Прикладная математика и механика. Том XXV, 1961
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

О КРИТИЧЕСКИХ СЛУЧАЯХ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЛЯПУНОВУ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ

Л. М. Мархашов

(Москва)

1. Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^i}{dt} = X^i(a, x) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

Функции $X^i(a, x)$ не зависят явно от t и голоморфны относительно переменных x^j в достаточно малой окрестности H точки покоя $x^1 = \ldots = x^n = 0$

$$X^i(a, x) = \sum_{s=1}^{\infty} q_s^i(a, x)$$

В однородных формах степени $s \geqslant 1$

$$q_s^i(a, x) = a^i_{i_1 \ldots i_s} x^{i_1} \ldots x^{i_s}$$

индексы суммирования $i_1 \ldots i_s$ принимают независимо друг от друга все значения от 1 до n. Коэффициенты $a^i_{i_1 \ldots i_s}$ предполагаются неопределенными; они симметричны относительно нижних индексов.

Пусть m — произвольно фиксированное натуральное число. Положим

$$P_m^i(a, x) = \sum_{s=1}^{m} q_s^i(a, x), \qquad R_m^i(a, x) = \sum_{s=m+1}^{\infty} q_s^i(a, x)$$

В статье формулируются некоторые положения, касающиеся получения условий, которым необходимо удовлетворяют коэффициенты $a^i_{i_1}, \ldots, a^i_{i_1 \ldots i_m}$ полиномов $P_m^i(a, x)$ в случаях, когда система уравнения m-го приближения

$$\frac{dx^i}{dt} = P_m^i(a, x) \tag{1.2}$$

не позволяет решить вопрос об устойчивости тривиального решения системы (1.1).

Идея работы состоит в следующем. К системе (1.1) применяется общее аналитическое преобразование координат с якобианом, отличным от нуля в точке $x = 0$. В силу его свойств, решения системы (1.1) и системы, полученной из нее с помощью такого преобразования, устойчивы либо неустойчивы одновременно. Поэтому в критических случаях, то есть тогда, когда система (1.2) не позволяет решить вопрос об устойчивости решения системы (1.1), невозможно найти такое аналитическое преобразование, что в преобразованной системе коэффициенты функций $P_m^i(a,x)$ оставались бы прежними, а коэффициенты функций $R_m^i(a, x)$ становились какими-либо наперед заданными.

Условия невозможности осуществления в критических случаях указанного преобразования дают необходимые условия для критических случаев. Равенства, которыми выражаются эти условия, оказываются уравнениями инвариантных многообразий некоторой группы преобразований коэффициентов a функций $P^i_m(a, x)$.

В работе используются некоторые простые факты теории непрерывных групп преобразований [1, 2].

2. Всевозможные вещественные значения, которые могут принимать коэффициенты $a^i_{i_1}, \ldots, a^i_{i_1\ldots i_m}$, рассматриваются как координаты точек эвклидового пространства E_{N_m} размерности N_m, равной общему числу коэффициентов a в функциях P^i_m (a, x) $(i = 1, \ldots, n)$.

В последовательности $E_{N_1}, \ldots, E_{N_m}$ каждое из пространств E_{N_σ} $(\sigma = 1, \ldots, m-1)$ вложено в любое из последующих

$$E_{N_1} \subset E_{N_2} \subset \ldots \subset E_{N_m}$$

и является его плоским подпространством размерности N_σ. Пространство E_{N_m} является N_m-мерным расширением пространства E_{N_σ}.

Точку пространства E_{N_m} назовем некритической устойчивой (неустойчивой), если ее координаты таковы, что тривиальное решение системы (1.1) устойчиво (неустойчиво) независимо от величин коэффициентов $a^i_{i_1\ldots i_{m+1}}, a^i_{i_1\ldots i_{m+2}}, \ldots, a^i_{i_1\ldots i_{m+\mu}}$ функций $R^i_m(a, x)$. Здесь μ—конечное натуральное число.

Те точки пространства E_{N_m}, для которых изменением этих коэффициентов можно получить по желанию устойчивость или неустойчивость тривиального решения системы (1.1), назовем критическими.

Множества некритических точек пространства E_{N_m} непусты. Это следует из одной теоремы Н. Н. Красовского [3, 4]. Существуют также примеры, доказывающие непустоту множества критических точек.

Отметим, что некритичность коэффициентов системы (1.2) связана с ее грубостью [4]; однако утверждать, что коэффициенты грубой системы определяют некоторую точку некритического множества, можно лишь в случае $P^i_m(a, x) = q^i_m(a, x)$, в котором доказано существование необходимых оценок для функции Ляпунова и ее производной [3, 4].

Рассмотрим общее аналитическое преобразование координат

$$x^i = \varphi^i(x', \alpha) = \sum_{s=1}^{\infty} \alpha^i_{i_1\ldots i_s} x'^{i_1} \ldots x'^{i_s} \tag{2.1}$$

$$\left.\frac{\partial(\varphi^1, \ldots, \varphi^n)}{\partial(x'^1, \ldots, x'^n)}\right|_{x'=0} \equiv |\alpha^i_{i_1}| \neq 0 \tag{2.2}$$

В силу условия (2.2) найдется окрестность $h \subset H$ точки $x = 0$, в которой оно реализует взаимнооднозначное соответствие между переменными x^i и x'^i.

Следовательно, переменные x^i и x'^i при любых конечных значениях параметров α, стесненных лишь условием (2.2), эквивалентны в отношении устойчивости по Ляпунову, так как последняя является локальным свойством точки покоя [5, 6].

Преобразовав систему (1.1) при помощи преобразования (2.1), получим

$$\frac{dx^i}{dt} = X^i(a', x') \tag{2.3}$$

$$a'^j = f^j(a, \alpha) \tag{2.4}$$

где $f^j(a, \alpha)$, как показано в п. 3, суть целые рациональные функции a и α и таковы, что $a'^i_{i_1}, \ldots, a'^i_{i, \ldots, m}$ зависят от величин

$$a^i_{i_1}, \ldots, a^i_{i_1 \ldots i_m}, \qquad \alpha^i_{i_1}, \ldots, \alpha^i_{i_1 \ldots i_m}$$

и только от них. Поэтому соотношения (2.4) являются преобразованиями каждого из пространств $E_{N_1}, E_{N_2}, \ldots$ в себя.

Покажем, что преобразования (2.4) образуют группу.

Преобразования $x'^i = \varphi^i(x'', \alpha')$ преобразуют систему (2.3) в систему

$$\frac{dx''^i}{dt} = X^i(a'', x''), \quad a''^j = f^j(a', \alpha') = f^j[f^j(a, \alpha), \alpha'] \tag{2.5}$$

С другой стороны, преобразуя уравнения (1.1) непосредственно при помощи преобразования

$$x^i = \varphi^i(x', \alpha) = \varphi^i[\varphi^i(x'', \alpha'), \alpha] = \varphi^i[x'', \beta(\alpha, \alpha')]$$

получим ту же систему (2.5), в которой

$$a''^j = f^j[a, \beta(\alpha, \alpha')]$$

Сравнивая значения a''^j в первом и во втором случаях, а также, замечая, что аналитическое преобразование (2.1) обратимо (а следовательно, обратимы и преобразования (2.4)) и при $a^j_i = \delta^j_i$, $\alpha^j_{i_1 \ldots i_s} = 0$ $(s \geqslant 2)$ совпадает с тождественным, убеждаемся в справедливости исходного утверждения.

Так как (2.4) — суть преобразования пространств $E_{N_1}, E_{N_2}, \ldots$ в себя, то те из них, которые преобразуют точки данного пространства E_{N_m}, образуют конечную непрерывную группу.

3. Найдем преобразования (2.4). Подставив в уравнения (1.1) значения x^i из (2.1) и значения dx^i/dt из (2.3), приравнивая между собой альтернированные коэффициенты при одинаковых степенях $x'^{\varkappa_1} \ldots x'^{\varkappa_k}$, входящих в левую и правую части полученных тождеств, после преобразований найдем

$$\sum_{(\varkappa_1 \ldots \varkappa_k)} \Big(\sum_{\mu=1}^{k} \mu \alpha^j_{\delta \varkappa_1 \ldots \varkappa_{\mu-1}} a'^\delta_{\varkappa_\mu \ldots \varkappa_k} -$$

$$- \sum_{s=1}^{k} \sum_{\mu_1 + \ldots + \mu_s = k} a^j_{i_1 \ldots i_s} \alpha^{i_1}_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_{\mu_1}} \ldots \alpha^{i_s}_{\varkappa_{\mu_1 + \ldots \mu_{s-1}+1} \ldots \varkappa_k} \Big) = 0 \tag{3.1}$$

$$(j, \delta, \varkappa, i = 1, 2, \ldots, n; \ k = 1, 2, \ldots)$$

Здесь и в дальнейшем индексы в скобках $(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_k)$, стоящие под знаком суммы, означают суммирование по всевозможным перестановкам индексов $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_k$.

Определим величины $\alpha_j^{*\varepsilon}$ соотношениями

$$\alpha_\alpha^j \alpha_j^{*\varepsilon} = \delta_\alpha^\varepsilon$$

где $\delta_\alpha^\varepsilon$ — символ Кронекера.

В силу (2.2), соотношения (3.1) однозначно разрешимы относительно $a'^{\varepsilon}_{\varkappa_1\ldots\varkappa_k}$. Имеем

$$a'^{\varepsilon}_{\varkappa_1\ldots\varkappa_k} = \sum_{(\varkappa_1\ldots\varkappa_k)} \Bigl(\sum_{s=1}^{k} \sum_{\mu_1+\ldots+\mu_s=k} a^j_{i_1\ldots i_s} \alpha^{i_1}_{\varkappa_1\ldots\varkappa_{\mu_1}} \ldots \alpha^{i_s}_{\varkappa_{\mu_1+\ldots+\mu_{s-1}+1}\ldots\varkappa_k} -$$

$$- \sum_{\mu=2}^{k} \mu a'^{\delta}_{\varkappa_\mu\ldots\varkappa_k} \alpha^j_{\delta\varkappa_1\ldots\varkappa_{\mu-1}}\Bigr) \alpha_j^{*\varepsilon} \qquad (3.2)$$

так что преобразования (2.4) можно записать в такой последовательности

$$k=1, \qquad a'^{\varepsilon}_{\varkappa_1} = a^j_{i_1} \alpha^{i_1}_{\varkappa_1} \alpha_j^{*\varepsilon}$$

$$k=2, \qquad a'^{\varepsilon}_{\varkappa_1\varkappa_2} = (a^j_{i_1i_2} \alpha^{i_1}_{\varkappa_1} \alpha^{i_2}_{\varkappa_2} + a^j_{i_1} \alpha^{i_1}_{\varkappa_1\varkappa_2} - a'^{\delta}_{\varkappa_1} \alpha^j_{\delta\varkappa_2} - a'^{\delta}_{\varkappa_2} \alpha^j_{\delta\varkappa_1}) \alpha_j^{*\varepsilon}, \ldots$$

Отсюда, в частности, видна обратимость преобразований (2.4).

Понимая под $a^1, \ldots, a^{N_m}$ и $\alpha^1, \ldots, \alpha^{N_m}$ одномерно упорядоченные системы величин $a^j_{i_1}, \ldots, a^j_{i_1\ldots i_m}$ и $\alpha^j_{i_1}, \ldots, \alpha^j_{i_1\ldots i_m}$, найдем компоненты $\xi^i_b(a)$ векторной матрицы, определяющей инфинитезимальные операторы

$$X_b f = \xi^i_b(a) \frac{\partial f}{\partial a^i} \qquad (i,\ b = 1, \ldots, N_m)$$

группы преобразований пространства E_{N_m}.

Условившись в каком-либо определенном порядке нумерации величин a и α, одинаковом для обоих последовательностей, значения

$$\xi^i_b(a) = \left(\frac{\partial a'^i}{\partial \alpha^b}\right)_{\alpha=\alpha^\circ}$$

будем вычислять при $\overset{\circ}{\alpha}{}^j_i = \delta^j_i$, $\overset{\circ}{\alpha}{}^j_{i_1i_2} = \overset{\circ}{\alpha}{}^j_{i_1i_2i_3} = \ldots = 0$. Продифференцировав (3.1) по $\alpha^\alpha_{\gamma_1\ldots\gamma_l}$ и приняв затем α равными указанным частным значениям, после преобразований найдем

$$\left(\frac{\partial a'^j_{\varkappa_1\ldots\varkappa_k}}{\partial \alpha^\alpha_{\gamma_1\ldots\gamma_l}}\right)_{\alpha=\alpha^\circ} = \qquad (3.3)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{k!} \sum\limits_{(\varkappa_1\ldots\varkappa_l)} \Bigl[(k-l+1)\, a^j_{\alpha\varkappa_1\ldots\varkappa_{k-l}} \delta^{\gamma_1\ldots\gamma_l}_{\varkappa_{k-l+1}\ldots\varkappa_k} - l a^\delta_{\varkappa_l\ldots\varkappa_k} \delta^j_\alpha \delta^{\gamma_1\ldots\gamma_l}_{\delta\varkappa_1\ldots\varkappa_{l-1}}\Bigr] & \text{при } k \geqslant l \\ 0 \qquad \text{при } k < l \end{cases}$$

Здесь $\delta^{\gamma_1\ldots\gamma_l}_{\beta_1\ldots\beta_l}$ — тензор Кронекера, взятый по модулю.

Векторная матрица группы преобразований пространства E_{N_m} может быть записана в блочной форме

$$\mathrm{M}_m = \begin{Vmatrix} (a^j_{i_1})^1_1 & (a^j_{i_1i_2})^2_1 & \ldots & (a^j_{i_1\ldots i_m})^m_1 \\ 0 & (a^j_{i_1})^2_2 & \ldots & (a^j_{i_1\ldots i_{m-1}})^m_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & (a^j_{i_1})^m_m \end{Vmatrix}$$

в которой блок

$$(a^j_{i_1\ldots i_{k-l+1}})^k_l = \left\| \left(\frac{\partial a'^j_{\varkappa_1\ldots\varkappa_k}}{\partial \alpha^\alpha_{\gamma_1\ldots\gamma_l}} \right)_{\alpha=\alpha^\circ} \right\| \qquad (l \leqslant k \leqslant m)$$

является матрицей с элементами, зависящими (притом линейно) от величин a, имеющих точно $k - l + 1$ нижних индексов.

Векторная матрица M_σ группы преобразований пространства $E_{N_\sigma}(\sigma \leqslant m)$ получается из M_m выделением главной диагональной матрицы порядка N_σ.

Покажем, что для $\sigma \geqslant 2$ порядок группы преобразований пространства E_{N_σ} равен N_σ. Для этого достаточно убедиться в том, что матрица M_m не содержит строк линейнозависимых с постоянными коэффициентами. Докажем это сперва для матрицы

$$\| (a^j_{i_1})^1_1 \quad (a^j_{i_1 i_2})^2_1 \ldots (a^j_{i_1\ldots i_m})^m_1 \| \tag{3.4}$$

В самом деле, компоненты ее блока $(a^j_{i_1 i_2})^2_1$ в точке $a^j_{i_1 i_2} = \delta^{jj}_{i_1 i_2}$ имеют вид

$$\left(\frac{\partial a'^j_{\varkappa_1\varkappa_2}}{\partial \alpha^\alpha_\gamma} \right)_{\alpha=\alpha^\circ} = \delta^{jj}_{\alpha\varkappa_1}\delta^\gamma_{\varkappa_2} + \delta^{jj}_{\alpha\varkappa_2}\delta^\gamma_{\varkappa_1} - \delta^{\gamma\gamma}_{\varkappa_1\varkappa_2}\delta^j_\alpha$$

Выбирая те из столбцов, для которых $\varkappa_2 = j$, и учитывая

$$\delta^{\gamma\gamma}_{\varkappa_1\varkappa_2} = \delta^{(\gamma)}_{\varkappa_1}\delta^{(\gamma)}_{\varkappa_2} = \delta^{(\gamma)}_{\varkappa_1}\delta^{(\gamma)}_j$$

(по индексу, взятому в скобки, суммирование не производится), составим квадратную диагональную матрицу с определителем порядка N_1

$$\left| \left(\frac{\partial a'^j_{\varkappa_1 j}}{\partial \alpha^\alpha_\gamma} \right)_{\alpha=\alpha^\circ} \right| = | \delta^{(j)}_\alpha \delta^{(j)}_{\varkappa_1} | = 1$$

Поэтому строки матрицы (3.4) линейно независимы.

В соотношении (3.3) положим $k = m = l$, $a^j_{i_1} = \delta^j_{i_1}$. Получим

$$\left(\frac{\partial a'^j_{\varkappa_1\ldots\varkappa_l}}{\partial \alpha^\alpha_{\gamma_1\ldots\gamma_l}} \right)_{\alpha=\alpha^\circ} = \frac{1}{l!} \sum_{(\varkappa_1\ldots\varkappa_l)} \left(\delta^j_\alpha \delta^{\gamma_1\ldots\gamma_l}_{\varkappa_1\ldots\varkappa_l} - l\delta^\delta_{\varkappa_l}\delta^j_\alpha\delta^{\gamma_1\ldots\gamma_l}_{\delta\varkappa_1\ldots\varkappa_{l-1}} \right) =$$

$$= \frac{1-l}{l!} \sum_{(\varkappa_1\ldots\varkappa_l)} \delta^j_\alpha \delta^{\gamma_1\ldots\gamma_l}_{\varkappa_1\ldots\varkappa_l} = (1-l)\, \delta^j_\alpha \delta^{\gamma_1\ldots\gamma_l}_{\varkappa_1\ldots\varkappa_l}$$

При принятом способе нумерации последовательностей a и α матрица

$$\| (1-l)\, \delta^j_\alpha \delta^{\gamma_1\ldots\gamma_l}_{\varkappa_1\ldots\varkappa_l} \|$$

диагональна и ее определитель

$$| (a^j_{i_1})^l_l | = (1-l)^{N_l - N_{l-1}} \neq 0 \qquad (l \neq 1) \tag{3.5}$$

Поэтому ранг матрицы

$$\left\| \begin{matrix} (a^j_{i_1})^2_2 & (a^j_{i_1 i_2})^3_2 & \ldots & (a^{j!}_{i_1\ldots i_{m-1}})^m_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & (a^j_{i_1})^m_m \end{matrix} \right\| \tag{3.6}$$

равен $N_m - N_1$.

Ясно, что никакая из строк матрицы (3.6) не может быть линейной комбинацией с постоянными коэффициентами строк матрицы (3.4), и наоборот, потому, что такая комбинация связывала бы величины a с различным числом нижних индексов, что невозможно.

Таким образом, точки пространства E_{N_m} преобразуются группой преобразований $G_{N_m}(m \neq 1)$ порядка N_m.

Можно показать, что при $m = 1$ имеем группу $G_r(r < N_1)$.

4. Пусть $b_1'^{i_1} = f_1^{i_1}(b_1, \beta_1)$ — преобразования группы G_{n_1} пространства E_{n_1}, с инфинитезимальными операторами

$$X^1_{l_1}f = \xi^{i_1}_{1l_1}(b_1)\frac{\partial f}{\partial b_1^{i_1}}, \qquad \xi^{i_1}_{1l_1}(b_1) = \left(\frac{\partial f_1{}^{i_1}}{\partial \beta_1{}^{l_1}}\right)_{\beta_1=\beta_1{}^\circ} \qquad (l_1,\ i_1 = 1,\ \ldots,\ n_1)$$

и пусть преобразования пространства $E_{n_2}(n_2 > n_1)$

$$b_1'^{i_1} = f_1^{i_1}(b_1,\ \beta_1) \qquad b_2'^{i_2} = f_2^{i_2}(b_1,\ b_2,\ \beta_1,\ \beta_2) \qquad \begin{pmatrix} i_1 = 1,\ \ldots,\ n_1 \\ i_2 = 1,\ \ldots,\ n_2 - n_1 \end{pmatrix}$$

образуют группу G_{n_2} с операторами

$$\begin{aligned} X^2_{l_1}f &= \xi^{i_1}_{1l_1}(b_1)\frac{\partial f}{\partial b_1{}^{i_1}} + \xi^{i_2}_{2l_1}(b_2)\frac{\partial f}{\partial b_2{}^{i_2}} \\ X^2_{l_2}f &= \qquad\qquad\qquad \xi^{i_2}_{2l_2}(b_1)\frac{\partial f}{\partial b_2^{i_2}} \end{aligned} \qquad (i_2,\ l_2 = 1,\ \ldots,\ n_2 - n_1)$$

$$\xi^{i_2}_{2l_1}(b_2) = \left(\frac{\partial f_2^{i_2}}{\partial \beta_1^{l_1}}\right)_{\beta=\beta^\circ}, \qquad \xi^{i_2}_{2l_2}(b_1) = \left(\frac{\partial f_2^{i_2}}{\partial \beta_2^{l_2}}\right)_{\beta=\beta^\circ} \tag{4.1}$$

Значениям $\beta = \beta^\circ$ соответствует тождественное преобразование обеих групп.

Пусть далее

$$|\xi^{i_2}_{2l_2}(b_1)| \neq 0 \tag{4.2}$$

и общий ранг матрицы $\|\xi^{i_1}_{1l_1}\|$ равен $r \leqslant n_1$. Очевидно, не все миноры порядка $n_2 - n_1 + q\,(q \leqslant r)$ матрицы

$$M(b_1,\ b_2) = \begin{Vmatrix} \xi^{i_1}_{1l_1}(b_1) & \xi^{i_2}_{2l_1}(b_2) \\ 0 & \xi^{i_2}_{2l_2}(b_1) \end{Vmatrix}$$

тождественные нули. При любом $q \leqslant r$ среди них найдутся такие, которые зависят только от величин b_1; таковы, например, диагональные миноры. Поэтому полная система соотношений, в силу которых обращаются в нуль все миноры порядка $n_2 - n_1 + q$ матрицы $M(b_1,\ b_2)$, может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} &\varphi^q_{11}(b_1) = \ldots = \varphi^q_{1\rho_1}(b_1) = \varphi^q_{1,\,\rho_1+1}(b_1,\ b_2) = \ldots = \varphi^q_{1\tau_1}(b_1,\ b_2) = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\varphi^q_{\pi 1}(b_1) = \ldots = \varphi^q_{\pi\rho_\pi}(b_1) = \varphi^q_{\pi,\,\rho_\pi+1}(b_1,\ b_2) = \ldots = \varphi^q_{\pi\tau_\pi}(b_1,\ b_2) = 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Здесь φ — независимые целые рациональные функции своих аргументов. Каждая из цепочек равенств определяет некоторое неприводимое односвязное многообразие размерности $n_2 - \tau$, которое является инвариантным многообразием группы G_{n_2}; оно состоит из особых точек порядка не выше $n_2 - n_1 + q - 1$. π — число таких многообразий. Предполагается, что из всевозможных аналитических представлений каждого из неприводимых многообразий выбрано такое, для которого соответствующее число ρ — максимально. Имеет место следующая лемма.

Лемма. Какова бы ни была точка $b_1^*(b_1^{*1}, \ldots, b_1^{*n_1})$ пространства E_{n_1},— обыкновенная ($q = r$), или особая порядка $q < r$, если она такова, что никаким подбором параметров β_1^j, β_2^j нельзя осуществить преобразование

$$b_1^{*i_1} = f_1^{i_1}(b_1^*, \beta_1), \qquad b_2^{'i_2} = f_2^{i_2}(b_1^*, b_2, \beta_1, \beta_2) \tag{4.4}$$

в котором все $b_2^{'i_2}$ — некоторые, наперед заданные числа, то координаты точки b_1^* необходимо удовлетворяют по крайней мере одному из соотношений

$$\begin{array}{l} \varphi_{11}^q(b_1) = \ldots = \varphi_{1\rho_1}^q(b_1) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{\pi 1}^q(b_1) = \ldots = \varphi_{\pi\rho_\pi}^q(b_1) = 0 \end{array} \tag{4.5}$$

Доказательство. Для точки b_1^* — пусть особой порядка q — построим стационарную подгруппу H_{n_1-q} группы G_{n_1}. Конечные преобразования этой подгруппы

$$b_1^{'i_1} = f_1^{i_1}[b_1, \beta_1(u)] \qquad (b_1^{*i_1} = f_1^{i_1}[b_1^*, \beta_1(u)])$$

содержат $n_1 - q$ существенных параметров $u^1, \ldots, u^{n_1-q}$; значениям $u^\nu = u^{\circ\nu}$ ($\beta_1^{\circ\mu} = \beta_1^\mu(u^\circ)$) соответствует тождественное преобразование.

Положим

$$c_\nu^{l_1} = \left(\frac{\partial \beta_1^{l_1}}{\partial u^\nu}\right)_{u=u^\circ}$$

Ранг матрицы $\|c_\nu^{l_1}\|$ равен $n_1 - q$. Без нарушения общности

$$\|c_\nu^{l_1}\| = \left\| \begin{array}{ccc} c_1^1 \ldots c_1^q & 1 \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ c_{n_1-q}^1 \ldots c_{n_1-q}^q & 0 \ldots 1 \end{array} \right\|$$

В противном случае, достаточно параметры $\beta_1^{q+1}, \beta_1^{q+2}, \ldots, \beta_1^{n_1}$ группы G_{n_1} заменить новыми согласно формулам

$$\beta_1^{q+1} = \beta_1^{q+1}(u), \ldots, \beta_1^{n_1} = \beta_1^{n_1}(u)$$

Это возможно, так как, не нарушая общности, можно считать

$$\frac{\partial(\beta_1^{q+1}, \ldots, \beta_1^{n_1})}{\partial(u^1, \ldots, u^{n_1-q})} \neq 0$$

Складывая с μ-й строкой матрицы $M(b_1, b_2)$ ($q < \mu \leqslant n_1$) строки с номерами $1, 2, \ldots, q$, умноженные соответственно на $c_{\mu-q}^1, \ldots, c_{\mu-q}^q$, получим

$$M(b_1, b_2) = \left\| \begin{array}{c:c} \xi_{1\varepsilon}^{i_1}(b_1) & \xi_{2\varepsilon}^{i_2}(b_2) \\ \hdashline \xi_{1\mu}^{i_1}(b_1) + c_{\mu-q}^{\omega}\xi_{1\omega}^{i_1}(b_1) & \\ \hdashline 0 & M_* \end{array} \right\| \qquad \left(\begin{array}{l} \omega, \varepsilon = 1, \ldots, q \\ \mu = q+1, \ldots, n_1 \end{array}\right)$$

Здесь, в силу (4.2), и так как

$$\left(\frac{\partial f_2^{'i_2}}{\partial u^\nu}\right)_{u=u^\circ} = c_\nu^{l_1}\xi_{2l_1}^{i_2}(b_2) = \xi_{2\mu}^{i_2}(b_2) + c_{\mu-q}^{\omega}\xi_{2\omega}^{i_2}(b_2)$$
$$(\nu = 1, \ldots, n_1 - q)$$

матрица M_* равна

$$M_* = \left\| \begin{matrix} \xi^{i_2}_{2\mu}(b_2) + c^{\omega}_{\mu-q}\xi^{i_1}_{2\omega}(b_2) \\ \xi^{i_2}_{2l_2}(b_1) \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \left(\dfrac{\partial f_2^{i_2}}{\partial u^\nu}\right)_{u=u^\circ} \\ \left(\dfrac{\partial f_2^{i_2}}{\partial \beta_2^{l_2}}\right)_{\beta_2=\beta_2^\circ} \end{matrix} \right\|$$

Так как подгруппа H_{n_1-q} стационарна, то

$$\xi^{i_1}_{1\mu}(\overset{*}{b_1}) + c^{\omega}_{\mu-q}\xi^{i_1}_{1\omega}(\overset{*}{b_1}) = 0$$

и, следовательно, в точке $b_1 = b_1^*$

$$M(b_1^*, b_2) = \left\| \begin{array}{c:c} \xi^{i_1}_{1\varepsilon}(b_1^*) & \xi^{i_2}_{2\varepsilon}(b_2) \\ \hdashline 0 & \\ \hdashline 0 & \raise{1.5ex}{M_*} \end{array} \right\|$$

Допустим, что точка b_1^* отвечает условиям леммы, но ее координаты не удовлетворяют ни одному из соотношений (4.5). Тогда среди миноров порядка $n_2 - n_1 + q$ матрицы $M(b_1^*, b_2)$ найдется отличный от нуля. Так как ранг матрицы $\| \xi^{i_1}_{1\varepsilon}(\overset{*}{b_1}) \|$ равен q, то существует минор порядка $n_2 - n_1$ матрицы M_*, не равный нулю, и притом для любых значений b_2^j.

Векторная матрица группы G_{n_2} есть матрица

$$\left\| \begin{matrix} \partial f_1^{i_1}/\partial\beta_1^{e_1} & \partial f_2^{i_2}/\partial\beta_1^{l_1} \\ 0 & \partial f_2^{i_2}/\partial\beta_2^{l_2} \end{matrix} \right\|$$

вычисленная для значений $\beta_1^{i_1} = \beta^{\circ i_1}_1$, $\beta_2^{i_2} = \beta^{\circ i_2}_2$. Придавая величинам $\beta_1^{i_1}$, $\beta_2^{i_2}$ другие фиксированные значения, снова получим матрицу группы G_{n_2}, которая образуется из первой путем умножения на некоторую постоянную невырожденную матрицу [1]. Вследствие этого ранги обеих матриц в любой данной точке (b_1, b_2) равны [7].

Поэтому ранг матрицы

$$\left\| \begin{matrix} \partial f_2^{i_2} / \partial u^\nu \\ \partial f_2^{i_2} / \partial \beta_2^{l_2} \end{matrix} \right\|$$

также не изменится, если вычислить ее для значений u^ν $\beta_2{}^{l_2}$, отличных от первоначальных.

Но тогда величины $b_2{}'^{i_2}$ в преобразовании (4.4) надлежащим выбором значений u и β_2 могут быть сделаны какими угодно, что противоречит условию леммы. Лемма доказана.

Заметим, что соотношения (4.5) являются уравнениями инвариантных многообразий группы G_{n_1}.

Действительно, при $t = 1, \ldots, \rho_l (l \leqslant \pi)$ операторы

$$X^2_{l_1}\varphi^q_{lt}(b_1) \equiv X^1_{l_1}\varphi^q_{lt}(b_1)$$

могут обращаться в нуль, либо тождественно, либо в силу тех из соотношений (4.4), соответствующих данному l, которые зависят только от b_1, т. е. в силу равенств

$$\varphi^q_{l1}(b_1) = \ldots = \varphi^q_{l\rho_l}(b_1) = 0$$

Введем следующее определение.

Порядком критической точки пространства E_{N_m} назовем такое натуральное число $p_m \geqslant m+1$, для которого:

1) устойчивость (неустойчивость) тривиального решения системы (1.1) сохраняется, каковы бы ни были коэффициенты a форм $q^i_\mu(a, x)$ $(\mu = m+1, \ldots, p_m - 1)$;

2) изменением коэффициентов форм $q^i_{p_m}(a, x)$ можно получить устойчивость либо неустойчивость решения системы (1.1) по желанию. Очевидно, любая критическая точка пространства E_{N_m} имеет конечный порядок; в противном случае она вообще не является критической (в смысле определения, данного в п. 2).

Всюду в дальнейшем рассматриваются лишь те точки пространства E_{N_m}, которые принадлежат замкнутой сферической окрестности начала координат сколь угодно большого, но конечного радиуса. Следовательно, для величины порядков критических точек, принадлежащих этой окрестности, можно указать точную верхнюю границу P_m, поскольку функция, ограниченная в каждой точке замкнутого множества, ограничена на этом множестве.

Пусть пространство E_{N_m} состоит из обыкновенных точек $(q = r)$ и особых точек порядков $0 \leqslant q_1 \leqslant \ldots \leqslant q_e < r$ и P_m — наивысший порядок содержащихся в нем критических точек. Найдем соотношения, которым удовлетворяют координаты критических точек пространства E_{N_m}.

Рассмотрим матрицу M_h группы $G_{N_h} (h = P_m)$. Нетрудно указать ее миноры порядка $N_h - N_m + q_\varepsilon \,(\varepsilon = 1, \ldots, e)$, отличные от нуля, которые зависят лишь от величин $a^j_{i_1}, \ldots, a^j_{i_1 \ldots i_m}$. Соотношения, в силу которых обращаются в нуль все миноры порядка $N_h - N_m + q_\varepsilon$ матрицы M_h, могут быть записаны в виде соотношений (4.3), в которых b^j_1, b^j_2 — суть одномерно упорядоченные совокупности величин $a^j_{i_1}, \ldots, a^j_{i_1 \ldots i_m}$ и $a^j_{i_1 \ldots i_{m+1}}, \ldots, a^j_{i_1 \ldots i_h}$. Положим $n_2 = N_h$, $n_1 = N_m$, $q_\varepsilon = q$.

Пользуясь леммой, можно непосредственно убедиться в справедливости следующей теоремы:

Теорема. Если точка $(a^j_{i_1}, \ldots, a^j_{i_1 \ldots i_m})$ пространства E_{N_m} является критической, то ее координаты необходимо удовлетворяют, по крайней мере, одному из соотношений (4.5). Многообразия, определяемые ими, суть инвариантные многообразия группы G_{N_m}.

Автором рассмотрена система второго порядка $(n = 2)$. Получены известные критические многообразия системы первого приближения; рассмотрен критический случай одного нулевого корня. При специализации коэффициентов $a^1_1 = a^1_2 = 0$, $a^2_1 = k$, $a^2_2 = -1$ критические многообразия систем 2-го и 3-го приближения совпали с границами области устойчивости в известном примере Ляпунова [5].

5. Выясним, в какой мере способ, использованный в предыдущих пунктах, отражает специфику задачи устойчивости.

Пусть задана система уравнений

$$\Psi^i (x, a) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n) \qquad (x \subset H) \tag{5.1}$$

в которой Ψ^i означают символы алгебраических либо дифференциальных и алгебраических операций над переменными $x^1, \ldots, x^n$ с коэффициентами $a^1, \ldots, a^N$, могущими принимать всевозможные вещественные значения.

Пусть требуется найти необходимые и достаточные условия реализации некоторого свойства (ζ) решений системы (5.1) для $x \subset \mathrm{H}$.

Очевидно, что, если задан вид операторов Ψ^i, то необходимые и достаточные условия реализации любого свойства решений уравнений (5.1) зависят от коэффициентов a и только от них.

Эти условия ковариантны относительно любых преобразований уравнений (5.1), сохраняющих исследуемое свойство и вид уравнений.

Пусть $x^j = \varphi^j(x', \alpha)$ такие преобразования, образующие r-параметрическую группу. Тогда

$$\begin{gathered}\Psi^i(x, a) = \eta^i_\varkappa(x', \alpha)\,\Psi^\varkappa(x', a') \\ |\,\eta^i_\varkappa(x', \alpha)\,| \neq 0 \quad (x' \subset \mathrm{H}), \qquad a'^\varepsilon = f^\varepsilon(a, \alpha) \qquad \begin{pmatrix}\varkappa = 1, \ldots, n \\ \varepsilon = 1, \ldots, N\end{pmatrix}\end{gathered} \tag{5.2}$$

и преобразование (5.2) образует группу $G_\rho\,(\rho \leqslant r)$. Области пространства E_N коэффициентов a, в которых реализуется (ζ) или противоположное ему свойство $(\bar{\zeta})$, если таковые существуют, разграничены инвариантными многообразиями группы G_ρ.

Если при этом группа G_ρ кратно транзитивна столько раз, что все ее инвариантные многообразия, получаемые приравниванием нулю миноров матрицы группы, являются наименьшими инвариантными многообразиями любой своей точки [1], то искомые области существуют и являются системами интранзитивности группы G_ρ, которые легко найти.

Для завершения задачи достаточно теперь установить, выполняется ли свойство (ζ) для какой-нибудь одной точки каждой из систем интранзитивности.

Рассмотрим простой пример. Пусть требуется найти необходимые и достаточные условия знакоопределенности квадратичной формы

$$\Psi(a, x) = a_{i_1 i_2} x^{i_1} x^{i_2} \qquad (i_1, i_2 = 1,\ 2)$$

Преобразование $x^i = \alpha^i_j x'^j$ обладает нужными свойствами. Имеем

$$\Psi(a, x) \equiv \Psi(a', x'), \qquad a'_{i_1 i_2} = a_{j_1 j_2} \alpha^{j_1}_{i_2} \alpha^{j_2}_{i_2}$$

Матрица группы с компонентами

$$\left(\frac{\partial a'_{i_1 i_2}}{\partial \alpha^\alpha_\beta}\right)_{\alpha^\varepsilon_\varkappa = \delta^\varepsilon_\varkappa} = a_{\alpha i_2} \delta^\beta_{i_1} + a_{\alpha i_1} \delta^\beta_{i_2}$$

имеет вид

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{12} & a_{22} \end{Vmatrix}$$

Группа G_4 просто транзитивна. Миноры третьего порядка матрицы обращаются в нуль на инвариантном многообразии

$$a_{11} a_{22} - a_{12}{}^2 = 0$$

состоящем из особых точек второго порядка (исключая точку $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$, являющуюся особой нулевого порядка). Области $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$ и $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$ образуют системы интранзитивности и состоят из обыкновенных точек преобразования.

При $a_{11} = a_{22} = 1$, $a_{12} = 0$, очевидно, форма $\Psi(a, x)$ знакоопределенна; следовательно, она знакоопределенна также и в любой точке области $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$.

Аналогично определяются области знакопеременности и знакопостоянства формы $\Psi(a, x)$.

Как видно, информация о конкретном характере свойства (ζ) (знакоопределенность) понадобилась лишь на последнем этапе решения задачи. Объем ее оказался незначительным.

Если группа интранзитивна, то объем дополнительной информации, необходимой для решения задачи, может быть большим. Такая информация часто может быть получена из уравнений (5.1), а сами уравнения могут быть так обобщены, чтобы допускали группу более высокого порядка.

Так уравнение

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0 \qquad (a_\nu = \text{const})$$

не допускает иных преобразований, кроме тождественного, но задача устойчивости тривиального решения этого уравнения может быть обобщена и решена полностью в постановке, описанной в предыдущих пунктах.

В п. 4 используется дополнительная информация об устойчивости и, следовательно, приемы, использованные там, специфичны именно для этой задачи.

Автор благодарит Н. Н. Красовского за внимание к этой работе и ряд существенных замечаний.

Поступила 20 I. 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Эйзенхарт Л. П. Непрерывные группы преобразований. ИИЛ, 1947.
2. Чеботарев Н. Г. Теория групп Ли. Гостехтеориздат, 1940.
3. Красовский Н. Н. Об устойчивости по первому приближению. ПММ, XIX, 1955, вып. 5.
4. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. Физматгиз, 1959.
5. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Гостехиздат, 1950.
6. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Гостехиздат, 1955.
7. Bôcher M., Introduction to higer algebra Macmillan. N. Y., 1907 (русский перевод: Бохер М. Введение в высшую алгебру, ГТТИ, 1934).