Прикладная математика и механика. Том XXV, 1961
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

О ПОВЕДЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ КРИВЫХ В ОКРЕСТНОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ

В. И. Зубов

(Ленинград)

Статья содержит последовательность правил, позволяющих различать ту или иную качественную картину поведения интегральных кривых в окрестности периодического решения на плоскости.

1. Постановка задачи. Основные определения. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f_1(x, y), \quad \dot{y} = f_2(x, y) \tag{1.1}$$

Предположим, что система (1.1) обладает следующими свойствами:

а) функции $f_i(x, y)$ заданы в некоторой области G плоскости x, y, вещественны, непрерывны и дважды непрерывно дифференцируемы по своим аргументам;

б) существуют две непрерывно дифференцируемые вещественные периодические функции

$$x = \varphi_1(t), \quad y = \varphi_2(t) \tag{1.2}$$

периодические относительно t с общим периодом 2π, являющиеся решением системы (1.1), график M которого содержится внутри G.

Известно [1], что периодические решения по характеру строения их окрестности делятся, прежде всего, на изолированные и неизолированные.

Определение 1.1. Периодическое решение (1.2) системы (1.1) называется изолированным, если существует достаточно малая δ-окрестность $S(M, \delta) \subset G$ множества M, не содержащая графиков других периодических решений системы (1.1).

Изолированные периодические решения системы (1.1) называют предельными циклами. Различают три типа предельных циклов по характеру поведения интегральных кривых в их окрестности.

Обозначим через $\rho((x, y), M)$ расстояние от точки (x, y) до множества M.

Определение 1.2. Предельный цикл (1.2) называется:

1) устойчивым, если существует достаточно малая окрестность $S(M, \delta) \subset G$ такая, что все интегральные кривые системы (1.1), начинающиеся в $S(M, \delta)$, неограниченно приближаются к M при $t \to +\infty$. Иначе говоря, при $(x_0, y_0) \in S(M, \delta)$ величина $\rho((x, y), M) \to 0$ при $t \to +\infty$, где

$$x = x(t, x_0, y_0), \qquad y = y(t, x_0, y_0) \tag{1.3}$$

есть решение системы (1.1), график которого проходит через точку (x_0, y_0) при $t = 0$.

2) неустойчивым, если существует достаточно малая окрестность $S(M, \delta)$ такая, что при $(x_0, y_0) \in S(M, \delta)$ будет $\rho((x, y), M) \to 0$ при $t \to -\infty$;

3) полуустойчивым, если существует достаточно малая окрестность $S(M, \delta)$, которую M разбивает на две области S_1 и S_2, такие, что $\rho((x, y), M) \to 0$ при $t \to +\infty$, $(x_0, y_0) \in S_1$ и $\rho((x, y), M) \to 0$ при $t \to -\infty$, $(x_0, y_0) \in S_2$.

Во всех возможных картинах качественного поведения интегральных кривых в окрестности периодического решения (1.2) возникает вопрос об устойчивости по Ляпунову [2] этого периодического решения или о его условной устойчивости по Ляпунову. Задача статьи состоит в формулировке критериев, позволяющих различать тот или иной тип качественного поведения интегральных кривых, а также устанавливать случай устойчивости и неустойчивости по Ляпунову периодического решения (1.2).

2. Основная форма уравнений движения. Проведем через каждую точку графика M периодического решения (1.2) нормали и возьмем столь малую окрестность $S(M, \delta) \subset G$, чтобы отрезки нормалей, заключенные в ней, соответствующие разным точкам на M, не пересекались. Далее, отрезок нормали, проходящий через точку $(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$, заключенный в $S(M, \delta)$, будем обозначать через N_t. По теореме о непрерывности по начальным данным можно указать точку $(x_0, y_0) \in N_0$ такую, что решение (1.3) системы (1.1) будет находиться в $S(M, \delta)$ при $t \in [-T, T]$, где $T > 0$ выбрано произвольно. Зафиксируем выбранную точку (x_0, y_0). Построим отрезок нормали N_t, соответствующий достаточно малому $t > 0$, обозначим через

$$\tau = \tau(t) \tag{2.1}$$

первый момент пересечения графика решения (1.3), соответствующего фиксированным начальным данным $x_0 y_0$, с нормалью N_t при движении в положительном направлении $t \geqslant 0$. Введем в рассмотрении функции

$$z_1(t) = x(\tau(t), x_0, y_0) - \varphi_1(t), \qquad z_2(t) = y(\tau(t), x_0, y_0) - \varphi_2(t) \tag{2.2}$$

Рассмотрим функцию

$$H(z_1, z_2, t) = z_1 f_1(t) + z_2 f_2(t), \qquad (f_i(t) = f_i(\varphi_1(t), \varphi_2(t))) \tag{2.3}$$

Так как $z_1(t)$, $z_2(t)$ есть вектор, коллинеарный $\mathbf{N}_t$, то

$$H(z_1(t), z_2(t)) \equiv 0$$

Составим дифференциальные уравнения, решениями которых являются функции (2.1) и (2.2)

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{d\tau}{dt} \frac{dx(\tau(t), x_0, y_0)}{d\tau} - \frac{d\varphi_1}{dt}, \quad \frac{dz_2}{dt} = \frac{d\tau}{dt} \frac{dy(\tau(t), x_0, y_0)}{d\tau} - \frac{d\varphi_2}{dt} \tag{2.4}$$

$$\frac{d}{dt} H(z_1(t), z_2(t)) = \frac{dz_1(t)}{dt} f_1(t) + \frac{dz_2(t)}{dt} f_2(t) + z_1 \frac{df_1(t)}{dt} + z_2 \frac{df_2(t)}{dt} \equiv 0 \tag{2.5}$$

Используя (1.1), (2.2), (2.4) и (2.5), найдем

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{f_1^2(t) + f_2^2(t) - z_1 df_1(t)/dt - z_2 df_2(t)/dt}{f_1(t) f_1(z_1+\varphi_1, z_2+\varphi_2) + f_2(t) f_2(z_1+\varphi_1, z_2+\varphi_2)} \tag{2.6}$$

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{d\tau}{dt} f_1(z_1+\varphi_1, z_2+\varphi_2) - f_1(t),$$

$$\frac{dz_2}{dt} = \frac{d\tau}{dt} f_2(z_1+\varphi_1, z_2+\varphi_2) - f_2(t) \tag{2.7}$$

Соотношения (2.6) и (2.7), полученные нами для конкретных функций (2.1) и (2.2), можно рассматривать как систему дифференциальных уравнений для определения функций τ и z_1, z_2. Эта система обладает рядом важных свойств, полезных для решения поставленной задачи.

Лемма 2.1. Функция $H(z_1, z_2, t)$, определяемая соотношением (2.3), является интегралом системы (2.7).

Доказательство следует из непосредственного вычисления полной производной H в силу системы (2.7).

Следствие. Рассмотрим решение системы (2.7)

$$z_i = z_i(t, z_1^\circ, z_2^\circ, t_0) \qquad (i = 1,2) \tag{2.8}$$

и решение уравнения (2.6)

$$\tau = \tau(t, z_1^\circ, z_2^\circ, t_0) \tag{2.9}$$

определенные начальными условиями

$$z_i = z_i^\circ \text{ при } t = t_0, \qquad \tau = t_0 \text{ при } t = t_0.$$

По лемме 2.1 функция H, вычисленная на решении (2.8) системы (2.7), остается постоянной. Дадим геометрическое истолкование возникающей здесь ситуации.

Через точки графика M проведем направления так, чтобы направление ν_t, проходящее через точку $(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$, имело угол с касательной, косинус которого определяется формулой

$$\cos\psi_t = \frac{H(z_1, z_2, t)}{\sqrt{f_1^2(t) + f_2^2(t)}\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}$$

где z_1 и z_2 определяются из (2.8).

Утверждается, что решение (2.8) системы (2.7) определяет решение

$$\begin{aligned} x(\tau - t_0, x_0, y_0) &= z_1(t, z_1^\circ, z_2^\circ, t_0) + \varphi_1(t) \\ y(\tau - t_0, x_0, y_0) &= z_2(t, z_1^\circ, z_2^\circ, t_0) + \varphi_2(t) \end{aligned} \tag{2.10}$$

системы (1.1) с начальными данными $x_0 = z_1^\circ + \varphi_1(t_0)$, $y_0 = z_2^\circ + \varphi_2(t_0)$ при $t = t_0$ системы (1.1), вычисленное в момент пересечения его с направлением ν_t.

Действительно, дифференцируя обе части равенств (2.10) по t и используя уравнения (2.6) и (2.7), найдем, что функции x и y, как функции аргумента $\tau - t_0$, удовлетворяют системе (1.1). При этом решение (2.10) при $t = t_0$ проходит через точку (x_0, y_0), лежащую на направлении ν_{t_0}, а в момент t — проходит через точку, лежащую на направлении ν_t.

Приведенная выше лемма дает возможность понизить порядок системы (2.6), (2.7) путем использования ее интеграла H.

Введем новые искомые функции по формулам

$$\xi = z_1 f_2(t) - z_2 f_1(t), \qquad \eta = z_1 f_1(t) + z_2 f_2(t) \tag{2.11}$$

Обращая это преобразование, находим

$$z_1 = \frac{\xi f_2(t) + \eta f_1(t)}{f_1^2(t) + f_2^2(t)}, \quad z_2 = \frac{-\xi f_1(t) + \eta f_2(t)}{f_1^2(t) + f_2^2(t)} \tag{2.12}$$

Дифференцируя (2.11) в силу системы (2.6), (2.7), найдем

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{d\tau}{dt}[f_1(z_1 + \varphi_1(t), z_2 + \varphi_2(t)) f_2(t) - f_2(z_1 + {}$$
$$+ \varphi_1(t), z_2 + \varphi_2(t)) f_1(t)] + \frac{z_1 df_2(t)}{dt} - \frac{z_2 df_1(t)}{dt} \tag{2.13}$$
$$\frac{d\eta}{dt} = 0$$

Учитывая, что величина η остается постоянной и имея в виду поведение решений системы (1.1), начинающихся на N_0, можно положить $\eta \equiv 0$, что ни в коей мере не ограничивает общности поставленной в п. 1 задачи. Учитывая это соображение, исключим функции z_1 и z_2, определяемые равенствами (2.12), из уравнений (2.6) и (2.13).

Тогда получим систему

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{f_1^2(t) + f_2^2(t) - (a_1^\circ df_1(t)\, dt + a_2^\circ df_2(t)\,/\,dt)\ \xi}{f_1(t) f_1(a_1^\circ\xi + \varphi_1, a_2^\circ\xi + \varphi_2) + f_2(t) f_2(a_1^\circ\xi + \varphi_1, a_2^\circ\xi + \varphi_2)} \tag{2.14}$$

$$\frac{d\xi}{dt} = [f_1(a_1^\circ\xi + \varphi_1(t), a_2^\circ\xi + \varphi_2(t)) f_2(t) - f_2(a_1^\circ\xi + \varphi_1(t), a_2^\circ\xi + \varphi_2(t)) f_1(t)] \times$$
$$\times \frac{[f_1^2(t) + f_2^2(t) - (a_1^\circ df_1(t)\,/\,dt + a_2^\circ df_2(t)\,/\,dt)\ \xi]}{[f_1(t) f_1(a_1^\circ\xi + \varphi_1, a_2^\circ\xi + \varphi_2) + f_2(t) f_2(a_1^\circ\xi + \varphi_1, a_2^\circ\xi + \varphi_2)]} +$$
$$+ \left[a_1^\circ \frac{df_2(t)}{dt} - a_2^\circ \frac{df_1(t)}{dt}\right]\xi \tag{2.15}$$

где

$$a_1^\circ = \frac{f_2(t)}{f_1^2(t) + f_2^2(t)}, \qquad a_2^\circ = -\frac{f_1(t)}{f_1^2(t) + f_2^2(t)}$$

Обозначим правую часть (2.14) через $F(\xi, t)$, правую часть (2.15) через $G(\xi, t)$. Положим в уравнении (2.14) $\tau = \theta + t$. Тогда получим для определения функции θ уравнение

$$d\theta\,/\,dt = F(\xi, t) - 1 \tag{2.16}$$

Это уравнение совместно с уравнением $d\xi\,/\,dt = F(\xi, t)$ называем основной формой уравнений движения.

Теорема 2.1. Для того чтобы периодическое решение системы (1.1) было устойчивым по Ляпунову, необходимо и достаточно, чтобы нулевое решение $\theta = 0$, $\xi = 0$ системы (2.15), (2.16) было устойчивым по Ляпунову.

Доказательство. Необходимость. Пусть периодическое решение $x = \varphi_1(t)$, $y = \varphi_2(t)$ системы (1.1) устойчиво по Ляпунову, т. е. для каждого фиксированного t_0 по любому $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta(\varepsilon)$ такое, что при $\sqrt{(x_0 - \varphi_1(t_0)^2) + (y_0 - \varphi_2(t_0))^2} < \delta$ будет $\sqrt{(x - \varphi_1(t))^2 + (y - \varphi_2(t))^2} <$ $< \varepsilon$ при $t \geqslant t_0$, где x, y — решение системы (1.1) с начальными условиями x_0, y_0 при $t = t_0$.

Рассмотрим решение

$$\xi = \xi(t, \xi_0, t_0), \qquad \theta = \theta(t, \xi_0, \theta_0, t_0) \tag{2.17}$$

системы (2.15), (2.16) с начальными условиями ξ_0, θ_0 при $t = t_0$.

Решение (2.17) можно представить через решение системы (1.1) следующим образом.

Пусть $\tau(t, x_0, y_0, t_0)$ есть однозначная непрерывная функция, значения которой дает момент пересечения решения $x(t - t_0, x_0, y_0)$, $y(t - t_0, x_0, y_0)$ системы (1.1) с направлением N_t при условии, что начальная точка (x_0, y_0) находится на направлении N_{t_0}.

Тогда функции

$$\xi = f_2(t)\,[x(\tau - t_0, x_0, y_0) - \varphi_1(t)] - f_1(t)\,[y(\tau - t_0, x_0, y_0) - \varphi_2(t)] \tag{2.18}$$

$$\theta = \theta_0 + \tau - t$$

будут давать решение системы (2.15), (2.16) с начальными условиями

$$\xi = \xi_0 = f_2(t_0)\,[x_0 - \varphi_1(t_0)] - f_1(t_0)\,[y_0 - \varphi_2(t_0)], \ \theta = \theta_0 \quad \text{при } t = t_0 \tag{2.19}$$

Ближайшая цель состоит в том, чтобы оценить величину $\tau - t$.

Пусть L — длина замкнутой кривой M. Разобъем M точками $A_0, \ldots, A_{n-1}$ на n равных дуг. На дуге $[A_j, A_{j+1}]$ построим точку B_j так, чтобы окружность с центром в B_j проходила через точки A_j, A_{j+1}, $(A_n = A_0)$. Пусть

$$v = \inf_{t \in [0, 2\pi]} \sqrt{f_1^2(t) + f_2^2(t)} \qquad (t \in [0, 2\pi])$$

Тогда, если обозначить через t_j временную длину дуги $[A_j, A_{j+1}]$, будем иметь

$$t_j \leqslant L / nv$$

Будем придавать различные положения точке A_0 на кривой M. Тогда из принципа выбора [3] будет существовать нижняя грань $\rho_0 > 0$ радиусов, получающихся при этом всевозможных окружностей. Внутри каждой из таких окружностей построим концентрические окружности радиуса $\alpha < \rho_0$. Можно выбрать столь малое $\alpha_0 > 0$, что все круги радиуса α_0 с центрами в точках B_j при любом фиксированном положении A_0 не пересекутся между собой. При этом α_0, ρ_2 и t_j стремятся к нулю при $n \to \infty$.

Пусть для определенности на некотором участке $\tau < t$. Выбрав A_0 так, чтобы $B_0 \in N_t$, и взяв α_0 в качестве ε, рассмотрим момент $t + t^\circ$, где t° — временная длина дуги $[B_0, B_1]$.

В момент $t + t^\circ$ будет иметь место неравенство

$$\sqrt{[x(t + t^\circ - t_0, x_0, y_0) - \varphi_1(t + t^\circ)]^2 + [y(t + t^\circ - t_0, x_0, y_0) - \varphi_2(t + t^\circ)]^2} < \alpha$$

Но тогда на промежутке $[t, t + t^\circ]$ решение системы (1.1) пересечет направление N_t. Следовательно, $t - \tau \leqslant t^\circ \leqslant 2L / nv$. Отсюда в общем случае будет иметь место неравенство

$$|\tau - t| < 2L / nv \tag{2.20}$$

Далее можно установить, что решение системы (1.1)

$$x(t-t_0, x_0, y_0), \qquad y(t-t_0, x_0, y_0)$$

равномерно непрерывно при $t \geqslant t_0$.

Действительно, в силу устойчивости это решение погружено при $t \geqslant t_0$ в $S(M, \varepsilon)$. При достаточно малом ε dx/dt и dy/dt ограничены в $S(M, \varepsilon)$ при $t \geqslant t_0$ одним и тем же числом, что и показывает справедливость сделанного утверждения.

Оценим теперь функции ξ и θ

$$|\xi| \leqslant |f_2(t)|\,|x(t-t_0, x_0, y_0) - \varphi_1(t)| + |f_1(t)|\,|y(t-t_0, x_0, y_0) - \varphi_2(t)| +$$
$$+ |f_2(t)|\,|x(\tau - t_0, x_0, y_0) - x(t-t_0, x_0, y_0)| + |f_1(t)|\,|y(\tau - t_0, x_0, y_0) -$$
$$- y(t-t_0, x_0, y_0)|, \quad |\theta| \leqslant |\theta_0| + |\tau - t|$$

Из установленного выше и из предыдущих неравенств следует, что при достаточно малых $|\xi_0|$ и $|\theta_0|$ величины $|\xi|$ и $|\theta|$ будут сколь угодно малы при $t \geqslant t_0$, что и завершает доказательство необходимости.

Достаточность. Пусть нулевое решение системы (2.15), (2.16) устойчиво. Покажем тогда, что периодическое решение (1.2) системы (1.1) устойчиво по Ляпунову.

Действительно, возьмем точку $(x_0, y_0) \in S(M, \delta)$, где δ — достаточно малое положительное число, и t_0 так, чтобы

$$\sqrt{[x_0 - \varphi_1(t_0)]^2 + [y_0 - \varphi_2(t_0)]^2} < \delta_1$$

Выберем далее t_0° так, чтобы направление $N_{t_0^\circ}$ содержало точку (x_0, y_0). Построим решение системы (2.15), (2.16)

$$\xi = \xi(t, \xi_0, t_0^\circ), \qquad \theta = \tau(t, \xi_0, t_0^\circ) - t$$

Ясно, что если δ_1 достаточно мало, то и $|\xi_0|$, $|t_0 - t_0^\circ|$ сколь угодно малы. Тогда и $|\xi|$ и $|\theta|$ также сколь угодно малы, а следовательно, малы величины

$$|x(\tau - t_0^\circ, x_0, y_0) - \varphi_1(t)|, \qquad |y(\tau - t_0^\circ, x_0, y_0) - \varphi_2(t)| \tag{2.21}$$

при $t \geqslant t_0^\circ$.

Из равномерной непрерывности функций $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ вытекает малость выражений

$$\varphi_i(\tau - t_0^\circ + t_0) - \varphi_i(t) \qquad \text{при } t \geqslant t_0^\circ, \quad i = 1,2 \tag{2.22}$$

Сопоставляя сказанное выше и учитывая (2.21) и (2.22), найдем, что

$$|x(t-t_0, x_0, y_0) - \varphi_1(t)|, \qquad |y(t-t_0, x_0, y_0) - \varphi_2(t)|$$

сколь угодно малы при $t \geqslant t_0$, если δ_1 достаточно мало, что и завершает доказательство достаточности.

Замечание. Замкнутая кривая M разбивает свою окрестность $S(M, \delta)$ на две области S_1 и S_2. Можно подставить вопрос об устойчивости по Ляпунову периодического решения (1.2) системы (1.1) при условии, что начальные возмущения (x_0, y_0) принадлежат одной из областей S_1 или S_2. Вопрос о таком роде условной устойчивости по Ляпунову сводится к вопросу об условной устойчивости по Ляпунову нулевого решения системы (2.15), (2.16) при условии $\xi > 0$ или $\xi < 0$. Это утверждение следует из доказательства теоремы 2.1.

Теорема 2.2. Всякому периодическому решению системы (1.1), расположенному в достаточно малой окрестности M, отвечает 2π-периодическое решение уравнения (2.15) и других периодических решений, расположенных в соответствующей достаточно малой окрестности точки $\xi = 0$, уравнение (2.15) не имеет.

Доказательство. Пусть в окрестности $S(M, \delta)$ множества M расположен график периодического решения $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ системы (1.1) периода T.

Обозначим через (ψ_1^2, ψ_2^0) точку пересечения графика этого решения с направлением N_0 и положим

$$\xi_0 = f_2(0)\,[\psi_1^0 - \varphi_1(0)] - f_1(0)\,[\psi_2^0 - \varphi_2(0)]$$

Покажем, что $\xi = \xi(t, \xi_0, 0)$ есть 2π-периодическое решение уравнения (2.15). Уравнение для величины τ, соответствующей периодическому решению $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, можно записать в форме

$$d\tau/dt = f(\psi_1(\tau), \quad \psi_2(\tau), \ t) \tag{2.23}$$

Уравнение (2.23) получается из (2.14), если заменить в нем ξ по формуле

$$\xi = f_2(t)\,[\psi_1(\tau) - \varphi_1(t)] - f_1(t)\,[\psi_2(\tau) - \varphi_2(t)] \tag{2.24}$$

Правая часть уравнения (2.23) является периодической функцией по t периода 2π и по τ периода T. Обозначим через $\tau(t)$ решение уравнения (2.23) с начальным условием $\tau = 0$ при $t = 0$.

Из геометрических соображений ясно, что $\tau(2\pi) = T$. Простой проверкой убеждаемся, что функция $\tau(t + 2\pi) - T$ является решением (2.23) с тем же начальным условием, что и $\tau(t)$. Отсюда в силу единственности имеем, $\tau(t + 2\pi) = \tau(t) + T$.

Последнее соотношение показывает, что функция ξ, определяемая формулой (2.24), является 2π-периодической.

Если предположить теперь, что уравнение (2.15) имеет периодическое решение, то имеет место одна из двух возможностей: либо на N_0 два последовательных значения ξ совпадают, либо такого совпадения не происходит. В первом случае ξ будет являться 2π-периодическим решением, соответствующим периодическому решению системы (1.1), во втором случае ξ будет описывать спиралевидное движение и поэтому не может быть периодическим движением системы (2.15).

3. Аналитический случай. Предположим, что правые части системы (1.1) являются аналитическими по x, y в достаточно малой окрестности M. Тогда уравнения (2.15), (2.16) можно представить в виде

$$\frac{d\theta}{dt} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t)\,\xi^k, \qquad \frac{d\xi}{dt} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t)\,\xi^k \tag{3.1}$$

при этом ряды в (3.1) сходятся при $|\xi| < r$, $r > 0$.

Вычисления показывают, что

$$b_1(t) = \frac{\partial f_1(\varphi_1(t), \varphi_2(t))}{\partial x} + \frac{\partial f_2(\varphi_1(t), \varphi_2(t))}{\partial y} +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\ln[f_1^2(t) + f_2^2(t)] \tag{3.2}$$

Положим

$$G_1 = \int_0^{2\pi} b_1(t)\,dt = \int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial f_1(\varphi_1(t), \varphi_2(t))}{\partial x} + \frac{\partial f_2(\varphi_1(t), \varphi_2(t))}{\partial y}\right]dt \tag{3.3}$$

Известно, что [4] при $G_1 < 0$ периодическое решение (1.2) системы (1.1) является устойчивым предельным циклом и притом устойчиво по Ляпунову, при $G_1 > 0$ является неустойчивым предельным циклом и притом устойчиво по Ляпунову при $t \to -\infty$.

Дадим решение вопроса при $G_1 = 0$. Сделаем в уравнениях (3.1) замену

$$\xi = \eta \exp\int_0^t b_1(t)\,dt \tag{3.4}$$

Тогда получим

$$\frac{d\theta}{dt} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^0(t)\,\eta^k, \qquad \frac{d\eta}{dt} = \sum_{k=2}^{\infty} b_k^0(t)\,\eta^k \tag{3.5}$$

Будем искать решение второго уравнения (3.5) в виде

$$\eta = c + g_2(t)\,c^2 + \ldots + g_k(t)\,c^k + \ldots \tag{3.6}$$

где $g_k(t)$ $(k = 2, 3, \ldots)$ — периодические функции периода 2π, подлежащие определению, а c — произвольная постоянная.

Подставляя (3.6) в (3.5) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях c, получим

$$dg_k/dt = r_k \qquad (k = 2, 3, \ldots) \tag{3.7}$$

Если $g_2, \ldots, g_{k-1}$ определились, как периодические функции, то g_k будет также периодической функцией, если

$$\int_0^{2\pi} r_k dt = G_k = 0$$

Предположим, что впервые $G_m \neq 0$ при $m \geqslant 2$. Зафиксируем это значение m. Будем далее искать решение первого уравнения (3.5) в виде

$$\theta = \sum_{k=1}^{\infty} h_k(t)\,\eta^k \tag{3.8}$$

Подставляя (3.8) в (3.5) и приравнивая при одинаковых степенях η, находим

$$dh_k/dt = P_k \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{3.9}$$

Если $h_1, \ldots, h_{k-1}$ найдены и вышли периодическими, то при

$$\int_0^{2\pi} P_k dt = F_k = 0$$

будет также периодической h_k.

Предположим, что существует число $l \geqslant 1$, что впервые $F_l \neq 0$. Зафиксируем это значение l.

Теорема 3.2. 1) Если m нечетное и $G_m < 0$, то периодическое решение (1.2) системы (1.1) является устойчивым предельным циклом. Если, кроме того, $l+1 > m$, то это периодическое решение будет устойчивым по Ляпунову, а при $l+1 \leqslant m$ неустойчивым по Ляпунову.

2) Если m нечетное и $G_m > 0$, то периодическое решение (1.2) системы (1.1) является неустойчивым предельным циклом. Если, кроме того, $l+1 > m$, то это периодическое решение устойчиво по Ляпунову при $t \to -\infty$, а при $l+1 \leqslant m$ неустойчиво по Ляпунову.

3) Если m четное, то периодическое решение (1.2) системы (1.1) является полуустойчивым предельным циклом. Кроме того, если $l+1 > m$, то это периодическое решение условно устойчиво по Ляпунову в том направлении, в каком интегральные кривые системы (1.1) неограниченно приближаются к M. Если же $l+1 \leqslant m$, то условная устойчивость такого рода не имеет места.

Доказательство. Сделаем замену

$$\eta = Z + \sum_{k=2}^{m-1} g_k Z^k + (g_m - G_m t) Z^m, \qquad \theta = \sigma + \sum_{k=1}^{l-1} h_k \eta^k + (h_l - F_l t)\, \eta^l \tag{3.10}$$

Тогда получим для определения функций Z и σ уравнения

$$\dot{Z} = G_m Z^m + \sum_{k=m+1}^{\infty} C_k(t) Z^k, \qquad \dot{\sigma} = F_l Z^l + \sum_{k=l+1}^{\infty} d_k(t) Z^k \tag{3.11}$$

Без ограничения общности можно считать, что поведение решений изучается при $Z > 0$.

Если рассмотреть сначала систему первого приближения

$$d\sigma/dt = F_l Z^l, \qquad dZ/dt = G_m Z^m \tag{3.12}$$

то ее непосредственное интегрирование приводит к формулам

$$Z = Z_0 \{1 + [1 - m] G_m Z_0^{m-1} t\}^{\frac{1}{1-m}}$$

$$\sigma \underset{l \neq m-1}{=} \sigma_0 + \frac{F_l}{(1-m) G_m Z_0^{m-1}} \frac{(m-1) Z_0^l}{(m-l-1)} \{[1 + (1-m) G_m Z_0^{m-1} t]^{\frac{m-l-1}{m-1}} - 1\}$$

При $l = m - 1$

$$\sigma = \sigma_0 + \ln [1 + (1-m) G_m Z_0^{m-1} t] \frac{F_l}{(1-m) G_m Z_0^{m-1}}$$

Из этих формул следует справедливость утверждений, сделанных в теореме 3.1, так как влияние отброшенных членов не является существенным.

Действительно, полагая $Z = Z_0$ при $t = 0$ получим из (3.11)

$$\sigma = \sigma_0 + \int_{Z_0}^{Z} Z^{l-m} \frac{F_l + \dots}{G_m + \dots} dZ \tag{3.13}$$

При всех $Z \leqslant r_0$, где r_0 достаточно малое положительное число, будет выполняться неравенство

$$a \leqslant \frac{F_l + \ldots}{G_m + \ldots} \leqslant b \tag{3.14}$$

где a и b постоянные числа, $ab > 0$.

Из (3.13) и (3.14) имеем при $Z \leqslant r_0$

$$\sigma_0 + \frac{a}{l-m+1}[Z^{l-m+1} - Z_0^{l-m+1}] \leqslant \sigma \leqslant \sigma_0 + \\ + \frac{b}{l-m+1}[Z^{l-m+1} - Z_0^{l-m+1}] \tag{3.15}$$

для $l - m + 1 \neq 0$.

При $l - m + 1 = 0$ будет

$$\sigma_0 + a \ln \frac{Z}{Z_0} \leqslant \sigma \leqslant \sigma_0 + b \ln \frac{Z}{Z_0} \tag{3.16}$$

Число r_0 можно выбрать столь малым, что при $Z \leqslant r_0$ будет

$$CZ^m \leqslant G_m Z^m + \ldots \leqslant dZ^m, \qquad cd > 0 \tag{3.17}$$

Интегрируя неравенство

$$CZ^m \leqslant \frac{dZ}{dt} \leqslant dZ^m$$

получим

$$Z_0\{1 + (1-m)\, dZ_0^{m-1} t\}^{\frac{1}{1-m}} \leqslant Z \leqslant Z_0\{1 + (1-m)\, cZ_0^{m-1}\}^{\frac{1}{1-m}} \tag{3.18}$$

Неравенства (3.18) имеют место до тех пор, пока $Z \leqslant r_0$. Неравенства (3.15), (3.16), (3.18) непосредственно приводят к доказательству теоремы в общем случае.

Теорема 3.2. Если при любом m оказывается $G_m = 0$, то в достаточно малой окрестности периодического решения (1.2) системы (1.1) через каждую точку проходит периодическое решение системы (1.1).

При этом, если оказывается $F_l = 0$ при любом l, то периодическое решение (1.2) является устойчивым по Ляпунову.

Если же существует хотя бы одно l такое, что $F_l \neq 0$, то периодическое решение (1.2) не будет устойчивым по Ляпунову.

Доказательство. Если $G_m = 0$ при $m \geqslant 2$, то все члены ряда (3.6) являются периодическими функциями. Если

$$g_k = \int_0^t r_k dt$$

то ряд (3.6) будет сходящимся [5] при $|c| \leqslant c_0$, как ряд, расположенный по начальным данным. Следовательно, ряд при каждом c с модулем $|c| \leqslant C_0$ определяет периодическое решение. Кроме того, при $F_l = 0$, $l \geqslant 1$ будет иметь место равенство (3.8), в котором $h_k(t)$ будут 2π-периодическими функциями и ряд в правой части является сходящимся при $h \leqslant h_0$. Отсюда вытекает, что каждое периодическое решение системы (1.1), расположенное в достаточно малой окрестности M, имеет период 2π. Если же $F_l \neq 0$ при некотором l, то по теореме 2.1 можно заключить о факте неустойчивости по Ляпунову периодического решения (1.2) системы (1.1).

Теорема 3.3. Если в достаточно малой окрестности M правые части системы (1.1) аналитичны по x, y, то периодическое решение (1.2) системы (1.1) либо является предельным циклом, либо через каждую точку ее достаточно малой окрестности $S(M, \delta)$ проходит периодическое решение системы (1.1).

Доказательсто вытекает непосредственно из теорем 3.1 и 3.2.

4. **Замечания общего характера.** В этом пункте приведем лишь замечания общего характера, не проводя подробных доказательств утверждений.

4.1. Если правые части системы (1.1) n раз непрерывно дифференцируемы по своим аргументам, то такими же свойствами будут обладать правые части уравнений (2.15), (2.16).

Если применить формулу Тейлора для представления правых частей, а затем отбросить остаточные члены, получим систему уравнений для определения θ и ξ с полиномиальными правыми частями (в правых частях будут стоять полиномы, но с периодическими коэффициентами). Если при применении к этим уравнениям теоремы 3.1 оказалось, что $m < n$, или $m > n$ и $l < n$, то все выводы теоремы 2.1 остаются справедливыми для исходной системы (1.1).

4.2. Применение теоремы 3.1, точнее идей, содержащихся в ее доказательстве, позволяют получить продвижение более глубокое по сравнению с обычными результатами для систем, содержащих малый параметр, и даже, когда само решение (1.2) и ее период зависят от этого параметра.

4.3. Общий случай может быть охвачен рассмотрением корней уравнения

$$\psi(\xi_0) = 0$$

где

$$\psi = \xi(2\pi;\ \xi_0,\ 0) - \xi_0, \qquad |\xi_0| < \delta, \qquad \delta > 0 \text{ — достаточно мало.}$$

Поступила 17 X 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.— Л., ГИТТЛ, 1949.
2. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.— Л., ГИТТЛ, 1950.
3. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. ГИТТЛ, 1947, т. 1.
4. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. Физматгиз, 1959.
5. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.— Л., Гостоптехиздат, 1947.