Прикладная математика и механика. Том XXV, 1961
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

О ПОСТРОЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ

Е. А. Барбашин
(Свердловск)

Указываются условия, при которых возможен подбор входного сигнала системы с тем, чтобы приближенно осуществлялся заданный периодический процесс. Исследуемая задача относится к теории программного регулирования ([1], стр. 231), так как в ней рассматривается возможность отыскания программирующих функций, обеспечивающих устойчивый периодический программируемый режим. В реальных условиях программирующие функции могут быть заданы лишь приближенно. В статье даются оценки допустимой погрешности задания программирующих функций. С чисто математической точки зрения, вопрос сводится к формулировке условий сохранения и устойчивости периодического движения при постоянно действующих возмущениях, ограниченных по норме. Дается оценка абсолютной величине, среднему значению абсолютной величины и среднеквадратичному значению указанной выше допустимой погрешности. Рассмотрен случай, когда конструируемое периодическое движение является разрывным. Часть основных результатов переносится на случай непериодического апроксимируемого движения.

1. Рассмотрим систему дифференциальнкх уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \ldots, x_n, t) + \varphi_i(t) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

Предполагая, что все функции $f_i(x_1, \ldots, x_n, t)$ являются периодическими функциями времени t с периодом ω, поставим задачу подбора таких периодических функций $\varphi_i(t)$, чтобы заданная система периодических функций $x_i = \psi_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ периода ω, оказалась бы решением системы (1.1). Решение этой простой задачи имеет вид

$$\varphi_i(t) = \psi_i'(t) - f_i(\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t), t) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.2}$$

Однако практически оно может оказаться совершенно неприемлемым. В самом деле, если система функций $x_i^! = \psi_i(t)$ определяет некоторый программируемый режим, то этот режим будет реально существовать только в том случае, если он устойчив по отношению к начальным возмущениям. Кроме того, в реальных условиях программирующие функции $\varphi_i(t)$ выбираются из некоторого узко очерченного класса функций, например из класса степенных полиномов, тригонометрических полиномов, кусочно постоянных разрывных функций и т. д.

Поэтому равенства (1.2) могут быть удовлетворены лишь приближенно с некоторой погрешностью. В случае, когда программирующие функции $\varphi_i(t)$ представляются как линейные комбинации функций из некоторой системы взаимно-ортогональных функций, легче всего вычисляется среднеквадратичная погрешность приближения. Известно также, что знание абсолютной величины погрешности позволяет получить оценку среднего значения и среднеквадратичного значения погрешности, а знание среднеквадратичного значения погрешности позволяет получить оценку среднего значения ее.

Таким образом, изучение вопросов сохранения и устойчивости периодического движения системы (1.1) при постоянно действующих возмущениях, ограниченных в среднем или в среднеквадратичном значении, представляет известный интерес. Исследование возмущений, ограниченных в среднем, как показано ниже, может быть перенесено и на случай ударных или δ-видных возмущений.

В общем случае устойчивость движений при постоянно действующих возмущениях, ограниченных в среднем, рассматривалась в работе В. Е. Гермаидзе и Н. Н. Красовского [2]. Вопросы устойчивости периодического движения при постоянно действующих возмущениях, ограниченных по абсолютной величине, были рассмотрены в статьях [3,4].

Вопросы существования, сохранения и устойчивости периодического движения при ограниченных по модулю внешних воздействиях рассмотрены в работах [5,6] на основе метода функций Ляпунова. В данной статье методом, отличным от методов цитированных работ, получаются оценки абсолютного, среднего и среднеквадратичного значений допустимой погрешности приближения программирующих функций, при которой апроксимируемое периодическое движение Г обладает следующими свойствами.

1) Все траектории, начинающиеся при $t = t_0$ в достаточно малой окрестности Г, не выходят при $t > t_0$ из ε — окрестности Г.

2) В ε — окрестности Г существует асимптотически устойчивое периодическое движение, область притяжения которого включает в себя некоторую окрестность Г.

Таким образом, если погрешность приближения находится в допустимых пределах, то даже наличие достаточно малой ошибки в выборе начальных условий не помешает приближенно осуществить заданный периодический режим, так как фактически полученный режим будет асимптотически приближаться к периодическому, мало отличающемуся от заданного.

2. Допустим сначала, что функции $\psi_i(t)$, определяющие периодическое движение Г, непрерывны и кусочно дифференцируемы.

Проводя в системе (1.1) замену переменных

$$z_i = x_i - \psi_i(t) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

получим

$$\frac{dz_i}{dt} = f(z_1 + \psi_1(t), \ldots, z_n + \psi_n(t), t) + \varphi_i(t) - \varphi_i'(t) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

Вводя обозначения

$$Z_i(z_1, \ldots, z_n, t) = f_i(z_1 + \psi_1(t), \ldots, z_n + \psi_n(t), t) - f_i(\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t), t)$$

$$r_i(t) = \varphi_i(t) - \psi_i'(t) + f_i(\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t), t) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

представим систему (1.1) в виде

$$\frac{dz_i}{dt} = Z_i(z_1, \ldots, z_n, t) + r_i(t) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.1}$$

Уравнения (2.1) представляют, очевидно, систему уравнений возмущенного движения, функции $r_i(t)$ определяют ошибку приближения программирующих функций φ_i, а отклонение решения $z_i(t)$ системы

(2.1) от нуля совпадает с отклонением решения $x_i(t)$ системы (1.1) от заданного периодического движения.

Выделив из функций $Z_i(z_1, \ldots, z_n, t)$ по какому-либо правилу линейную часть, запишем (2.1) в виде

$$\frac{dz_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t) z_k + R_i(z_1, \ldots, z_n, t) + r_i(t) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.2}$$

или в матрично-векторной форме

$$dz/dt = A(t) z + R(z, t) + r(t) \tag{2.3}$$

Определим норму вектора z и норму матрицы A следующими соотношениями [1]

$$\|z\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |z_i|, \qquad \|A\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} (|a_{i1}| + \ldots + |a_{in}|)$$

Пусть D — область, заданная неравенствами $\|z\| \leqslant \varepsilon$, $0 \leqslant t < \infty$. Наложим следующие ограничения на систему (2.3).

(a) Функции $A(t), R(z, t), r(t)$ — периодические по t с периодом ω.

(b) В области D функция $R(z, t)$ удовлетворяет условию Липшица

$$\|R(z, t) - R(y, t)\| \leqslant L \|z - y\|, \qquad z \subset D, \qquad y \subset D$$

(c) Функции $a_{ik}(t)$ и $R_i(z, t)$ при фиксированном z абсолютно интегрируемы (по Лебегу) на отрезке $[0, \omega]$.

(d) Функции $r_i^2(t)$ интегрируемы (по Лебегу) на отрезке $[0, \omega]$.

(e) Существует фундаментальная матрица $W(t, \tau)$ системы $z' = A(t) z$, удовлетворяющая условиям $W(\tau, \tau) = E$ (E — единичная матрица)

$$\|W(t, \tau)\| \leqslant B e^{-\alpha(t-\tau)}, \qquad B \geqslant 1, \qquad \alpha > 0$$

(f) Величина

$$\lambda = \alpha - LB > 0$$

Заметим, что условия (b, c, d) в силу теоремы Каратеодори ([8], стр. 120) обеспечивают существование и единственность решений системы (2.3) в области D.

Введем обозначение $\rho(t) = \|r(t)\|$.

Теорема 2.1. Пусть выполнены условия (a — f) и одно из условий

$$\text{(A)} \qquad \rho_0 = \sup_{0 \leqslant t \leqslant \omega} \rho(t) < \frac{\varepsilon}{2B^2} \lambda$$

$$\text{(B)} \qquad \rho_1 = \int_0^{\omega} \rho(t)\, dt < \frac{\varepsilon}{2B^2} e^{-\lambda\omega} (1 - e^{-\lambda\omega})$$

$$\text{(C)} \qquad \rho_2 = \left(\int_0^{\omega} \rho^2(t)\, dt\right)^{1/2} < \frac{\varepsilon}{2B^2} \left(\frac{2\lambda}{e^{2\lambda\omega} - 1}\right)^{1/2} (1 - e^{-\lambda\omega})$$

Пусть $\delta = \varepsilon / 2B$. Справедливы следующие утверждения.

1) Всякое решение $z(t)$ системы (2.3) такое, что $\|z(t_0)\| \leqslant \delta$ не выходит при $t > t_0 \geqslant 0$ из области D.

[1] Норму вектора z можем определить каким-либо другим из известных способов, тогда норма матрицы A определится из соотношения $\|A\| = \max \|Az\|$ при $\|z\| = 1$. В этом случае все последующие выкладки остаются справедливыми при любом таком введении нормы ([7], стр. 111).

2) Существует в области D асимптотически устойчивая периодическая траектория, к которой притягиваются все другие траектории, выходящие из области $\|z\| \leqslant \delta, t \geqslant 0$.

Докажем теорему. Очевидно без нарушения общности можно положить $t_0 = 0$. Согласно формуле Коши имеем

$$z(t) = W(t, 0) z_0 + \int_0^t W(t, \tau)(R(z, \tau) + r(\tau))\, d\tau \tag{2.4}$$

Отсюда согласно (*b*), (*e*) получаем неравенство

$$\|z(t)\| < Be^{-\alpha t}\|z_0\| + B\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}(L\|z\| + \rho(\tau))\, d\tau \tag{2.5}$$

Полагая $u(t) = e^{\alpha t}\|z(t)\|$, запишем (2.5) в виде

$$u(t) < B\|z_0\| + B\int_0^t (Lu(\tau) + e^{\alpha\tau}\rho(\tau))\, d\tau \tag{2.6}$$

Отсюда согласно лемме 1.1 работы [9] получим

$$u(t) < Be^{BLt}\left(\|z_0\| + \int_0^t \rho(\tau) e^{(\alpha - BL)\tau} d\tau\right) \tag{2.7}$$

Следовательно,

$$\|z(t)\| < \Phi_1(t) + \Phi_2(t) \tag{2.8}$$

где

$$\Phi_1(t) = Be^{-\lambda t}\|z_0\|, \qquad \Phi_2(t) = Be^{-\lambda t}\int_0^t \rho(\tau) e^{\lambda\tau} d\tau$$

Предполагая, что $\|z_0\| < \delta = \varepsilon / 2B$, имеем $\Phi_1(t) < {}^1/_2\,\varepsilon$ при $t > 0$. Покажем, что при выполнении любого из условий (A), (B), (C) имеет место неравенство $\sup \Phi_2(t) < \delta$ при $t \geqslant 0$.

Пусть выполнено условие (A); в этом случае имеем

$$\Phi_2(t) < \frac{\varepsilon}{2B}\lambda e^{-\lambda t}\int_0^t e^{\lambda\tau} d\tau$$

Так как

$$e^{-\lambda t}\int_0^t e^{\lambda\tau} d\tau < \frac{1}{\lambda}$$

то получаем сразу требуемый результат.

Пусть выполнено условие (B) теоремы и пусть $t = k\omega + \tau_0$, $0 \leqslant \tau_0 < \omega$, в этом случае имеем

$$\Phi_2(t) < Be^{-k\lambda\omega}[e^{\lambda\omega} + \ldots + e^{(k+1)\omega}]\rho_1 < B\frac{e^{\lambda\omega}}{1 - e^{-\lambda\omega}}\rho_1.$$

Отсюда и следует требуемый результат.

Пусть, наконец, выполнено условие (C). Имеем, очевидно,

$$\Phi_2(t) < Be^{-k\lambda\omega}\sum_{i=0}^{k}\left(\int_{i\omega}^{(i+1)\omega} e^{2\lambda\tau}\, d\tau\right)^{1/2}\rho_2 < B\left(\frac{e^{2\lambda\omega} - 1}{2\lambda}\right)^{1/2}\frac{1}{1 - e^{-\lambda\omega}}\rho_2$$

откуда и следует нужное неравенство.

Итак, при выполнении любого условия (A), (B), (C) имеем $\sup \Phi_2(t) < \delta$ при $t > 0$ и, кроме того, справедливо неравенство $\Phi_1(t) < {}^1/_2\varepsilon$. Таким образом, при $t > 0$ выполняется $\|z(t)\| < \delta + {}^1/_2\varepsilon < \varepsilon$, что и доказывает первую часть сформулированной теоремы.

Чтобы установить существование периодического решения, укажем, настолько большое число $N > 1$, чтобы выполнялось неравенство $\Phi_2(t) \leqslant \delta(N-1)/N$. Так как $\sup \Phi_2(t) < \delta$, то, очевидно, такое N всегда существует. Далее найдем число

$$T = m\omega \geqslant \lambda^{-1} \ln BN$$

где m — целое положительное число.

Так как $\Phi_1(T) \leqslant \delta / N$ при $t > 0$, то $\|z(T)\| \leqslant \delta$, если $\|z(0)\| \leqslant \delta$.

Таким образом, отображение $z = z(T)$ переводит область $\|z\| \leqslant \delta$ в свою часть. Чтобы применить теперь известный принцип сжатых отображений ([10], стр. 90), рассмотрим в области $\|z\| \leqslant \delta$ две точки z_0 и y_0; разность двух решений системы (2.3), определяемых этими точками, удовлетворяет интегральному уравнению

$$z(t) - y(t) = W(t, 0)(z_0 - y_0) + \int_0^t W(t, \tau)(R(z, \tau) - R(y, \tau))\, d\tau$$

Отсюда сразу получаем неравенство

$$\|z(t) - y(t)\| < Be^{-\alpha t} \|z_0 - y_0\| + BL \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} \|z(\tau) - y(\tau)\|\, d\tau \qquad (2.9)$$

Вводя обозначения $u(t) = \|z(t) - y(t)\| e^{\alpha t}$, имеем

$$\|z(t) - y(t)\| < B\|z_0 - y_0\| + BL \int_0^t u(\tau)\, d\tau$$

Отсюда в силу известной леммы [9] получим

$$u(t) < B\|z_0 - y_0\| e^{BLt}$$

Таким образом, окончательно имеем

$$\|z(t) - y(t)\| < B\|z_0 - y_0\| e^{-\lambda t} \qquad (2.10)$$

Так как $Be^{-\lambda T} \leqslant \frac{1}{N}$, то имеем

$$\|z(T) - y(T)\| < \frac{1}{N}\|z_0 - y_0\|$$

Итак, выполнены условия применения принципа сжатых отображений, в силу которого в области $\|z\| \leqslant \delta$ существует единственная неподвижная точка y_0 такая, что $y(T) = y(0) = y_0$. Эта точка и определяет нужное нам периодическое движение. Так как $y(\omega) = y(\omega + T)$, то точка $y(\omega)$, являясь неподвижной точкой, необходимо должна совпадать с $y(0)$. Таким образом, период $y(t)$ равен ω. Асимптотическая устойчивость $y(t)$ следует из (2.10).

3. Рассмотрим случай, когда конструируемое периодическое движение $x_i = \psi_i(t)$ может иметь конечное число точек разрыва первого рода. В этом случае апроксимируемые программирующие функции должны иметь вид

$$\varphi_i(t) = \psi_i'(t) - f_i(\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t), t) \qquad (i = 1, \ldots, n) \qquad (3.1)$$

в точках существования производной $\psi_i'(t)$ и

$$\varphi_i(t) = \eta_{ik}\delta(t - t_k) \tag{3.2}$$

в точках разрыва $t_1, \ldots, t_m$. Здесь η_{ik} — величина разрыва функции $\varphi_i(t)$ при $t = t_k$, $\delta(t - t_k)$ — функция Дирака.

Предполагая, что функцию $\varphi_i(t)$ будем апроксимировать функциями такого же типа, представим ошибку приближения в виде

$$r_i(t) = r_i^\circ(t) + \sum_{k=1}^{m} r_{ik}\delta(t - t_k) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{3.3}$$

где $r_i^\circ(t)$ — абсолютно интегрируемые функции на $[0, \omega]$.

Проводя замену переменной $z_i = x_i - \psi_i(t)$ в системе (1.1), снова придем к системе (2.1) и, выделяя по какому-либо правилу линейную часть, получим систему (2.3). Следует, однако, заметить, что даже в случае, когда функции $f_i(x_1, \ldots, x_n, t)$ системы (1.1) непрерывно дифференцируемы по $x_1, \ldots, x_n$, матрица $A(t)$ и функция $R(z, t)$ могут оказаться разрывными функциями. В более общем случае при выделении системы первого приближения и решения задачи устойчивости этой системы следует иметь в виду результаты, полученные М. А. Айзерманом и Ф. Р. Гантмахером [11].

Пусть

$$\rho(t) = \rho^\circ(t) + \sum_{k=1}^{m} \gamma_k\delta(t - t_k) \tag{3.4}$$

где

$$\rho(t) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |r_i^\circ(t)| \qquad \text{при } t \neq t_k, \qquad \gamma_k = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |r_{ik}|$$

Теорема 3.1. Пусть выполнены условия (*a*), (*b*), (*c*), (*e*), (*f*) и функции $r_i(t)$ представимы в виде (3.3). Пусть $\delta = \varepsilon / 2B$ и имеет место неравенство

$$\rho_1 = \int_0^{\omega - 0} \rho(t)\,dt = \int_0^{\omega} \rho^\circ(t)\,dt + \sum_{k=1}^{m} \gamma_k < \frac{\varepsilon}{2B^2} e^{-\lambda\omega}(1 - e^{-\lambda\omega})$$

При этих условиях справедливы оба утверждения теоремы (2.1).

Доказательство теоремы (3.1) в точности повторяет доказательство теоремы (2.1). В самом деле, формула (2.4), очевидно, имеет место и в данном случае, если учесть правило интегрирования выражений, содержащих функцию Дирака.

Сомнение вызывает лишь переход от неравенства (2.6) к неравенству (2.7). Покажем, что этот переход оправдан. Так как при $t = 0$ неравенство (2.7) справедливо и обе части неравенства непрерывны справа, то оно будет справедливым и при $0 \leqslant t < h$, где h — некоторое число.

Пусть τ_0 — нижняя грань чисел t, для которых (2.7) не выполняется. В силу непрерывности справа обеих частей (2.7) имеем

$$u(\tau_0) \geqslant Be^{BL\tau_0}\left(\|z_0\| + \int_0^{\tau_0} \rho(\tau)\, e^{(\alpha - BL)\tau} d\tau \right) \tag{3.5}$$

С другой стороны, полагая $t = \tau_0$ в (2.6) и заменяя $u(t)$ под интегралом большей величиной из (2.7), получим

$$u(\tau_0) < Be^{BL\tau_0}\|z_0\| + B^2L\int_0^{\tau_0} e^{BLt}\int_0^t \rho(\tau)e^{(\alpha-BL)\tau}\,dt + B\int_0^{\tau_0} e^{\alpha\tau}\rho(\tau)\,d\tau$$

Применяя ко второму интегралу правило дифференцирования по частям (справедливое в рассматриваемых условиях, так как здесь речь идет по существу об интеграле Стильтьеса и интеграл

$$\int_0^{\tau_0} e^{\alpha\tau}\rho(\tau)\,d\tau$$

существует), получим неравенство, противоречащее неравенству (3.5). Далее доказательство теоремы (3.1) полностью повторяет доказательство теоремы (2.1).

Заметим, что теорема (3.1) может быть сформулирована для более общего случая, когда программирующие функции $\varphi_i(t)$ имеют ограниченную вариацию. В этом случае следует рассматривать уравнение

$$z(t) = W(t, t_0)z_0 + \int_{t_0}^t W(t,\tau)R(z,\tau)\,d\tau + \int_{t_0}^t W(t,\tau)dG$$

где второй интеграл есть интеграл Стильтьеса с интегрирующей функцией $G(t)\,(G_1(t), \ldots, G_n(t))$, имеющей ограниченную вариацию. Этот случай сводится к предыдущему, если ввести обобщенные функции $r_i(t)$, определяя их условием $r_i(t) = G_i'(t)$ в точках существования производной и $r_i(t) = r_{ik}\delta(t - t_k)$ в точках разрыва $G_i(t)$ (r_{ik} — величина разрыва). В данном случае множество точек разрыва функции $G_i(t)$ может быть и бесконечным (но счетным).

Еще более общий подход к задаче возможен на основе понятия обобщенного дифференциального уравнения, введенного на основе обобщения интеграла Перрона Я. Курцвейлем [12].

4. Пользуясь схемой доказательства теоремы 2.1 и одной идеей статьи [13], можно перенести часть результатов указанной теоремы на случай, когда система (1.1) так же, как и программируемый режим $x_i = \psi_i(t)$, не является периодической.

Пусть ω — произвольное положительное число и

$$\rho(t) = \|r(t)\|, \qquad h_0 = \sup_{0\leqslant t\leqslant\infty} \rho(t)$$

$$h_1 = \sup_{0\leqslant t<\infty} \int_0^{t+\omega} \rho(t)\,dt, \qquad h_2 = \sup_{0\leqslant t<\infty}\left(\int_t^{t+\omega} \rho^2(t)\,dt\right)^{1/2}$$

Теорема 4.1. Пусть выполнены условия (b), (c), (d), (e), (f) (с той разницей, что интегрируемость соответствующих функций должна иметь место на любом отрезке $[t, t+\omega]$, $t \geqslant 0$) и выполняется хотя бы одно из неравенств

$$(\mathrm{A}') \qquad h_0 < \frac{\varepsilon}{2B}\lambda$$

$$(\mathrm{B}') \qquad h_1 < \frac{\varepsilon}{2B}e^{-\lambda\omega}(1 - e^{-\lambda\omega})$$

$$(\mathrm{C}') \qquad h_2 < \frac{\varepsilon}{2B}\left(\frac{2\lambda}{e^{2\lambda\omega} - 1}\right)^{1/2}(1 - e^{-\lambda\omega})$$

Всякое решение $z(t)$ системы (2.3), определяемое условием

$$\|z(0)\| \leqslant \varepsilon/2B$$

не выйдет при $t \geqslant 0$ из области D.

Доказательство теоремы (4.1) проходит точно так же, как и доказательство первой части теоремы (2.1), с той лишь разницей, что вместо неравенства $\Phi_2(t) < \varepsilon/2B$ достаточно выполнения неравенства

$$\Phi_2(t) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Наконец, рассмотрим случай, когда апроксимируемое (непериодическое) движение $x_i = \psi_i(t)$ имеет изолированные разрывы первого рода. В этом случае предположим, что снова для $r_i(t)$ имеет место представление (3.3) и определим обобщенную функцию $\rho(t)$ согласно (3.4).

Пусть

$$h_1 = \sup_{0 \leqslant t < \infty} \int_t^{t+\omega-0} \rho(t)\, dt$$

Повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теорем 2.1 и 3.1, убедимся, что при

$$h_1 < \varepsilon/2Be^{-\lambda\omega}(1 - e^{-\lambda\omega})$$

решение $z(t)$ системы (2.3), определенное условием $\|z(0)\| < \varepsilon/2B$, не выйдет при $t > 0$ за пределы области D.

Таким образом, и в этом последнем случае мы можем осуществить желаемый программируемый режим приближенно с точностью до ε.

Поступила 30 I 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Летов А. М. Устойчивость нелинейных регулируемых систем. ГИТТЛ, 1955.
2. Гермаидзе В. Е., Красовский Н. Н. Об устойчивости при постоянно действующих возмущениях. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 6.
3. Артемьев Н. А. Осуществимые движения. Изв. АН СССР, серия матем., 1939, № 3.
4. Артемьев Н. А. Осуществимые траектории. Изв. АН СССР, серия матем., 1939, № 4.
5. Antosiewicz H. A. Forced periodic solutions of systems of differential equations. Ann. Math., 1953, Vol. 57, № 2.
6. Красовский Н. Н. О периодических решениях дифференциальных уравнений с запаздываниями времени. ДАН СССР, 1957, т. 114, № 2.
7. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. Физматгиз, 1959.
8. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения.II. ИИЛ, М., 1954.
9. Либерман Л. Х. Об устойчивости решений интегродифференциальных уравнений. Изв. ВУЗов, Математика, 1958, 3 (4).
10. Эльсгольц Л. Э. Качественные методы в математическом анализе. ГИТТЛ, 1955.
11. Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р. Устойчивость по линейному приближению периодического решения системы дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 5.
12. Курцвейль Я. Об обобщенных обыкновенных дифференциальных уравнениях, обладающих разрывными решениями. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 1.
13. Massera I. Z., Schäffer T. T. Zinear differential equations and functional analysis, I. Ann. Math., 1958, Vol. 57, № 3.
14. Гермаидзе В. Е. О периодических решениях, устойчивых по Ляпунову. Тр. Уральск. политехн. ин-та. Математика, сб. 113, 1961.