Обозначим число s символом $[j]$, если $\rho_j = \omega_s$ или $\rho_j = -\omega_s$. Пусть

$$k_j \equiv (\rho_j - \rho_1)\theta_0^{-1} \tag{1.5}$$

Из (1.3) следует, что определитель Хилла имеет при $\mu=0$, $\theta=\theta_0$ нуль порядка n при $p=i\omega_g$, так как в n строках диагональные элементы обращаются в нуль. Эти строки и строки, расположенные таким же образом в других бесконечных матрицах, будем называть особыми. Покажем, что в рассмотренном выше случае бесконечный определитель Хилла можно преобразовать в определитель порядка n.

Элементы (1.3) каждой строки матрицы X, содержащей элемент $c_{rr}^{0k}(p)$, разделим на выражение $-(k\theta)^{-2}((p+k\theta i)^2+\omega_r^2)$. Полученную матрицу обозначим через U. Заменим все элементы в особых строках матрицы U, содержащие множитель μ, нулями и обозначим полученную матрицу через Z. В матрице Z в особых строках на главной диагонали стоят единицы, а все остальные элементы — нули. При $\mu=0$ матрицы U, Z обращаются в единичные матрицы, поэтому матрицы U^{-1}, Z^{-1} можно разложить по степеням μ. Элементы матрицы Z^{-1} получаются из элементов матрицы U^{-1} выбрасыванием всех слагаемых, которые обращаются в бесконечность при $p=i\omega_g$, $\theta=\theta_0$. Как показано далее, всегда найдется такое число $\varepsilon>0$, что при выполнении условий

$$|p-i\omega_g|\leqslant\varepsilon,\qquad |\theta-\theta_0|\leqslant\varepsilon,\qquad |\mu|\leqslant\varepsilon \tag{1.6}$$

матрица Z^{-1} существует и $\operatorname{Det} Z^{-1}\neq 0,\ \neq\infty$. Имеем

$$\operatorname{Det} X=\operatorname{Det}(XZ^{-1})\,(\operatorname{Det} Z^{-1})^{-1} \tag{1.7}$$

Непосредственным рассмотрением можно убедиться, что в матрице XZ^{-1} во всех неособых строках будут отличны от нулей лишь элементы, расположенные на главной диагонали. Раскрывая $\operatorname{Det}(XZ^{-1})$ по этим элементам, сводим его к определителю порядка n, элементы которого расположены на особых строках и столбцах, проходящих через диагональные элементы особых строк матрицы XZ^{-1}.

Для определения характеристических показателей $|p_j-i\omega_g|\leqslant\varepsilon$ $(j=1,\ldots,n)$ получаем уравнение

$$D(p,\ \theta,\ \mu)\equiv\operatorname{Det}\|\delta_{sr}((p+k_s\theta i)^2+\rho_s^2)+\mu b_{sr}(p,\ \theta,\ \mu)\|_1^n=0$$

$$(\delta_{ss}=1,\ \delta_{sr}=0,\ s\neq r) \tag{1.8}$$

$$b_{sr}(p,\ \theta,\ \mu)=\nu_{[s]\,[r]}^{(k_s-k_r)}(p+k_r\theta i)+\pi_{[s]\,[r]}^{(k_s-k_r)}-\mu\sum_{\chi,\ \alpha}{}'(\nu_{[s]\ \alpha}^{(k_s-\chi)}(p+\chi\theta i)+\pi_{[s]\ \alpha}^{(k_s-\chi)})\times$$

$$\times\frac{\nu_{\alpha\ [r]}^{(\chi-k_r)}(p+k_r\theta i)+\pi_{\alpha\ [r]}^{(\chi-k_r)}}{(p+\chi\theta i)^2+\rho_\alpha^2}+\mu^2\sum_{\chi,\alpha,\beta,\gamma}{}'(\nu_{[s]\ \alpha}^{(k_s-\chi)}(p+\chi\theta i)+\pi_{[s]\ \alpha}^{(k_s-\chi)})\times$$

$$\times\frac{\nu_{\alpha\beta}^{(\chi-\gamma)}(p+\gamma\theta i)+\pi_{\alpha\beta}^{(\chi-\gamma)}}{(p+\chi\theta i)^2+\rho_\alpha^2}\,\frac{\nu_{\beta\ [r]}^{(\gamma-k_r)}(p+k_r\theta i)+\pi_{\beta\ [r]}^{(\gamma-k_r)}}{(p+\gamma\theta i)^2+\rho_\beta^2}+\ldots$$

Закон составления последующих членов ряда (1.9) очевиден. Штрих в суммах в (1.9) обозначает, что суммирование ведется по всевозможным различным комбинациям целочисленных индексов, указанных снизу, а из сумм выпускаются слагаемые, для которых знаменатели в дробях обращаются в нуль при $p=i\omega_g$, $\theta=\theta_0$.

Сходимость ряда в (1.9) обусловлена сходимостью матричного ряда для Z^{-1} по степеням μ, который сходится, если выполнено условие

$$|\mu| \sum_{k=-l}^{l} (|P^{(k)}| + (|p| + |k\theta|)|N^{(k)}|) \leqslant \min|(p+k\theta i)^2 + \omega_s^2| \qquad (1.10)$$

$$(s = 1, \ldots, m,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \text{ при условии } \omega_s^2 - (\omega_g + k\theta_0)^2 \neq 0)$$

Здесь $|P|$ — обозначает норму матрицы P.

Если в уравнениях (1.8), (1.9) элементы $b_{sr}(p, \theta, \mu)$ выписаны с точностью до малых величин $O(\mu^k)$, то уравнение (1.8) всегда позволит определить характеристические показатели с точностью до малых величин $O(\mu^{k+1})$. В статье [1] для уравнения (5.8) в равенстве (1.9) были учтены только члены порядка μ^0.

Вышеизложенный способ может быть легко применен к исследованию резонанса квазистационарной системы дифференциальных уравнений первого порядка с периодическими коэффициентами.

2. Рассмотрим частный случай системы (1.1), когда $N(\tau) \equiv 0$, $P(\tau)$ — самосопряженная матрица [2]

$$\frac{d^2Y}{dt^2} + (C + \mu P(\theta t))Y = 0 \qquad (2.1)$$

где C, $P(\tau)$ имеют вид, как и в (1.1), (1.2). Если в этом случае в разложении (1.9) для b_{sr} (p, θ, μ) учтем только члены порядка μ^0, то уравнение (1.8) будет отличаться лишь несущественным постоянным множителем от полученного В. А. Якубовичем [3] уравнения для исследования динамической устойчивости.

Пусть при данном g выполнено соотношение

$$k\theta_0 = \omega_g + \omega_h \qquad (g, h = 1, \ldots, m,\ k = 1, 2, 3 \ldots) \qquad (2.2)$$

причем только при одном наборе значений k, h. На границе области неустойчивости у канонических систем дифференциальных уравнений всегда имеются кратные характеристические показатели [2]. Если в (1.9) учтены члены с точностью до малых порядка μ, то из условия кратности корней уравнения (1.8) для случая (2.2) имеем

$$\theta_\pm = \frac{\omega_h + \omega_g}{k} + \frac{\mu}{2k}\left\{\frac{\pi_{gg}^{(0)}}{\omega_g} + \frac{\pi_{hh}^{(0)}}{\omega_h} \pm 2d - \frac{\mu}{4\omega_g}\left(\frac{\pi_{gg}^{(0)}}{\omega_g} \pm d\right)^2 - \right.$$
$$- \frac{\mu}{4\omega_h}\left(\frac{\pi_{hh}^{(0)}}{\omega_h} \pm d\right)^2 - \frac{\mu}{\omega_g}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=-l}^{l}{}' \frac{\pi_{gr}^{(-j)}\pi_{rg}^{(j)}}{\omega_r^2 - (\omega_g + j\theta_0)^2} -$$
$$\left. - \frac{\mu}{\omega_h}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=-l}^{l}{}' \frac{\pi_{hr}^{(j)}\pi_{rh}^{(-j)}}{\omega_r^2 - (\omega_h + j\theta_0)^2}\right\} + O(\mu^3) \qquad (2.3)$$

$$d = \frac{1}{\sqrt{\omega_g\omega_h}}\left|\pi_{gh}^{(k)} - \mu\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=-l}^{l}{}' \frac{\pi_{gr}^{(-j)}\pi_{rh}^{(k+j)}}{\omega_r^2 - (\omega_g + j\theta_0)^2}\right| \qquad (2.4)$$

Формула (2.3) является обобщением формулы И. Г. Малкина [2] для нахождения областей параметрического резонанса канонических систем. Легко можно выписать и дальнейшие по порядку члены, но они имеют громоздкий вид.

Пример 1. Найдем области параметрического резонанса для канонической системы дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d^2Y}{dt^2}+\left(\begin{pmatrix}\omega_1^2 & 0\\ 0 & \omega_2^2\end{pmatrix}+2\mu\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & \gamma\end{pmatrix}\cos\theta t\right)Y=0 \tag{2.5}$$

в случае

$$\theta_0=\omega_1+\omega_2,\qquad \theta_0=2\omega_1\quad(\omega_1>\omega_2,\quad \omega_1\neq k\omega_2,\quad k=1,2,3,\ldots)$$

Имеем

$$\pi_{11}^{(1)}=\pi_{11}^{(-1)}=\alpha,\qquad \pi_{12}^{(1)}=\pi_{12}^{(-1)}=\pi_{21}^{(1)}=\pi_{21}^{(-1)}=\beta,\qquad \pi_{22}^{(1)}=\pi_{22}^{(-1)}=\gamma$$

Из формул (2.3), (2.4) получаем

$$\theta_{\pm}=\omega_1+\omega_2\pm\frac{\mu\beta}{\sqrt{\omega_1\omega_2}}-\frac{\mu^2\alpha^2}{\omega_1(\omega_1-\omega_2)(3\omega_1+\omega_2)}-\frac{\mu^2\gamma^2}{\omega_2(\omega_2-\omega_1)(3\omega_2+\omega_1)}-$$
$$-\frac{\mu^2\beta^2}{4\omega_1\omega_2(\omega_1+\omega_2)}+\ldots \tag{2.6}$$
$$\theta_{\pm}=2\omega_1\pm\frac{\mu\alpha}{\omega_0}-\frac{\mu^2\alpha^2}{8\omega_1^3}+\frac{\mu^2\beta^2}{\omega_1(9\omega_1^2-\omega_2^2)}+\frac{\mu^2\beta^2}{\omega_1(\omega_1^2-\omega_2^2)}+\ldots.$$

Формулы (2.3), (2.4) пригодны для нахождения с точностью до малых порядка μ^2 границ областей неустойчивости для одного уравнения вида (2.1) (уравнение Хилла). На границе областей простого параметрического резонанса ([2], стр. 341) характеристический показатель $p=0.5\,k\theta i$ ($k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots$); поэтому для нахождения областей простого параметрического резонанса можно использовать уравнение (1.8)

$$D(0.5k\theta i,\ \theta,\ \mu)=0\quad(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots)$$

3. Уравнение (1.8) можно использовать для получения более простого, чем в ([4], стр. 598) критерия устойчивости решений одного уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами вида

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\mu f_1(\theta t,\ \mu)\frac{dy}{dt}+(\omega^2+\mu f_2(\theta t,\ \mu))\,y=0 \tag{3.1}$$

где $\omega^2>0$, $f_1(\theta t,\ \mu)$, $f_2(\theta t,\ \mu)$ — вещественные функции вещественного аргумента, непрерывные по μ; при этом μ — малый параметр $0\leqslant\mu\leqslant\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$

$$\begin{aligned} f_1(\tau,\ \mu)&=\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{ik\tau}\nu_k(\mu), & |\nu_0(\mu)|+\sum_{k=-\infty}^{\infty}|k\nu_k(\mu)|\leqslant c_1\\ f_2(\tau,\ \mu)&=\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{ik\tau}\pi_k(\mu), & \sum_{k=-\infty}^{\infty}|\pi_k(\mu)|\leqslant c_2\end{aligned} \tag{3.2}$$

На границе области неустойчивости в плоскости параметров θ, μ характеристические показатели будут числа вида $p=0.5\,k\theta i$, т. е. существует периодическое или полупериодическое решение периода $2\pi\theta^{-1}$ ([2], стр. 316).

Уравнение (1.8) (в данном случае определитель второго порядка) для нахождения границ областей неустойчивости при

$$\theta_0=2\omega k^{-1},\qquad|\theta-\theta_0|\leqslant2\omega(k+1)^{-1}k^{-1},\qquad0\leqslant\mu\leqslant\varepsilon\qquad(k=1,2,\ldots) \tag{3.3}$$

принимает вид

$$D(0.5\,k\theta i,\ \theta,\ \mu)\equiv|a_k(\theta,\ \mu)|^2-|b_k(\theta,\ \mu)|^2 \tag{3.4}$$

При этом из (1.9) имеем (для простоты не пишем аргументы ν_k, π_k)

$$a_k(\theta,\ \mu)=\omega^2-0.25\,k^2\theta^2+0.5\mu k\theta\nu_0 i+\mu\pi_0- \tag{3.5}$$
$$-\mu^2\sum_{\chi}{}'\frac{(0.5k+\chi)\,\nu_{-\chi}\theta i+\pi_{-\chi}}{\omega^2-(0.5k+\chi)^2\theta^2}(0.5\nu_\chi k\theta i+\pi_\chi)+$$
$$+\mu^3\sum_{\chi,\gamma}{}'\frac{(0.5k+\chi)\,\nu_{-\chi}\theta i+\pi_{-\chi}}{\omega^2-(0.5k+\chi)^2\theta^2}\,\frac{(0.5k+\gamma)\,\nu_{\chi-\gamma}\theta i+\pi_{\chi-\gamma}}{\omega^2-(0.5k+\gamma)^2\theta^2}(0.5k\nu_\gamma\theta i+\pi_\gamma)+\ldots$$

а также выражения

$$b_k(\theta,\mu) = -0.5\mu k\nu_k\theta i + \mu\pi_k - \mu^2 \sum_{\chi}{}' \frac{(0.5k+\chi)\nu_{-\chi}\theta i + \pi_{-\chi}}{\omega^2 - (0.5k+\chi)^2\theta^2} \times$$

$$\times(-0.5\,k\nu_{\chi+k}\theta i + \pi_{\chi+k}) + \mu^3 \sum_{\chi,\gamma}{}' \frac{(0.5k+\chi)\nu_{-\chi}\theta i + \pi_{-\chi}}{\omega^2-(0.5k+\chi)^2\theta^2} \times$$

$$\times \frac{\nu_{\chi-\gamma}(0.5k+\gamma)\theta i + \pi_{\chi-\gamma}}{\omega^2-(0.5k+\gamma)^2\theta^2}(-0.5k\nu_{\gamma+k}\theta i + \pi_{\gamma+k}) + \ldots \tag{3.6}$$

Штрих в суммах в (3.5), (3.6) обозначает, что из сумм выпускаются слагаемые, у которых знаменатели в дробях обращаются в нуль при $\theta = 2\omega k^{-1}$, т. е. $\chi, \gamma, \ldots, \neq 0, \neq k$. Из (1.10) можно дать грубую оценку областям сходимости рядов (3.5), (3.6). А именно, должны быть выполнены условия (3.3) и следующее

$$|\mu| \leqslant \omega^2 k(2k-1)(c_1(k+1)(k+2)^2 + c_2(k+1)^2 k)^{-1} \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{3.7}$$

где c_1, c_2 определены в (3.2). Таким же путем, как и в работе ([4], стр. 599), можно доказать следующую теорему.

Теорема. Пусть μ удовлетворяет условию (3.7), а θ — условию

$$2\omega(k+0.5)^{-1} \leqslant \theta \leqslant 2\omega(k-0.5)^{-1}, \tag{3.8}$$

Решения уравнения (3.1) устойчивы, если

(1) $\mu\nu_0(\mu) > 0$,	$D(0.5k\theta i,\ \theta,\ \mu) > 0$	(асимптотическая устойчивость)
(2) $\mu\nu_0(\mu) = 0$,	$D(0.5k\theta i,\ \theta\mu) > 0$	(ограниченность решений)
(3) $\mu\nu_0(\mu) > 0$,	$D(0.5k\theta i,\ \theta,\ \mu) = 0$	(существует одно периодическое или полупериодическое решение периода $2\pi\theta^{-1}$)
(4) $\mu\nu_0(\mu) = 0$,	$D(0.5k\theta i,\ \theta,\ \mu) = 0$, $b_k(\theta,\mu) = 0$	(существуют два линейно независимые периодические или полупериодические решения)

Во всех остальных случаях решения уравнения (3.1) неустойчивы.

Выписанные в (3.5) (3.6) члены позволят определить границу области неустойчивости с точностью до малых порядка μ^3 включительно.

Пример 2. Составим условие устойчивости для решений уравнения

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \mu(a + 2b\cos\theta t)\frac{dy}{dt} + \omega^2 y = 0 \qquad (a \geqslant 0) \tag{3.9}$$

при $\theta \approx \omega$, $\mu > 0$. Имеем $\nu_0 = a$, $\nu_{-1} = \nu_1 = b$, $k = 2$, $b_2(\theta,\mu) \equiv 0$. Условие устойчивости принимает вид

$$(\omega^2 - \theta^2 + 2\mu^2 b^2\theta^2(\omega^2 - 4\theta^2)^{-1} + \ldots)^2 + (\mu a\theta - 4\mu^3 ab^2\theta^2(\omega^2 - 4\theta^2)^{-2} + \ldots)^2 \geqslant 0 \tag{3.10}$$

Поэтому решения уравнения (3.9) всегда устойчивы при

$$^4/_5\,\omega \leqslant \theta \leqslant {}^4/_3\,\omega, \qquad 0 \leqslant \mu \leqslant 0.125\omega^2(|a| + 2|b|^{-1} \qquad (a > 0)$$

В заключение благодарю А. И. Лурье за внимание и помощь в работе.

Поступила 12 I 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Валеев К. Г. К методу Хилла в теории линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 6.
2. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, ГИТТЛ, М., 1956 (стр. 353).
3. Якубович В. А. О динамической устойчивости упругих систем. ДАН СССР, 1958, т. 121, № 4.
4. Валеев К. Г. О решении и характеристических показателях решений некоторых систем линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 4.