**Прикладная математика и механика. Том XXV, 1961**
**Отделение технических наук Академии наук Союза ССР**

# ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

**Ю. П. Пытьев**
(Москва)

**1. Основные положения.** Рассмотрим уравнение

$$y'' + (a - \Phi(q, \xi))\, y = 0, \qquad \Phi(q,\xi) = \Phi(q, \xi + \pi), \qquad \int_0^\pi \Phi d\xi = 0 \qquad (1.1)$$

Теория Флоке [1-3] для уравнений такого вида приводит к следующему. Пусть известна фундаментальная система решений $y_1(\xi)$ и $y_2(\xi)$, тогда

$$Y_1(\xi) = y_1(\xi + \pi) = a_{11} y_1(\xi) + a_{12} y_2(\xi)$$
$$Y_2(\xi) = y_2(\xi + \pi) = a_{21} y_1(\xi) + a_{22} y_2(\xi)$$

есть также фундаментальная система, и $C_i$ можно определить таким образом, что $X(\xi) = C_1 Y_1(\xi) + C_2 Y_2(\xi)$ удовлетворяет соотношению $X(\xi + \pi) = \rho X(\xi)$, где $\rho$ определяется из условий

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \rho & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \rho \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 1$$

так что

$$\rho = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1}, \qquad \alpha = \alpha(a, q) = (a_{11} + a_{22}) / 2$$

Рассмотрим три возможных случая.

1°. Неравенства $-1 < \alpha < 1$ определяют на плоскости $aq$ область, где решения имеют вид

$$X_1(\xi) = \psi_1(\xi) \cos\frac{\theta}{2\pi} - \psi_2(\xi) \sin\frac{\theta}{2\pi}$$
$$X_2(\xi) = \psi_2(\xi) \cos\frac{\theta}{2\pi} + \psi_1(\xi) \sin\frac{\theta}{2\pi}$$
$$\psi_i(\xi) = \psi_i(\xi + \pi), \qquad \theta = \operatorname{arc\,tg}\frac{(1 - \alpha^2)^{1/2}}{\alpha}$$

2°. В случае $|\alpha| = 1$ на плоскости $aq$ определяются линии, вдоль которых решения имеют период $\pi$ или $2\pi$

$$X(\xi + \pi) = \pm X(\xi)$$

3°. Наконец, неравенствами $\alpha > 1$, $\alpha < -1$ на плоскости $aq$ определяется область, в которой решения могут быть представлены так:

$$X_{1,2} = \exp\left(\frac{\beta_{1,2}}{2\pi}\xi\right) L_{1,2}(\xi), \qquad L_{1,2}(\xi + \pi) = L_{1,2}(\xi), \qquad \beta_{1,2} = \ln|\alpha \pm (\alpha^2 - 1)^{1/2}|$$

Нетрудно видеть, что в первом случае решения невозрастающие, в третьем —неустойчивые в смысле Ляпунова, и область $|\alpha| < 1$ является областью устойчивости исходного уравнения. Кривые $|\alpha| = 1$ в плоскости $aq$ определяют границы области устойчивости.

Ниже проводится исследование границ областей устойчивости уравнения (1.1), периодических решений вдоль этих границ, а также исследование периодических решений в области устойчивости.

**2. Построение и свойства границ областей устойчивости.** Пусть в уравнении (1.1)

$$\Phi(q, \xi) = \sum_{\nu=1} \Phi_\nu(\xi) q^\nu$$

Уравнение границы области устойчивости $|\alpha| = 1$ будем искать в виде

$$a(q) = \sum_{\mu=0} a_\mu q^\mu \tag{2.1}$$

Тогда решение вдоль искомой границы будет иметь вид

$$y(\xi) = \sum_{\nu=0} y_\nu(\xi) q^\nu \tag{2.2}$$

Здесь $y_\nu(\xi)$ определяются системой уравнений

$$y_\mu'' + \sum_{\nu=0}^{\mu} (a_\nu - \Phi_\nu) y_{\mu-\nu} = 0, \qquad \Phi_0 = 0 \tag{2.3}$$

которая получается в результате подстановки (2.1) и (2.2) в (1.1). Требование $y_\nu(\xi + 2\pi) = y_\nu(\xi)$ должно определять уравнение (2.1) искомой границы, а также периодическое решение (2.2) вдоль нее. Условие периодичности удовлетворяется автоматически, если решение системы (2.3) искать в форме

$$y_\mu = 2\sum_{p=0} (y_{\mu p}^+ \cos p\xi + y_{\mu p}^- \sin p\xi) \tag{2.4}$$

Пусть, кроме того

$$\Phi_\nu = 2\sum_{p=1} (\varphi_{\nu p}^+ \cos 2p\xi + \varphi_{\nu p}^- \sin 2p\xi) \tag{2.5}$$

Тогда подстановка (2.4) и (2.5) в (2.3) приводит к следующей системе уравнений относительно $y_{\mu p}$ и $a_\nu$

$$\sum_{\nu=1}^{\mu} \sum_{p=1} \sum_{q=0} \{\varphi_{\nu p}^+ y_{\mu-\nu,q}^- [\delta_{2p+q,m} - \delta_{2p-q,m} + \delta_{2p-q,-m}] + \tag{2.6}$$

$$+ \varphi_{\nu p}^- y_{\mu-\nu,q}^+ [\delta_{2p+q,m} + \delta_{2p-q,m} - \delta_{2p-q,-m}]\} = \sum_{\nu=0}^{\mu} [a_\nu - m^2 \delta_{\nu 0}] y_{\mu-\nu,m}^-$$

$$\sum_{\nu=1}^{\mu} \sum_{p=1} \sum_{q=0} \{\varphi_{\nu p}^+ y_{\mu-\nu,q}^+ [\delta_{2p+q,m} + \delta_{2p-q,m} + \delta_{2p-q,-m}] +$$

$$+ \varphi_{\nu p}^- y_{\mu-\nu,q}^- [\delta_{2p-q,m} - \delta_{2p+q,m} + \delta_{2p-q,-m}]\} = \sum_{\nu=0}^{\mu} [a_\nu - m^2 \delta_{\nu 0}] y_{\mu-\nu,m}^+$$

Здесь $\delta_{mn}$ — символ Кронекера. Введем обозначения

$$P_{\nu q m}^{\pm} = \pm \varphi_{\nu,(m+q)/2}^+ + \varphi_{\nu,(m-q)/2}^+ + \varphi_{\nu,(q-m)/2}^+ \tag{2.7}$$

$$Q_{\nu q m}^{\pm} = \varphi_{\nu,(m+q)/2}^- \pm \varphi_{\nu,(m-q)/2}^- \mp \varphi_{\nu,(q-m)/2}^-$$

В новых обозначениях систему (2.6) можно записать более компактно в виде

$$\sum_{\nu=1}^{\mu}\sum_{q=0}[Q^{\mp}_{\nu qm}y^{\pm}_{\mu-\nu,q}+P^{\pm}_{\nu qm}y^{\pm}_{\mu-\nu,q}]=\sum_{\nu=0}^{\mu}[a_\nu-m^2\delta_{\nu,0}]\,y^{\pm}_{\mu-\nu,m} \tag{2.8}$$

Относительно введенных величин (2.7) заметим следующее:

а) Так как в (2.5) суммирование начинается с единицы, то $\varphi^{\pm}_{\nu k}=0$ при $k\leqslant 0$; следовательно, в выражениях справа одновременно не могут присутствовать $\varphi^{\pm}_{\nu,(m-q)/2}$ и $\varphi^{\pm}_{\nu,(q-m)/2}$.

б) Выражения справа обращаются в нуль, если $m+q$, а следовательно, и $m-q$, $q-m$ — нечетные, так что суммирование по $q$ должно фактически вестись в (2.8) по четным индексам, если $m$ — четное и по нечетным, если $m$ — нечетное. Таким образом,

$$P^{\pm}_{\nu qm}=Q^{\pm}_{\nu qm}=0\qquad(q+m=2l+1,\ l=0,1,\dots)$$

Рассмотрим решения полученной системы (2.8). Полагая $\mu=0$, приходим к следующим равенствам

$$[a_0-m^2]\,y^{\pm}_{0m}=0$$

которые нетривиально разрешимы относительно $y^{\pm}_{0m}$ лишь при $a_0=n^2$ ($n$ — целое). Пусть $a_0=n^2\neq 0$. Тогда $y^{\pm}_{0m}=0$, $m\neq n$ и величины $y^{\pm}_{0n}$ — произвольны. Полагая далее $\mu=1$, получаем систему уравнений

$$P^{\pm}_{1nm}y^{\pm}_{0n}+Q^{\mp}_{1nm}y^{\mp}_{0n}=a_{1n}y^{\pm}_{0m}+(n^2-m^2)\,y^{\pm}_{1m}$$

Отсюда следует, что

$$y^{\pm}_{1m}=\frac{1}{n^2-m^2}[P^{\pm}_{1nm}y^{\pm}_{0n}+Q^{\mp}_{1nm}y^{\mp}_{0n}]\qquad(n\neq m) \tag{2.9}$$

Для значения $m=n$ получаем условия, определяющие $y^{\pm}_{0n}$ и $a_{1n}$

$$[P^{\pm}_{1nn}-a_{1n}]y^{\pm}_{0n}+Q^{\mp}_{1nn}y^{\mp}_{0n}=0 \tag{2.10}$$

Система (2.10) допускает нетривиальное решение, если

$$\begin{vmatrix} Q^{+}_{1nn} & P^{-}_{1nn}-a_{1n}\\ P^{+}_{1nn}-a_{1n} & Q^{-}_{1nn}\end{vmatrix}=0$$

Предполагая, что

$$\begin{vmatrix} Q^{+}_{1nn} & P^{-}_{1nn}\\ P^{+}_{1nn} & Q^{-}_{1nn}\end{vmatrix}=[\varphi^{+}_{1n}]^2+[\varphi^{-}_{1n}]^2\neq 0 \tag{2.11}$$

и, заметив, что $P^{+}_{1nn}+Q^{-}_{1nn}=0$, находим

$$a^{j}_{1n}=(-1)^j\begin{vmatrix} Q^{+}_{1nn} & P^{-}_{1nn}\\ P^{+}_{1nn} & Q^{-}_{1nn}\end{vmatrix}^{1/2}\qquad(j=1,2) \tag{2.12}$$

после чего с точностью до произвольного множителя определяются $y^{\pm}_{0n}$ (индекс $j$ введен для обозначения двух возможных решений системы (2.10)). Из (2.9) также с точностью до произвольного множителя определяются $y^{j\pm}_{1m}$; $y^{j\pm}_{1n}$ остаются произвольными.

Полагая $\mu=2$, приходим к следующей системе

$$\sum_q[Q^{\pm}_{1qm}y^{j\pm}_{1q}+P^{\mp}_{1qm}y^{j\mp}_{1q}+Q^{\pm}_{2qm}y^{j\pm}_{0q}+ \tag{2.13}$$

$$+P^{\mp}_{2qm}y^{j\mp}_{0q}]=a^{j}_{1n}y^{j\mp}_{1m}+a^{j}_{2n}y^{j\mp}_{0m}+(n^2-m^2)\,y^{j\mp}_{2m}.$$

Отсюда при $m \neq n$ получаем

$$y_{2m}^{j\pm} = \frac{1}{n^2 - m^2}\left\{\sum_{\nu=1}^{2}\sum_{q}\left[P_{\nu q m}^{\pm} y_{2-\nu,q}^{j\pm} + Q_{\nu q m}^{\mp} y_{2-\nu,q}^{j\mp}\right] - a_{1n}^{j} y_{1m}^{j\pm}\right\}$$

Здесь справа стоят известные величины, за исключением $y_{1n}^{j\pm}$, для определения которых, а также и $a_{2n}^{j}$, можно получить уравнения, полагая $m = n$

$$\sum_{\nu=1}^{2}\sum_{q}\left[Q_{\nu q m}^{\pm} y_{2-\nu,q}^{j\pm} + P_{\nu q m}^{\mp} y_{2-\nu,q}^{j\mp}\right] = \sum_{\nu=1}^{2} a_{\nu n}^{j} y_{2-\nu,n}^{j\mp}$$

Перепишем полученную систему, выделяя неизвестные в явной форме

$$\begin{aligned} &Q_{1nn}^{+} y_{1n}^{j+} + \left[P_{1nn}^{-} - a_{1n}^{j}\right] y_{1n}^{j-} - a_{2n}^{j} y_{0n}^{j-} = -\left[Q_{2nn}^{+} y_{0n}^{j+} + \ldots\right] \\ &\left[P_{1nn}^{+} - a_{1n}^{j}\right] y_{1n}^{j+} + Q_{1nn}^{-} y_{1n}^{j-} - a_{2n}^{j} y_{0n}^{j+} = -\left[P_{2nn}^{+} y_{0n}^{j+} + \ldots\right] \end{aligned} \qquad (2.14)$$

В этой системе

$$\Delta\left(y_{1n}^{j\pm}\right) = \begin{vmatrix} Q_{1nn}^{+} & P_{1nn}^{-} - a_{1n}^{j} \\ P_{1nn}^{+} - a_{1n}^{j} & Q_{1nn}^{-} \end{vmatrix} = 0$$

совпадает с определителем системы (2.10), и, следовательно, вместо

$$Q_{1nn}^{+} y_{1n}^{j+} + \left[P_{1nn}^{-} - a_{1n}^{j}\right] y_{1n}^{j-}$$

можно ввести новую переменную

$$Y_{1n}^{j} = y_{1n}^{j+} + \left[Q_{1nn}^{+}\right]^{-1}\left[P_{1nn}^{-} - a_{1n}^{j}\right] y_{1n}^{j-}$$

Тогда система (2.14) примет вид

$$\begin{aligned} &a_{2n}^{j} y_{0n}^{j-} - Y_{1n}^{j} Q_{1nn}^{+} = Q_{2nn}^{+} y_{0n}^{j+} + \ldots, \\ &a_{2n}^{j} y_{0n}^{j+} - Y_{1n}^{j} \varepsilon_{n}^{j} Q_{1nn}^{+} = Q_{2nn}^{-} y_{0n}^{j-} + \ldots \end{aligned} \qquad (2.15)$$

где

$$\begin{vmatrix} Q_{1nn}^{+} & y_{0n}^{j-} \\ \varepsilon_{n}^{j} Q_{1nn}^{+} & y_{0n}^{j+} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \varepsilon_{n}^{j} = \frac{Q_{1nn}^{-}}{P_{1nn}^{-} - a_{1n}^{j}} = \frac{P_{1nn}^{+} - a_{1n}^{j}}{Q_{1nn}^{+}}$$

Из уравнений (2.15) видно, что $a_{2n}^{j}$ получает точное значение (зависит от $Q_{2nn}^{\pm}$, $P_{2nn}^{\pm}$, $y_{0n}^{j-}/y_{0n}^{j+}$), а $Y_{1n}^{j}$ зависит от $y_{0n}^{j+}$ линейно, т. е., как и $y_{0n}^{j\pm}$ определено с точностью до множителя, $y_{2n}^{j\pm}$ остаются произвольными и определяются на следующем этапе.

Рассмотрим случай произвольного $\mu$. При $m \neq n$ имеем

$$y_{\mu m}^{j\pm} = \frac{1}{n^2 - m^2}\left\{\sum_{\nu=1}^{\mu}\sum_{q}\left[P_{\nu q m}^{\pm} y_{\mu-\nu,q}^{j\pm} + Q_{\nu q m}^{\mp} y_{\mu-\nu,q}^{j\mp}\right] - \sum_{\nu=1}^{\mu-1} a_{\nu n}^{j} y_{\mu-\nu,m}^{j\pm}\right\} \qquad (2.16)$$

Справа в (2.16) стоят известные величины, за исключением $y_{\mu-1,n}^{j\pm}$, которые определяются системой, получаемой из (2.8) при $m = n$

$$\begin{aligned} &Q_{1nn}^{+} y_{\mu-1,n}^{j+} + \left[P_{1nn}^{-} - a_{1n}^{j}\right] y_{\mu-1,n}^{j-} - a_{\mu n}^{j} y_{0n}^{j-} = \ldots \\ &\left[P_{1nn}^{+} - a_{1n}^{j}\right] y_{\mu-1,n}^{j+} + Q_{1nn}^{-} y_{\mu-1,n}^{j-} - a_{\mu n}^{j} y_{0n}^{j+} = \ldots \end{aligned}$$

Здесь, как и в предыдущем уравнении

$$\Delta\left(y_{\mu-1,n}^{j\pm}\right) = \begin{vmatrix} Q_{1nn}^{+} & P_{1nn}^{-} - a_{1n}^{j} \\ P_{1nn}^{+} - a_{1n}^{j} & Q_{1nn}^{-} \end{vmatrix} = 0$$

поэтому, полагая

$$Y^j_{\mu-1,n} = y^{j+}_{\mu-1,n} + [Q^+_{1nn}]^{-1} [P^-_{1nn} - a^j_{1n}]\, y^{j-}_{\mu-1,n}$$

получаем систему относительно $a^j_{\mu n}$ и $Y^j_{\mu-1,n}$

$$y^{j-}_{0n} a^j_{\mu n} - Q^+_{1nn} Y^j_{\mu-1,n} = \ldots \quad y^{j+}_{0n} a^j_{\mu n} - Q^+_{1nn}\varepsilon^j_n Y^j_{\mu-1,n} = \ldots \tag{2.17}$$

где справа стоят величины, линейные относительно $y^{j\pm}_{\nu k}$. Из системы (2.17) видно, что $a^j_{\mu n}$ имеет точное значение, величины же $Y^j_{\mu-1,n}$ определяются с точностью до упомянутого ранее множителя, а следовательно, с точностью до этого множителя определяются и $y^{j\pm}_{\mu-1,n}$; величины $y^{j\pm}_{\mu n}$ остаются произвольными.

Таким образом, развитый выше метод в случае $[\varphi^+_{1n}]^2 + [\varphi^-_{1n}]^2 \neq 0$ позволяет построить уравнения границ областей устойчивости в виде

$$a^j_n = n^2 + \sum_{\mu=1} a^j_{\mu n} q^\mu \tag{2.18}$$

и определить периодические решения вдоль этих границ

$$y^j = 2\sum_{p\mu} (y^{j+}_{\mu p} \cos p\xi + y^{j-}_{\mu p} \sin p\xi)\, q^\mu \tag{2.19}$$

Полученные формулы позволяют сделать несколько общих утверждений относительно свойств периодических решений и границ областей устойчивости исходного уравнения. Исходя из того, что $P^\pm_{\nu qm}$ и $Q^\pm_{\nu qm}$ отличны от нуля, когда $q$ и $m$ оба четные или оба нечетные, мы заключаем, что решения, возможные вдоль кривых $a = a^j_n(q)$, проходящих при $q = 0$ через $a(0) = n^2$ ($n$ — четное), содержат только четные гармоники $y^\pm_{\nu k}$, т. е. периодичны с периодом $\pi$. В самом деле, из (2.9) следует, что $y^{j\pm}_{1m}$ отлично от нуля лишь при четных $m$. Формулы для $y^{j\pm}_{2m}$ также показывают, что $m$ четное, так как суммирование в них ведется только по четным $q$. Предполагая, что вплоть до $\mu - 1$ решения содержат только четные гармоники, из формул (2.16) следует, что этим свойством обладает и $\mu$-ое решение, что и доказывает высказанное утверждение. Аналогичное утверждение справедливо для нечетных $n$. Из полученных результатов следует также, что область, лежащая между кривыми $a^{1,2}_n$ и $a^{2,1}_{n+1}$ и содержащая ось $q = 0$, является областью устойчивости, так как вдоль оси $q = 0$ исходное уравнение имеет устойчивое решение.

Заметим, что через точку (0,0) на плоскости $aq$ проходит одна кривая $a = a_0(q)$, ниже которой нет областей устойчивости. Действительно, при $\mu = 0$ в качестве решения имеем $y^\pm_{0m} = 0$, $m \neq 0$; величина $y^+_{00}$ — произвольна. Величина $y^-_{0,0} = 0$, так как исходное уравнение не имеет нечетного периодического решения. Следующая система ($\mu = 1$) имеет решения вида

$$y^+_{1m} = -\frac{1}{m^2} P^+_{10m} y^+_{00}, \qquad y^-_{1m} = -\frac{1}{m^2} Q^+_{10m} y^+_{00}$$

Полагая, наконец, $\mu = 2$, приходим к системе, из которой определяются $y^\pm_{2,m}$ $(m \neq 0)$. При $m = 0$ эта система имеет вид

$$-a_{20} y^+_{00} = -\sum_q P^+_{1q0} y^+_{1q} + Q^-_{1q0} y^-_{1q}\,, \qquad 0 = \sum_q Q^+_{1q0} y^+_{1q} + P^-_{1q0} y^-_{1q}$$

Так как $Q^{+}_{\nu q0}=P^{-}_{\nu q0}=0$, то вторая сумма тождественно обращается в нуль. Для $a_{20}$ получаем

$$a_{20}=-\sum_{q}\frac{1}{q^2}\{[P^{+}_{10q}]^2+[Q^{+}_{10q}]^2\}$$

так как $P^{+}_{\nu q0}=P^{+}_{\nu 0q}$ и $Q^{-}_{\nu q0}=Q^{+}_{\nu 0q}$. Далее решение проходит так же, как и в случае $n\neq 0$.

Прежде чем переходить к рассмотрению случая, когда условие (2.11) нарушается, отметим, что результаты значительно упрощаются, если $\Phi(q,\ \xi)=\Phi(q,\ -\xi)$. В этом случае $Q^{\pm}_{\nu qm}=0$, и система (2.8) расщепляется на две системы относительно $y^{+}_{\mu q}$ и $y^{-}_{\mu q}$, принимая вид

$$\sum_{\nu=1}^{\mu}\sum_{q}P^{\pm}_{\nu qm}y^{\pm}_{\mu-\nu,\,q}=\sum_{\nu=1}^{\mu}a^{1,2}_{\nu n}y^{\pm}_{\mu-\nu,\,m}+(n^2-m^2)\,y^{\pm}_{\mu m} \tag{2.20}$$

Если ввести в рассмотрение величины

$$\lambda^{\pm}_{\mu q}=[y^{\pm}_{0n}]^{-1}y^{\pm}_{\mu q},\qquad \psi^{\pm}_{\mu m}=\sum_{\nu=1}^{\mu}\sum_{q}P^{\pm}_{\nu qm}\lambda^{\pm}_{\mu-\nu,\,q}$$

то общее решение ее можно представить в форме

$$\lambda^{\pm}_{\mu m}=\frac{1}{n^2-m^2}\left\{\psi^{\pm}_{\mu m}-\sum_{\nu=1}^{\mu}\psi^{\pm}_{\nu n}\lambda^{\pm}_{\mu-\nu,\,m}\right\},\qquad \psi^{\pm}_{\mu m}=\sum_{\nu=1}^{\mu}\sum_{q}P^{\pm}_{\nu qm}\lambda^{\pm}_{\mu-\nu,\,q} \tag{2.21}$$

Тогда для искомых $a^{1,2}_{n}$ и $y^{\pm}_{n}$ будем иметь

$$a^{1,2}_{n}=\sum_{\mu=1}\psi^{\pm}_{\mu n}q^{\mu}+n^2,\qquad y^{\pm}_{n}=y^{\pm}_{0n}\left\{\sum_{\mu=0}\sum_{\nu=0}\lambda^{\pm}_{\mu\nu}\begin{Bmatrix}\cos\nu\xi\\ \sin\nu\xi\end{Bmatrix}q^{\mu}\right\} \tag{2.22}$$

Рассмотрим теперь случай, когда условие (2.11) не выполнено. Согласно (2.12) $a^{j}_{1n}=0$, а вслед за этим исчезают члены, содержащие $y^{j\pm}_{1n}$ в системе (2.14), от которой теперь уже нужно требовать нетривиальности решения для $y_{0n}$. Для этого выразим оставшиеся справа члены через $y^{j\pm}_{0n}$ (согласно (2.9)). Получим

$$L_n y^{j+}_{0n}+[M_n-a^{j}_{2n}]\,y^{j-}_{0n}=0,\quad [N_n-a^{j}_{2n}]\,y^{j+}_{0n}+R_n y^{j-}_{0n}=0$$

Здесь

$$L_n=\sum_{q}\frac{1}{n^2-q^2}\{P^{-}_{1qn}Q^{+}_{1nq}+P^{+}_{1nq}Q^{+}_{1qn}\}+Q^{+}_{2nn}$$

$$M_n=\sum_{q}\frac{1}{n^2-q^2}\{P^{-}_{1qn}P^{-}_{1nq}+Q^{+}_{1qn}Q^{-}_{1nq}\}+P^{-}_{2nn}$$

$$N_n=\sum_{q}\frac{1}{n^2-q^2}\{P^{+}_{1qn}P^{+}_{1nq}+Q^{-}_{1qn}Q^{+}_{1nq}\}+P^{+}_{2nn}$$

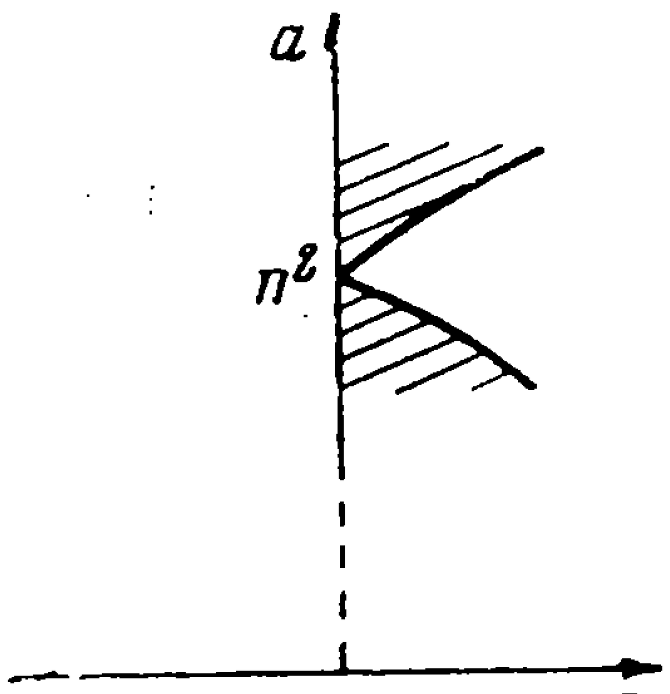
$$R_n=\sum_{q}\frac{1}{n^2-q^2}\{P^{+}_{1qn}Q^{-}_{1nq}+Q^{-}_{1qn}P^{-}_{1nq}\}+Q^{-}_{2nn}$$

Отсюда условие

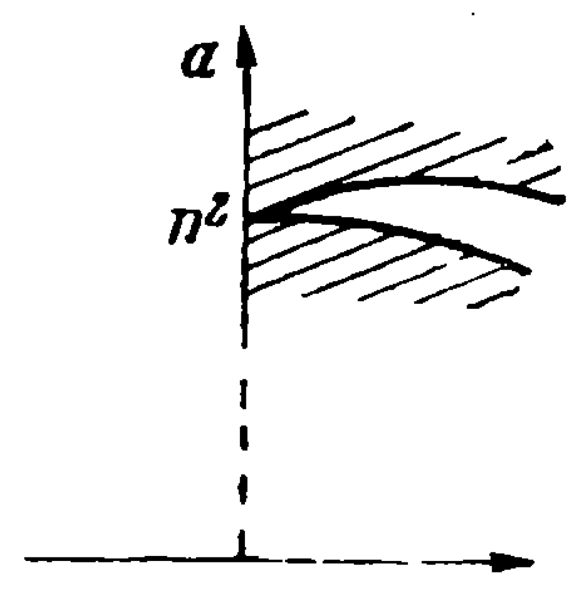
$$\begin{vmatrix} L_n & M_n-a^{j}_{2n}\\ N_n-a^{j}_{2n} & R_n\end{vmatrix}=0$$

дает два значения для $a^{j}_{2n}$. После этого с точностью до произвольного множителя находим $y^{j\pm}_{0n}$. В заключение отметим, что нарушение условия (2.11) означает отсутствие $2n$-й гармоники у функции $\Phi_1(\xi)$ и приводит к расширению области устойчивости вблизи точки $q = 0$, $a(0) = n^2$ (фиг. 1, условие (2.11) выполнено, (фиг. 2), условие (2.11) не выполнено).

**3. Построение решений внутри областей устойчивости.** Внутри рассмотренных областей устойчивости вид решений, даваемых теорией Флоке, может быть уточнен. Развитый выше метод позволяет построить решения периода $2\pi s$, которые реализуются в области устойчивости вдоль кривых $a = a(q)$, проходящих через точки $a|_{q=0} = (l/s)^2$, здесь $(l/s)$ несократимая дробь.




Фиг. 1




Фиг. 2

Будем, как и выше, решения вдоль названных кривых искать в виде

$$y_\mu^s = \sum_q \left(y_{\mu q}^{s+} \cos\frac{q}{s}\xi + y_{\mu q}^{s-} \sin\frac{q}{s}\xi\right) \tag{3.1}$$

и уравнения кривых, вдоль которых возможны указанные решения запишем в форме

$$a^s(q) = \sum_{\nu=1} a_\nu{}^s q^\nu + \left(\frac{l}{s}\right)^2 \tag{3.2}$$

Тогда рассуждения, приведшие к построению областей устойчивости, в данном случае позволяют получить следующую систему уравнений

$$\sum_{\nu=1}^{\mu} \sum_q [P_{\nu qm}^{s\pm} y_{\mu-\nu,q}^{s\pm} + Q_{\nu qm}^{s\mp} y_{\mu-\nu,q}^{s\mp}] = \sum_{\nu=1}^{\mu} a_\nu^s y_{\mu-\nu,m}^{s\pm} + \left[\left(\frac{l}{s}\right)^2 - \left(\frac{m}{s}\right)^2\right] y_{\mu m}^{s\pm} \tag{3.3}$$

Здесь, аналогично (2.7), введены обозначения

$$\begin{aligned} P_{\nu qm}^{s\pm} &= \pm \varphi_{\nu,(q+m)/2s}^{+} + \varphi_{\nu,(m-q)/2s}^{+} + \varphi_{\nu,(q-m)/2s}^{+} \\ Q_{\nu qm}^{s\pm} &= \varphi_{\nu,(q+m)/2s}^{-} \pm \varphi_{\nu,(m-q)/2s}^{-} \mp \varphi_{\nu,(q-m)/2s}^{-} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Несмотря на внешнее совпадение полученной системы с системой, определяющей уравнения границ области устойчивости, характер решений полученной системы совсем иной. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим свойства чисел $P_{\nu qm}^{s\pm}$ и $Q_{\nu qm}^{s\pm}$ (которые при $s = 1$ совпадают с введенными ранее $P_{\nu qm}^{\pm}$ и $Q_{\nu qm}^{\pm}$). Из (3.4) легко видеть, что

$$P_{\nu qm}^{s\pm} = P_{\nu mq}^{s\pm}, \qquad Q_{\nu qm}^{s+} = Q_{\nu mq}^{s-}$$

Эта система соотношений справедлива при любом $s$ (в том числе и при $s = 1$). Однако при $s \neq 1$ получается ряд соотношений, не справедливых в случае $s = 1$. Рассмотрим $P_{\nu qm}^{s\pm}$ и $Q_{\nu qm}^{s\pm}$, в которых один индекс $q$ или $m$ равен $l$, причем, как и выше, $l/s$ — несократимая дробь, т. е. $l \neq ks$, $k = 0, 1, \ldots$ . Тогда можно показать, что в правых частях (3.4) может быть отличен от нуля только один член. В самом деле, индекс $t$ в отличных от нуля $\varphi_{\nu t}^{\pm}$ должен быть целым и положительным поэтому отличными от нуля членами могут быть одновременно либо $\varphi_{\nu,(m+q)/2s}^{\pm}$ и $\varphi_{\nu,(m-q)/2s}^{\pm}$, либо $\varphi_{\nu,(m+q)/2s}^{\pm}$ и $\varphi_{\nu,(q-m)/2s}^{\pm}$. Из этих членов оказывается отличным от нуля лишь один, если $m = l$ или $q = l$. Действительно, пусть отличны от нуля $\varphi_{\nu,(l+q)/2s}^{\pm}$ и $\varphi_{\nu,(l-q)/2s}^{\pm}$. Тогда необходимо, чтобы $l+q=2k_1s$ и $l-q=2k_2s$, где $k_1$ и $k_2$ — целые числа. Отсюда следует $l=(k_1+k_2)s$, что противоречит оговоренному ранее условию $l\neq ks$. Если предположить отличной от нуля вторую пару, то требование $l+q=2k_1s$ и $q-l=2k_2s$ приводит опять к противоречивому следствию $l=(k_1-k_2)s$. Эти заключения позволяют отметить ряд специальных свойств чисел (3.4). Отсюда получаем, что

$$[P^{s+}_{\nu ql}]^2=[P^{s-}_{\nu ql}]^2=[P^{s+}_{\nu lq}]^2=[P^{s-}_{\nu lq}]^2 \tag{3.5}$$

а также

$$[Q^{s+}_{\nu lq}]^2=[Q^{s+}_{\nu ql}]^2=[Q^{s-}_{\nu lq}]^2=[Q^{s-}_{\nu ql}]^2 \tag{3.6}$$

Далее. Пусть отлично от нуля число $\varphi^{\pm}_{\nu,(l+q)/2s}$, тогда

$$P^{s+}_{\nu ql}=-P^{s-}_{\nu ql},\qquad Q^{s+}_{\nu ql}=Q^{s-}_{\nu ql} \tag{3.7}$$

Если же отличен от нуля какой-либо из членов $\varphi^{\pm}_{\nu,\pm(l-q)/2s}$, то

$$P^{s+}_{\nu ql}=P^{s-}_{\nu ql},\qquad Q^{s+}_{\nu ql}=-Q^{s-}_{\nu ql} \tag{3.8}$$

Одновременно (3.7) и (3.8) реализоваться не могут.

Рассмотрим решения системы (3.3). Для $\mu=1$ получаем

$$P^{s\pm}_{1lm}y^{s\pm}_{0l}+Q^{s\mp}_{1lm}y^{s\mp}=a_1{}^s y^{s\pm}_{0l}\delta_{ml}+\frac{l^2-m^2}{s^2}y^{s\pm}_{1m} \tag{3.9}$$

Отсюда при $m\neq l$ следует

$$y^{s\pm}_{1m}=s^2\,\frac{P^{s\pm}_{1lm}y^{s\pm}_{0l}+Q^{s\mp}_{1lm}y^{s\mp}_{0l}}{l^2-m^2} \tag{3.10}$$

В случае же $m=l$ приходим к $a_1{}^s=0$, так как $P^{s\pm}_{1ll}=Q^{s\pm}_{1ll}=0$.

Полагая далее $\mu=2$, получаем систему уравнений вида

$$\sum_q[P^{s\pm}_{1qm}y^{s\pm}_{1q}+Q^{s\mp}_{1qm}y^{s\mp}_{1q}]+P^{s\pm}_{2lm}y^{s\pm}_{0l}+Q^{s\mp}_{2lm}y^{s\mp}_{0l}=a^s_2y^{s\pm}_{0l}\delta_{lm}+\frac{l^2-m^2}{s^2}y^{s\pm}_{2m} \tag{3.11}$$

Подставляя в систему (3.11) выражения (3.10), приходим к системе уравнений относительно $y^{s\pm}_{0l}$ (однородной при $m=l$), от которой потребуем наличия нетривиальных решений при $m=l$. Последнее требование должно определить $a^s_2$. Если совершить указанную подстановку, то придем к следующим соотношениям

$$\sum_q\frac{[P^{s\pm}_{1ql}P^{s\pm}_{1lq}+Q^{s\mp}_{1ql}Q^{s\pm}_{1lq}]\,y^{s\pm}_{0l}+[P^{s\pm}_{1ql}Q^{s\mp}_{1lq}+Q^{s\mp}_{1ql}P^{s\mp}_{1lq}]\,y^{s\mp}_{0l}}{(l^2-q^2)/s^2}=a^s_2y^{s\pm}_{0l} \tag{3.12}$$

Указанные выше свойства чисел $P$ и $Q$ позволяют установить, что

$$P^{s+}_{1ql}P^{s+}_{1lq}\equiv P^{s-}_{1lq}P^{s-}_{1ql}\equiv[P^{s\pm}_{1lq}]^2,\qquad Q^{s-}_{1lq}Q^{s+}_{1ql}\equiv Q^{s-}_{1ql}Q^{s+}_{1lq}\equiv[Q^{s\pm}_{1lq}]^2$$

а также

$$P^{s+}_{1ql}\;Q^{s-}_{1lq}+Q^{s-}_{1ql}P^{s-}_{1lq}=P^{s-}_{1ql}\;Q^{s+}_{1lq}+P^{s+}_{1lq}Q^{s+}_{1ql}=0$$

Эти тождества, несправедливые в случае $s=1$, меняют решения системы, которая теперь имеет одно решение, если

$$a^s_2=\sum_q\frac{[P^{s\pm}_{1lq}]^2+[Q^{s\pm}_{1lq}]^2}{(l^2-q^2)/s^2}$$

И, соответственно, $y^{s\pm}_{0l}$ остаются произвольными и несвязанными. Дальнейшие вычисления не представляют затруднений (проводятся как в случае нахождения границ) и приводят к построению двух независимых решений (в отличие от случая нахождения границ, где вдоль каждой границы находилось лишь одно периодическое решение).

Таким образом, во втором приближении кривая, вдоль которой возможны решения периода $2\pi s$, дается уравнением

$$a^s = \left(\frac{l}{s}\right)^2 + \left\{\sum_p \frac{[P^{s\pm}_{1lp}]^2 + [Q^{s\pm}_{1lp}]^2}{(l^2 - p^2)/s^2}\right\} q^2 + \ldots \tag{3.13}$$

С другой стороны, если выполнено условие (2.11), уравнение границы, проходящей через точку $a|_{q=0} = n^2$, мы можем записать в виде

$$a^j_n = n^2 + (-1)^j \begin{vmatrix} Q^+_{1nn} & P^-_{1nn} \\ P^+_{1nn} & Q^-_{1nn} \end{vmatrix}^{1/2} q + \ldots \tag{3.14}$$

Так как последнее разложение начинается с членов, линейных по $q$, то возникает вопрос, не могут ли кривые (3.13) и (3.14) пересечься, если $l/s$ близко к $n$, а $q$ достаточно мало? Докажем, что этого не может случиться.

Условие достаточной близости $l/s$ к $n$ запишем в следующей форме

$$l/s = n + \theta/s \tag{3.15}$$

где $\theta$ — целое, положительное или отрицательное число. Если выбрать $s$ достаточно большим, таким, что $|\theta/s| < \varepsilon$ ($\theta$ — фиксируется), то $|l/s - n| < \varepsilon$. (В равенстве (3.15) $\theta < 0$ при $j = 1$ и $\theta > 0$ при $j = 2$.) Для доказательства заметим, что $P^{s\pm}_{\nu lp} = P^{\pm}_{\nu nn}$ и $Q^{s\pm}_{\nu lp} = Q^{\pm}_{\nu nn}$ при $l = ns + \theta$ и $p = ns - \theta$, после чего нетрудно видеть, что наибольшим членом в

$$\sum_p \frac{[P^{s\pm}_{1lp}]^2 + [Q^{s\pm}_{1lp}]^2}{(l^2 - p^2)/s^2}$$

будет при достаточно больших $s$

$$\{[P^+_{1nn}]^2 + [Q^+_{1nn}]^2\} \frac{s}{4n\theta}$$

Поэтому на пересечение можно исследовать кривые (3.14) и

$$a^{*s} = \left(\frac{l}{s}\right)^2 + \{[P^+_{1nn}]^2 + [Q^+_{1nn}]^2\} \frac{s}{4n\theta} q^2$$

Однако эти кривые не пересекаются, так как уравнение $a^j_n = a^{*s}$, как нетрудно проверить, не имеет действительных корней. Этим выводом завершается доказательство.

Таким образом, структура областей устойчивости представляется следующей: область устойчивости всюду плотно заполнена кривыми вида (3.13), вдоль которых возможны два линейно независимых решения периода $2\pi s$. Эти кривые пересекают ортогонально ось $q = 0$ в точках $a|_{q=0} = (l/s)^2$, где $l/s$ — несократимая дробь.

В заключение автор выражает глубокую признательность Ю. Н. Днестровскому за ряд ценных советов.

Поступила 24 VI 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Мак-Лахлан Н. Теория и приложения функций Матье. ИИЛ, 1953.
2. Бриллюен Л. и Пароди М. Распространение волн в периодических структурах. ИИЛ, 1959.
3. Уиттекер Э. и Ватсон Д. Курс современного анализа. Ч. 2, ГТТИ, 1934