Прикладная математика и механика. Том XXV, 1961
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

# О ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ И УСТОЙЧИВОСТИ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Е. Н. Розенвассер

(Ленинград)

В настоящей работе излагается способ исследования вынужденных колебаний и устойчивости систем, описываемых линейными дифференциальными уравнениями с периодическими коэффициентами, основанный на сведении задачи к решению интегрального уравнения Фредгольма II рода.

**1°. Вывод вспомогательной формулы.** Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_k = \sum_{\alpha=1}^{n} b_{k\alpha} x_\alpha + F_k(t) \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

где $b_{k\alpha}$ — постоянные, $F_k(t)$ — заданные функции времени такие, что

$$F_k(t) = F_k(t + T) \tag{1.2}$$

Функции $F_k$ можно считать кусочно-непрерывными. Для дальнейшего достаточно предположить, что характеристическое уравнение

$$D(\lambda) = |b_{k\alpha} - \lambda\delta_{k\alpha}| = 0 \qquad (\delta_{k\alpha} \text{ — символ Кронекера}) \tag{1.3}$$

не имеет корней $\lambda = \lambda_\rho$ $(\rho = 1, \ldots, n)$, равных

$$\psi_s = \frac{2\pi i}{T} s, \qquad i = \sqrt{-1}$$

где $s$ — нуль или любое целое число.

Требуется найти периодическое решение периода $T$ системы (1.1). Эта задача подробно изучена в [1]. Ниже дается другая форма решения, необходимая для дальнейшего. Пусть

$$x_s = x_s(t) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1.4}$$

искомое периодическое решение системы (1.1).

В работе [1] показано, что

$$x_s(t) = \sum_{\rho=1}^{n} \frac{e^{\lambda_\rho t}}{1 - e^{-\lambda_\rho T}} \sum_{j=1}^{n} \frac{\Delta_{js}(\lambda_\rho)}{D'(\lambda_\rho)} \left[ \int_0^T e^{-\lambda_\rho \tau} F_j(\tau)\, d\tau - (1 - e^{-\lambda_\rho T}) \int_0^t e^{-\lambda_\rho \tau} F_j(\tau)\, d\tau \right] \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1.5}$$

где $\Delta_{js}(\lambda)$ — алгебраическое дополнение элемента определителя (1.3), стоящего на пересечении строки $j$ и столбца $s$, и предполагается, что среди чисел $\lambda_\rho$ $(\rho = 1, \ldots, n)$ нет равных между собой.

Из (1.5) непосредственно имеем

$$x_s(0) = \sum_{k=1}^{n} \int_0^T u_{sk}(z) F_k(z)\, dz \tag{1.6}$$

где

$$u_{sk}(z) = \sum_{\rho=1}^{n} \frac{\Delta_{sk}(\lambda_\rho)}{D'(\lambda_\rho)} \frac{e^{-\lambda_\rho \tau}}{1 - e^{-\lambda_\rho \tau}} \tag{1.7}$$

Предположим теперь, что вместо функций (1.2) в правых частях (1.1) стоят функции

$$F_k^\tau(t) = F_k(t + \tau)$$

где $\tau$ — параметр. Соответствующее периодическое решение обозначим через

$$x_s = x_s^\tau(t)$$

Используя (1.6), непосредственно получаем:

$$x_s^\tau(0) = \sum_{k=1}^{n} \int_0^T u_{sk}(z) F_k(z + \tau)\, dz \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.8}$$

С другой стороны, сделав в системе (1.1) замену переменной $y = t + \tau$, получим

$$x_s(t + \tau) = x_s^\tau(t)$$

Отсюда найдем, что

$$x_s(\tau) = x_s^\tau(0) \tag{1.9}$$

Подставив это выражение в (1.8) и заменяя $\tau$ на $t$, получим интегральное представление решения (1.4):

$$x_s(t) = \sum_{k=1}^{n} \int_0^T u_{sk}(z) F_k(z + t)\, dz \qquad (s=1, 2, \ldots, n) \tag{1.10}$$

Далее заметим, что равенства (1.10) сохраняют силу, если вместо $u_{sk}$ использовать функции

$$\Phi_{sk}(z) = \Phi_{sk}(z + T), \qquad \Phi_{sk}(z) = u_{sk}(z) \quad \text{при } 0 < z < T \tag{1.11}$$

т. е. можно написать

$$x_s(t) = \sum_{k=1}^{n} \int_0^T \Phi_{sk}(z) F_k(z + t)\, dz \qquad (s=1, 2, \ldots, n) \tag{1.12}$$

Введя новую переменную, выражение (1.12) можно преобразовать к виду

$$x_s(t) = \sum_{k=1}^{n} \int_t^{t+T} \Psi_{sk}(t - y) F_k(y)\, dy \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.13}$$

где

$$\Psi_{sk}(z) = \Phi_{sk}(-z) \tag{1.14}$$

Разложение функции $\Psi_{sk}$ в ряд Фурье имеет вид:

$$\Psi_{sk}(z) = -\frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\Delta_{sk}(\psi_m)}{D(\psi_m)} e^{\psi_m z} \tag{1.15}$$

Формула (1.15) вытекает из (1.14) и равенства

$$\frac{1}{T}\int\limits_0^T u_{sk}(z)\,e^{-\psi_m z}\,dz = \frac{1}{T}\sum_{\rho=1}^{n}\frac{\Delta_{sk}(\lambda_\rho)}{D'(\lambda_\rho)}\,\frac{1}{\lambda_\rho+\psi_k} = -\frac{1}{T}\,\frac{\Delta_{sk}(-\psi_m)}{D(-\psi_m)}$$

Замечая далее, что в соответствии с (1.15) функция $\Psi_{sk}(t-\tau)$ является периодичной периода $T$ по каждому из аргументов, и учитывая известное свойство интеграла от периодической функции, в формуле (1.13) пределы интегрирования можно считать постоянными и равными соответственно 0 и $T$, т. е.

$$x_s(t) = \sum_{k=1}^{n}\int\limits_0^T \Psi_{sk}(t-y)\,F_k(y)\,dy \tag{1.16}$$

Отметим также некоторые свойства функций $\Psi_{sk}$. Из (1.14) и (1.7) можно получить

$$\Psi_{sk}(z) = u_{sk}(T-z) = \sum_{\rho=1}^{n}\frac{\Delta_{sk}(\lambda_\rho)}{D'(\lambda_\rho)}\,\frac{e^{\lambda_\rho z}}{e^{\lambda_\rho T}-1} \quad \text{при } 0<z<T \tag{1.17}$$

Имеет место соотношение

$$\Psi_{sk}(0) = \frac{1}{2}\sum_{\rho=1}^{n}\frac{\Delta_{sk}(\lambda_\rho)}{D'(\lambda_\rho)}\operatorname{cth}\frac{\lambda_\rho T}{2} \tag{1.18}$$

что вытекает из свойства рядов Фурье:

$$\Psi_{sk}(0) = \Psi_{sk}(T) = \frac{u_{sk}(0)+u_{sk}(T)}{2}$$

Можно показать также, что функции $\Psi_{sk}(t-\tau)$ являются непрерывными в квадрате

$$0<\tau<T, \qquad 0<t<T$$

при $k\neq s$, а функции $\Psi_{ss}$ терпят разрыв, равный единице на диагонали $t=\tau$.

Все предыдущее выводилось в предположении, что уравнение (1.3) не имеет кратных корней, однако нетрудно показать, что формулы (1.16), (1.15) справедливы независимо от этого предположения.

**2°. Вынужденные колебания квазигармонической системы.** Будем рассматривать систему дифференциальных уравнений

$$x_k = \sum_{\alpha=1}^{n} b_{k\alpha}x_\alpha + \mu\sum_{\alpha=1}^{n} m_{k\alpha}(t)\,x_\alpha + F_k(t) \qquad (k=1,\ldots,n) \tag{2.1}$$

где $b_{k\alpha}$ — те же, что и в (1.1), $m_{k\alpha}(t)$ и $F_k(t)$ — заданные функции времени, имеющие период $T$, $\mu$ — некоторый параметр.

Будем искать периодические решения системы (2.1), имеющие период $T$. Предположим, что такое решение (1.4) существует. Тогда, учитывая (1.16), найдем, что оно необходимо удовлетворяет системе интегральных уравнений Фредгольма II рода:

$$x_s(t) = \mu\sum_{k=1}^{n}\int\limits_0^T\sum_{\alpha=1}^{n}\Psi_{sk}(t-y)\,m_{k\alpha}(y)\,x_\alpha(y)\,dy + \int\limits_0^T \Psi_{sk}(t-y)\,F_k(y)\,dy$$

$$(s=1,\ldots,n) \tag{2.2}$$

Используя известный прием сведения системы интегральных уравнений к одному и учитывая периодичность функций, стоящих под знаком интеграла по каждому из аргументов, сведем систему уравнений (2.2) к одному уравнению. Введем функции $X(t)$ и $F(t)$, определенные при $0 < t < nT$ соотношениями:

$$X(t) = X(t + nT), \qquad X(t) = x_s(t) \quad \text{при } (s-1)T < t < sT$$
$$F(t) = F(t + nT), \qquad F(t) = \int_0^T \sum_{k=1}^n \Psi_{sk}(t-y) F_k(y)\, dy \quad \text{при } (s-1)T < t < sT \tag{2.3}$$

Введем также ядро, определенное в квадрате

$$0 < t < nT, \qquad 0 < y < nT \tag{2.4}$$

по формулам

$$K_1(t, y) = \sum_{k=1}^n \Psi_{sk}(t-y)\, m_{k\alpha}(y) = K_{s\alpha}(t, y)$$

при

$$(s-1) < T < t < sT, \qquad (\alpha - 1)T < y < \alpha' T \tag{2.5}$$

Используя введенные обозначения, систему (2.2) можно записать в виде одного интегрального уравнения

$$X(t) = \mu \int_0^{nT} K_1(t, y) X(y)\, dy + F(t) \tag{2.6}$$

Отметим также, что однородное уравнение

$$X(t) = \mu \int_0^{nT} K_1(t, y) X(y)\, dy \tag{2.7}$$

имеет решения, отличные от нулевого, тогда и только тогда, когда однородная система, соответствующая системе (2.1), имеет периодическое решение периода $T$. Учитывая это обстоятельство, нетрудно показать, что известные теоремы о существовании периодического решения системы (2.1), приведенные в [2], являются простой перефразировкой известных теорем Фредгольма [3], примененных к уравнению (2.6).

Перейдем к построению решения уравнения (2.6). В общем случае

$$X(t) = \mu \int_0^{nT} R(\mu, t, y) F(y)\, dy + F(t) \tag{2.8}$$

где $R(\mu, t, y)$ — резольвента ядра (2.5). При достаточно малых $|\mu|$, $R(\mu, t, y)$ представляется рядом по степеням параметра $\mu$:

$$R(\mu, t, y) = \sum_{i=0}^{\infty} K_{i+1}(t, y)\, \mu^i \tag{2.9}$$

где $K_i$ — повторные ядра, вычисляемые по рекуррентной формуле

$$K_{i+1}(t, y) = \int_0^{nT} k_1(t, z)\, k_i(z, y)\, dz \tag{2.10}$$

Можно показать, что последовательность действий, связанная с составлением ряда (2.9) и решения (2.8), полностью эквивалентна определению периодического решения системы (2.1) в «нерезонансном случае» [2] методом малого параметра. Из теории уравнений Фредгольма известно, что ряд (2.9) сходится при всех

$$0<|\mu|<|\mu_0| \tag{2.11}$$

где $\mu_0$ — наименьшее по модулю значение $\mu$, при котором однородное уравнение (2.7) имеет решение, отличное от нулевого, и расходится при $|\mu|>|\mu_0|$. С другой стороны, по сказанному выше, $\mu_0$ — наименьшее по модулю значение параметра, при котором однородная система, соответствующая (2.1), будет иметь периодическое решение. Отсюда непосредственно вытекает, что при значениях $|\mu|\geqslant|\mu_0|$ построить периодическое решение системы (2.1) методом малого параметра не представляется возможным. Для многих задач важно иметь возможность оценить число $\mu_0$ и иметь способ построения вынужденных колебаний при любых значениях параметра. Эти результаты можно получить, применяя к решению уравнения (2.6) аппарат Фредгольма, дающий решение при любых значениях параметра. В общем случае резольвента является мероморфной функцией параметра $\mu$:

$$R(\mu, t, y) = \frac{\Delta(\mu, t, y)}{\Delta(\mu)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\mu^n \Delta_n(t, y) \Big/ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\mu^n \Delta_n \tag{2.12}$$

Отсюда вытекает, что в общем случае периодическое решение системы (2.1) является мероморфной функцией параметра. Выражение (2.9) является разложением функции (2.12) в ряд Тэйлора, поэтому число $\mu_0$ может быть определено как наименьший по модулю корень уравнения

$$\Delta(\mu_0) = 0$$

Для практического вычисления коэффициентов, входящих в числитель и знаменатель (2.12), можно применить рекуррентные формулы [4]:

$$\begin{gathered}\Delta_n(t,y) = K_1(t, y) - n\int_0^{nT} K_1(t, z)\,\Delta_{n-1}(z, y)\,dz \\ \Delta_{n+1} = \int_0^{nT}\Delta_n(t, t)\,dt, \qquad \Delta_0(t, y) = K_1(t, y), \qquad \Delta_0 = 1\end{gathered} \tag{2.13}$$

Нетрудно убедиться, что коэффициент $\Delta_n(t, y)$ является линейной комбинацией повторных ядер $K_1(t, y), \ldots, K_n(t, y)$. Для их практического вычисления можно применить следующий прием.

Введем матрицу $\|K_1(t,y)\|$, составленную из функций $K_{s\alpha}(t,y)$. Будем подсчитывать повторные матрицы по формуле

$$\|K_i(t, y)\| = \int_0^T \|K_i(t,z)\|\;\|K_{i-1}(z,y)\|\,dy \tag{2.14}$$

Соответствующие элементы матрицы $\|K_i(t, y)\|$ будем обозначать через $K_{s\alpha}{}^i(t_1 y)$. Каждой матрице $\|K_i(t_1 y)\|$ сопоставим скалярную функцию двух аргументов, определенную в квадрате (2.4) по формулам:

$$K_i(t,y) = K^i_{s\alpha} \quad \text{при} \quad (s-1)T < t < sT, \ (\alpha-1)T < y < \alpha T \tag{2.15}$$

Непосредственным вычислением можно проверить, что построенная таким образом функция $K_i(t, y)$ совпадает с $i$-м повторным ядром (2.10). При вычислениях коэффициентов $\Delta_n$ необходимо вычислить интегралы вида:

$$\alpha_i = \int_0^{nT} K_i(t, t)\, dt \tag{2.16}$$

Учитывая (2.15) и периодичность всех повторных ядер по каждому из аргументов, можно получить, что

$$\alpha_i = \int_0^T \operatorname{sp}\|K_i(t, t)\|\, dt \qquad \left(\operatorname{sp}\|K_i(t, y)\| = \sum_{\alpha=1}^n K_{\alpha\alpha}{}^i(t, y)\right) \tag{2.17}$$

Можно также строить решение уравнения (2.6) в другой последовательности, используя известные формулы для коэффициентов рядов Фредгольма [4].

В качестве примера рассмотрим частный случай системы (2.1):

$$\dot{x}_k = \sum_{\alpha=1}^n b_{k\alpha} x_\alpha + \mu h_k f(t)\, \sigma + F_k(t) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.18}$$

$$\sigma = \sum_{s=1}^n j_s x_s, \qquad f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{\psi_k t}$$

Используя (2.2), получим

$$x_s(t) = \mu \int_0^T \Psi_s(t-y) f(y)\, \sigma(y)\, dy + \sum_{k=1}^n \int_0^T \Psi_{sk}(t-y) F_k(y)$$

где

$$\Psi_s(t-y) = -\frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{h_k \Delta_{sk}(\psi_m)}{D(\psi_m)} e^{\psi_m (t-y)} = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{H_s(\psi_m)}{D(\psi_m)} e^{\psi_m (t-y)}$$

Отсюда, используя выражение для $\sigma$ из (2.18), можем получить

$$\sigma(t) = \mu \int_0^T \Psi(t-y) f(y)\, \sigma(y)\, dy + s(t) \tag{2.19}$$

где

$$\Psi(t-y) = -\frac{1}{T} \sum_{p=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{h_{pjk}\, \Delta_{pk}(\psi_m)}{D(\psi_m)} e^{\psi_m (t-y)} = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{M(\psi_m)}{D(\psi_m)} e^{\psi_m (t-y)}$$

$$s(t) = \int_0^T \sum_{s=1}^n \sum_{k=1}^n j_s\, \Psi_{sk}(t-y) F_k(y)\, dy$$

Используя известные формулы (2.13), будем строить резольвенту $R(t, y)$ ядра

$$\Psi(t-y) f(y) \tag{2.20}$$

После вычислений с точностью до $\mu^3$ получится:

$$R(t, y) = f(y) \frac{L_1 - \mu(L_1\Delta_1 - L_2) + {}^1/_2\mu^2(L_1\Delta_2 - 2L_2\Delta_1 + 2L_3)}{1 - \mu\Delta_1 + {}^1/_2\mu^2\Delta_2} \tag{2.21}$$

$$L_1(t, y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{M(\psi_k)}{D(\psi_k)} e^{\psi_k(t-y)}$$

$$L_2(t, y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{M(\psi_k)}{D(\psi_k)} f_{k-r} \frac{M(\psi_r)}{D(\psi_r)} e^{\psi_k t - \psi_r y}$$

$$L_3(t, y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{M(\psi_k)}{D(\psi_k)} f_{k-r} \frac{M(\psi_r)}{D(\psi_r)} f_{r-p} \frac{M(\psi_p)}{D(\psi_p)} e^{\psi_k t - \psi_p y}$$

$$\Delta_1 = f_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{M(\psi_k)}{D(\psi_k)} \qquad \text{и т. п.}$$

Все сказанное в настоящем пункте непосредственно распространяется на случай отыскания почти периодических решений системы (2.1), если функции $F_k(t)$ имеют вид

$$F_k(t) = e^{i\nu t} \varphi_k(t)$$

где функции $\varphi_k(t)$ имеют период $T$, $\nu$ — вещественное число. Как известно [2], если в рассматриваемом случае почти периодическое решение существует, то оно имеет вид

$$x_s(t) = e^{i\nu t} \chi_s(t) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

где $\chi_s(t)$ имеют период $T$. Поэтому, если ввести новые неизвестные

$$y_s = x_s e^{-i\nu t}$$

то система (2.1) примет вид

$$\dot{y}_k = \sum_{\alpha=1}^{n} (b_{k\alpha} + i\nu\delta_{k\alpha}) x_\alpha + \mu \sum_{\alpha=1}^{n} m_{k\alpha}(t) x_\alpha + \varphi_k(t) \tag{2.22}$$

и задача сведется к разысканию периодических решений системы (2.22), имеющих период $T$.

**3°. Устойчивость квазигармонической системы.** Проблемы исследования параметрического резонанса, устойчивости периодических движений и другие задачи приводят к необходимости изучения свойств однородных систем линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Рассмотрим однородную систему, соответствующую (3.1):

$$\dot{x}_k = \sum_{\alpha=1}^{n} b_{k\alpha} x_\alpha + \mu \sum_{\alpha=1}^{n} m_{k\alpha}(t) x_\alpha \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{3.1}$$

В соответствии с теорией Флоке [2] будем искать решения системы (3.1) вида:

$$x_s(t) = e^{\lambda_i t} f_{is}(t) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{3.2}$$

где $f_{is}(t)$ — периодические функции периода $T$. Поэтому, сделав замену

$$x_s(t) = e^{\lambda t} y_s(t)$$

придем к системе

$$\dot{y}_k = \sum_{\alpha=1}^{n} b_{k\alpha} x_\alpha - \lambda \delta_{k\alpha} x_\alpha + \mu \sum_{\alpha=1}^{n} m_{k\alpha}(t) y_\alpha \tag{3.3}$$

Характеристические показатели $\lambda_i$ должны быть определены из условия, что при $\lambda = \lambda_i$ система (3.3) имеет периодическое решение периода $T$. Но если таковое существует, то в силу предыдущего система интегральных уравнений

$$X(t) = \mu \sum_{k=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{n} \int_0^T \Psi_{s\alpha}(\lambda, t-y) m_{\alpha k}(y) x_k(y) dy \tag{3.4}$$

где

$$\Psi_{sk}(\lambda, z) = -\frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\Delta_{sk}(\lambda + \psi_m)}{D(\lambda + \psi_m)} e^{\psi_m z} \tag{3.5}$$

будет иметь нетривиальное решение.

Как и выше, систему (3.4) можно свести к одному интегральному уравнению с ядром, определенным в квадрате (2.4) и зависящим от параметра $\lambda$. Тогда необходимым и достаточным условием существования периодического решения будет обращение в нуль знаменателя Фредгольма, который в данном случае будет функцией $\lambda$:

$$\Delta(\lambda_i, \mu) = 0 \tag{3.6}$$

Уравнение (3.6) может быть использовано для определения характеристических показателей, а также для выделения областей устойчивости в пространстве параметров. Помимо путей, указанных в предыдущем пункте, для вычисления $\Delta(\lambda, \mu)$ можно использовать соотношение

$$-\frac{1}{\Delta(\lambda, \mu)} \frac{d\Delta(\lambda, \mu)}{d\mu} = \int_0^{nT} R(\lambda, \mu, t, t) dt \tag{3.7}$$

Подставляя в правую часть (3.7) выражение для $\Delta(\mu)$ в виде ряда и учитывая (2.9) и (2.16), получим

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} \mu^{n-1} \alpha_n \right) \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\mu)^n}{n!} \Delta_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\mu)^{n-1}}{(n-1)!} \Delta_n$$

Откуда, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\mu$, последовательно определим коэффициенты $\Delta_i$:

$$\Delta_1 = \alpha_1, \qquad \Delta_2 = \alpha_1^2 - \alpha_2, \qquad \Delta_3 = \alpha_1^3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_3 \quad \text{и т. п.} \tag{3.8}$$

где в соответствии с (3.5) величины $\alpha_i$ будут функциями $\lambda$. Если искать решение систем (3.3) или (3.4) в виде тригонометрического ряда

$$y_i(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_{ik} e^{\psi_k t}$$

то для определения коэффициентов $u_{ik}$ получится бесконечная система линейных уравнений. Определитель этой системы, являющийся функцией величин $\lambda$ и $\mu$, называется определителем Хилла системы (3.4).

Можно показать, что разложение этого определителя по степеням $\mu$ совпадает с выражением для $\Delta(\lambda, \mu)$, где коэффициенты $\Delta_i(\lambda)$ определяются согласно (3.8). Иными словами, определитель Хилла является знаменателем Фредгольма резольвенты ядра системы (3.4). Следует отметить, что выбор постоянной матрицы $\|B\|$, составленной из чисел $b_{k\alpha}$, по существу является произвольным и соответствует различному выбору параметра. В частности, за матрицу $\|B\|$ в (3.3) можно взять $-\lambda E$ ($E$ — единичная матрица). Тогда соответствующая система интегральных уравнений примет вид

$$x_s(t) = \int_0^T \overline{\Phi}(t-\tau) \sum_{\alpha=1}^{n} (b_{s\alpha} + \mu m_{s\alpha}(\tau))\, x_\alpha(\tau)\, d\tau \tag{3.9}$$

где

$$\overline{\Phi}(z) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{\psi_k z}}{\lambda + \psi_k} \tag{3.10}$$

Можно также, отнеся слагаемые, пропорциональные $\lambda$, к членам, содержащим переменные коэффициенты, получить систему интегральных уравнений:

$$x_s(t) = \int_0^T \sum_{k=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{n} \Psi_{sk}(t-\tau)(m_{k\alpha} - \lambda\delta_{k\alpha})\, x_\alpha(\tau)\, d\tau \tag{3.11}$$

При этом, взяв интегральные уравнения в виде (3.11), получим разложение определителя Хилла по целым степеням $\lambda$, в то время как в случаях (3.4), (3.9) коэффициент $\Delta_i(\lambda)$ будет суммой дробно-рациональных функций $\lambda$. Вопрос о выборе матрицы $\|B\|$ для улучшения сходимости соответствующих рядов должен явиться предметом специального рассмотрения.

В качестве примера рассмотрим однородную систему, соответствующую (2.18), и однородное интегральное уравнение с ядром (2.20). Используя приведенные выше формулы, получим

$$\alpha_k = \sum_{p_1=-\infty}^{\infty} \sum_{p_2=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{p_k=-\infty}^{\infty} \frac{M(\lambda+\psi_{p_1})}{D(\lambda+\psi_{p_1})} f_{p_1-p_2} \frac{M(\lambda+\psi_{p_2})}{D(\lambda+\psi_{p_2})} \cdots \frac{M(\lambda+\psi_{p_k})}{D(\lambda+\psi_{p_k})} f_{k_p-p_1} \tag{3.12}$$

где $f_i$ — коэффициенты Фурье функции $f(t)$.

Каждое из слагаемых в разложении $\Delta(\lambda, \mu)$ можно записать в конечной форме.

Из общей теории для уравнения с ядром $K(t, y)$ имеем [4]:

$$\Delta_n(\lambda) = \int_0^T \int_0^T \cdots \int_0^T \det \begin{vmatrix} K(t_1, t_1), \ldots, K(t_1, t_n) \\ K(t_n, t_1), \ldots, K(t_n, t_n) \end{vmatrix} dt_1, \ldots, dt_n \tag{3.13}$$

Рассмотрим величину (3.13) как функцию от $\lambda$. В силу (2.20) дело сведется к рассмотрению определителя

$$K_n(\lambda) = \det \begin{vmatrix} \Psi(0) & \ldots & \Psi(t_1 - t_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \Psi(t_n - t_1) & \ldots & \Psi(0) \end{vmatrix} \tag{3.14}$$

Для простоты предположим, что корни уравнения (1.3) простые. Тогда можно показать, что функция $K_n(\lambda)$ имеет только простые полюсы в точках $\lambda = \lambda_\rho + \psi_k$, $\rho = 1, \ldots, n$, где $K$ — любое целое число. При этом вычет функции $K_n(\lambda)$ в точке $\lambda = \lambda_\rho + \psi_k$ не зависит от $k_n$ и равен

$$K_{n\rho} = \frac{M(\lambda_\rho)}{D'(\lambda_\rho)} \sum_{s=1}^{n} K_{n\rho}{}^{s}$$

где $K_{n\rho}{}^{s}$ — определитель, полученный из (3.14) следующим образом:

1. Столбец с номером $s$ заменяется столбцом, состоящим из единиц.
2. Вместо функций $\Psi(t_i - t_j)$ подставляются функции

$$\Psi_\rho(t_i - t_j) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{M(\lambda_\rho + \psi_k)}{D(\lambda_\rho + \psi_k)} e^{\psi_k(t_i - t_j)}$$

где штрих обозначает, что слагаемое, соответствующее $k = 0$, отсутствует.

Из сказанного вытекает, что разложение определителя $K_n(\lambda)$ на простые дроби имеет вид:

$$K_n(\lambda) = \sum_{\rho=1}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} K_{n\rho} \frac{1}{\lambda - \lambda_\rho + \psi_k} = \frac{T}{2} \sum_{\rho=1}^{n} K_{n\rho} \operatorname{cth} \frac{(\lambda - \lambda_\rho) T}{2} \tag{3.15}$$

Подставляя (3.15) в (3.13), получим

$$\Delta_k(\lambda) = \sum_{\rho=1}^{n} \operatorname{cth} \frac{(\lambda - \lambda_\rho) T}{2} \Delta_{k\rho} \tag{3.16}$$

где

$$\Delta_{k\rho} = \frac{T}{2} \int_0^T \ldots \int_0^T f(t_1) \ldots f(t_n) K_{n\rho}(t_1, \ldots, t_n)\, dt_1, dt_2, \ldots, dt_n \tag{3.17}$$

и, следовательно, (3.18)

$$\Delta(\lambda, \mu) = 1 + \sum_{\rho=1}^{n} \operatorname{cth} \frac{(\lambda - \lambda_\rho) T}{2} \Delta_\rho(\mu) \qquad \left( \Delta_\rho(\mu) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\mu^n}{n!} \Delta_{n\rho} \right)$$

Результат, аналогичный (3.18), получен в [5], однако там величины $\Delta_\rho(\mu)$ представлены в виде бесконечных определителей.

Формулы (3.17) и (3.19) дают всегда сходящееся разложение бесконечных определителей $\Delta_\rho(\mu)$ по степеням параметра и тем самым открывают возможность для их эффективного вычисления.

Поступила 23XII 1960

## ЛИТЕРАТУРА


1. Лурье А. И. Операционное исчисление. ГИТТЛ, 1951.
2. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, ГИТТЛ, 1955.
3. Привалов И. И. Интегральные уравнения. ОНТИ, 1937.
4. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. IV, ГИТТЛ, 1951.
5. Тафт В. А. Об анализе устойчивости периодических режимов в нелинейных системах регулирования со многими степенями свободы. Автоматика и телемеханика, 1959, т. XX, № 9.