Прикладная математика и механика. Том XXV, 1961
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

О ДВИЖЕНИИ И УСТОЙЧИВОСТИ ГИРОСКОПА В КАРДАНОВОМ ПОДВЕСЕ, НАХОДЯЩЕГОСЯ В НЬЮТОНОВСКОМ ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ СИЛ

А. М. Табаровский

(Москва)

Движение, а также устойчивость некоторых стационарных движений для случая, когда симметричный гироскоп находится в однородном поле сил тяжести и ось внешнего кольца карданова подвеса вертикальна, исследованы в работах [1-5]. Оказалось, что эти вопросы имеют много общего с подобными вопросами, относящимися к движению тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в случае Лагранжа.

В работе [6] исследован случай движения твердого тела с закрепленной точкой под действием сил центрального ньютоновского поля. Делалось предположение о малости размеров тела по сравнению с расстоянием закрепленной точки до притягивающего центра. Отмечен и приведен к квадратурам случай, аналогичный случаю Лагранжа. Достаточные условия устойчивости перманентных вращений для этой задачи получены в работе [7].

Ниже рассмотрена задача, названная в заглавии. Направление оси внешнего кольца карданова подвеса предполагается совпадающим с направлением от притягивающего центра к точке пересечения осей подвеса. Это допущение позволяет, как и следовало ожидать, получить аналогию со случаем Лагранжа. Относительно размеров тела делается то же предположение, что и в работе [6]. Приведено к квадратурам интегрирование уравнений движения. При исследовании устойчивости стационарных решений (регулярной прецессии и «вертикального» вращения) применяется метод Четаева.

1. Вообразим гироскоп в кардановом подвесе. Введем две правые прямоугольные системы координат $Ox_1y_1z_1$ и $Oxyz$ с началом в точке пересечения осей подвеса. Система $Ox_1y_1z_1$ неподвижна, ось Oz_1 направлена по оси внешнего кольца. Система $Oxyz$ связана с кожухом, оси Ox и Oz направлены соответственно по оси вращения кожуха и по оси симметрии гироскопа. При этом ось Ox находится в плоскости Ox_1y_1.

Положение гироскопа относительно неподвижной системы координат определяется углами Эйлера: ψ — угол прецессии, θ — угол нутации и угол собственного вращения φ — угол поворота гироскопа относительно системы координат $Oxyz$.

Пусть I — момент инерции внешнего кольца относительно оси Oz_1, $A^\circ, B^\circ, C^\circ$ — моменты инерции кожуха относительно осей x, y, z и $A, B = A, C$ — моменты инерции гироскопа относительно тех же осей, которые предполагаются главными осями эллипсоидов инерции как для кожуха, так и для гироскопа. В этих обозначениях удвоенная живая сила системы имеет вид

$$2T = (A + A^\circ)\dot\theta^2 + [I + C^\circ + (A + B^\circ - C^\circ)\sin^2\theta]\dot\psi^2 + C(\dot\varphi + \dot\psi\cos\theta)^2$$

Предположим, что притягивающий центр O_1 находится на отрицательной части оси Oz_1, и будем считать расстояние $R = O_1O$ от притягивающего центра до точки O значительно превосходящим размеры гироскопа и колец подвеса. Тогда для проекций F_{x_1}, F_{y_1}, F_{z_1}, действующих на элемент dm системы сил, получим, пренебрегая малыми величинами, начиная с величин второго порядка включительно, следующие выражения:

$$F_{x_1} = -\frac{gdm}{R}x_1, \qquad F_{y_1} = -\frac{gdm}{R}y_1, \qquad F_{z_1} = -gdm + \frac{2gdm}{R}z_1$$

Здесь g — ускорение силы тяготения на расстоянии R от притягивающего центра, а x_1, y_1, z_1 — координаты элемента dm.

Будем считать, что центр масс системы гироскоп — кожух расположен на оси z, и обозначим через $l \geqslant 0$ его координату по этой оси, а через M — массу системы гироскоп — кожух. Предположив, что активные силы суть только силы тяготения, имеем для дифференциала силовой функции выражение

$$dU = -\frac{g}{R}\sum[x_1 dx_1 + y_1 dy_1 + (R - 2z_1)dz_1]\,dm$$

и, следовательно,

$$U = -\frac{g}{2R}\sum(x_1^2 + y_1^2 - 2z_1^2 + 2Rz_1)\,dm$$

Перейдя от неподвижных осей x_1, y_1, z_1 к главным осям x, y, z, произведя простые вычисления и отбросив постоянные слагаемые, получим окончательно

$$U = -Mgl\cos\theta + \frac{3g}{2R}(A + B^\circ - C - C^\circ)\cos^2\theta \tag{1.1}$$

Если притягивающий центр бесконечно удаляется от точки $O\,(R \to \infty)$, то в пределе второе слагаемое исчезает, и в правой части (1.1) остается известное выражение силовой функции однородного поля сил тяжести для гироскопа с вертикальной осью внешнего кольца. Любопытно, однако, что, как это видно из (1.1), подобное совпадение будет также в том случае, когда моменты инерции гироскопа и кожуха удовлетворяют условию

$$A + B^\circ - C - C^\circ = 0 \tag{1.2}$$

Следовательно, при выполнении последнего рассматриваемое движение гироскопа будет точно таким же, как и движение гироскопа с вертикальной осью внешнего кольца под действием однородного поля сил тяжести. Этот случай подробно исследован в работах [1-5], поэтому в дальнейшем будем считать, что равенство (1.2) не имеет места.

Так как координаты θ, ψ, φ — независимые и голономные, то уравнения движения могут быть записаны в форме уравнений Лагранжа второго рода. Имеем

$$\begin{gathered}(A + A^\circ)\ddot{\theta} - (A + B^\circ - C^\circ)\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta + C(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\dot{\psi}\sin\theta - \\ - Mgl\sin\theta + \frac{3g}{R}(A + B^\circ - C - C^\circ)\sin\theta\cos\theta = 0 \\ \frac{d}{dt}\{[I + C^\circ + (A + B^\circ - C^\circ)\sin^2\theta]\dot{\psi} + C(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\cos\theta\} = 0 \\ \frac{d}{dt}[C(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)] = 0\end{gathered} \tag{1.3}$$

Если пренебречь массами колец карданова подвеса, то уравнения (1.3) переходят в уравнения работы [6] для случая, аналогичного случаю Лагранжа.

Уравнения движения позволяют установить такие первые интегралы

$$\begin{gathered}
(A + A^\circ)\,\dot\theta^2 + [I + C^\circ + (A + B^\circ - C^\circ)\sin^2\theta]\,\dot\psi^2 + C(\dot\varphi + \dot\psi\cos\theta)^2 + \\
+ 2Mgl\cos\theta - \frac{3g}{R}(A + B^\circ - C - C^\circ)\cos^2\theta = h \\
[I + C^\circ + (A + B^\circ - C^\circ)\sin^2\theta]\,\dot\psi + C(\dot\varphi + \dot\varphi\cos\theta)\cos\theta = k \\
\dot\varphi + \dot\psi\cos\theta = r
\end{gathered} \tag{1.4}$$

из которых первый есть интеграл живых сил, а последние два соответствуют циклическим координатам ψ и φ; h, k и r обозначают постоянные первых интегралов.

2. Приведем интегрирование уравнений движения (1.3) к квадратурам. Из (1.4) имеем для углов Эйлера следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\beta - bru}{\varepsilon - eu^2}, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = r - \frac{\beta - bru}{\varepsilon - eu^2}\,u \tag{2.1}$$

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{(\alpha - au + a_1u^2)(\varepsilon - eu^2) - (\beta - bru)^2}{\varepsilon - eu^2}$$

Здесь приняты обозначения:

$$u = \cos\theta$$

$$\alpha = \frac{h - Cr^2}{A + A^\circ}, \qquad a = \frac{2Mgl}{A + A^\circ} \geqslant 0, \qquad a_1 = \frac{3g(A + B^\circ - C - C^\circ)}{R(A + A^\circ)}$$

$$\varepsilon = \frac{I + A + B^\circ}{A + A^\circ} > 0, \qquad e = \frac{A + B^\circ - C^\circ}{A + A^\circ}, \qquad \beta = \frac{k}{A + A^\circ}, \qquad b = \frac{C}{A + A^\circ} > 0$$

Интегрирование системы (2.1) начнем с последнего уравнения, из которого, принимая во внимание, что $\dot u = -\dot\theta\sin\theta$, получим

$$t - t_0 = \int_{u_0}^{u} \frac{(\varepsilon - eu^2)\,du}{\sqrt{[(\alpha - au + a_1u^2)(\varepsilon - eu^2) - (\beta - bru)^2](\varepsilon - eu^2)(1 - u^2)}}$$

После обращения этого гиперэллиптического интеграла первые два уравнения системы (2.1) позволяют свести вычисление углов ψ и φ к квадратурам. Обозначим

$$f(u) = (\alpha - au + a_1u^2)(\varepsilon - eu^2) - (\beta - bru)^2$$

и для определенности ограничимся рассмотрением лишь того случая, когда $e > 0$ и $a_1 < 0$. Ниже будет показано, что выполнение этих условий гарантирует устойчивость регулярной прецессии гироскопа при любом значении постоянной скорости прецессии. В этом случае многочлен $f(u)$ имеет в механической задаче четыре действительных корня u', u_1, u_2, u'', заключенных соответственно в промежутках

$$u' < -\sqrt{\frac{\varepsilon}{e}}, \qquad -\sqrt{\frac{\varepsilon}{e}} < u_1 \leqslant u_0, \qquad u_0 \leqslant u_2 < \sqrt{\frac{\varepsilon}{e}}, \qquad u'' > \sqrt{\frac{\varepsilon}{e}}$$

Корни u' и u'' по модулю больше единицы, поэтому величина u, начиная с u_0, должна все время оставаться на отрезке между теми из смежных точек -1, $+1$, u_1, u_2, на котором лежит u_0.

Рассмотрим движение, определенное начальными условиями

$$\theta_0 \neq 0, \qquad \dot{\theta}_0 = 0, \qquad \dot{\psi}_0 = 0, \qquad r = r_0$$

где постоянная r_0 численно велика.

Эти начальные условия приводят в случае Лагранжа к псевдорегулярной прецессии.

Имеем из (2.1)

$$\beta - br_0u_0 = 0, \qquad \alpha - au_0 + a_1u_0^2 = 0$$

и, следовательно,

$$f(u) = (u_0 - u)\{[a - a_1(u_0 + u)](\varepsilon - eu^2) - b^2r_0^2(u_0 - u)\}$$

Отсюда

$$u_0 - u_1 = \frac{[a - a_1(u_0 + u_1)](\varepsilon - eu_1^2)}{b^2r_0^2}$$

Анализ знака правой части показывает, что при сделанных предположениях относительно величин e, a_1 и при $u_0 \geqslant 0\ (0 < \theta_0 \leqslant {}^1/_2\pi)$ имеем $u_1 < u_0$. Следовательно, u колеблется при большом r_0 на отрезке $[u_1, u_2 = u_0]$ тем меньшем, чем больше r_0.

3. Уравнения движения (1.3) допускают частное решение

$$\theta = \theta_0, \qquad \dot{\theta} = 0, \qquad \dot{\psi} = \dot{\psi}_0, \qquad r = r_0 \tag{3.1}$$

если постоянные θ_0, $\dot{\psi}_0$, r_0 удовлетворяют условию

$$\Big[(A + B^\circ - C^\circ)\dot{\psi}_0^2\cos\theta_0 - Cr_0\dot{\psi}_0 + Mgl - \\ - \frac{3g}{R}(A + B^\circ - C - C^\circ)\cos\theta_0\Big]\sin\theta_0 = 0 \tag{3.2}$$

Рассмотрим сначала случай, когда в движении (3.1) $\theta_0 \neq 0, \pi$. При этом (3.1) представляет собой регулярную прецессию гироскопа, а условие (3.2) выполняется за счет равенства нулю выражения, заключенного в квадратные скобки

$$(A + B^\circ - C^\circ)\dot{\psi}_0^2\cos\theta_0 - Cr_0\dot{\psi}_0 + Mgl - \frac{3g}{R}(A + B^\circ - C - C^\circ)\cos\theta_0 = 0 \tag{3.3}$$

Условием действительности корней этого квадратного относительно $\dot{\psi}_0$ уравнения служит

$$C^2r_0^2 - 4(A + B^\circ - C^\circ)\Big[Mgl - \frac{3g}{R}(A + B^\circ - C - C^\circ)\cos\theta_0\Big]\cos\theta_0 \geqslant 0$$

или

$$C^2\dot{\varphi}_0^2 - 4(A + B^\circ - C - C^\circ)\Big[Mgl - \frac{3g}{R}(A + B^\circ - C - C^\circ)\cos\theta_0\Big]\cos\theta_0 \geqslant 0$$

Положим в возмущенном движении

$$\theta = \theta_0 + \eta, \qquad \dot{\theta} = \dot{\eta} = \xi_1, \qquad \dot{\psi} = \dot{\psi}_0 + \xi_2, \qquad r = r_0 + \xi_3$$

Интегралам (1.4) соответствуют следующие интегралы уравнений возмущенного движения

$$V_1 = (A + A^\circ)\xi_1^2 + [(A + B^\circ - C^\circ)\dot\psi_0^2(n^2 - m^2) - Mgln +$$

$$+\frac{3g}{R}(A + B^\circ - C - C^\circ)(n^2 - m^2)]\eta^2 + [I + C^\circ + (A + B^\circ - C^\circ)m^2] \times$$

$$\times (\xi_2^2 + 2\dot\psi_0\xi_2) + 4(A + B^\circ - C^\circ)\dot\psi_0 mn\eta\xi_2 + C(\xi_3^2 + 2r_0\xi_3) +$$

$$+ 2\left[(A + B^\circ - C^\circ)\dot\psi_0^2 n - Mgl + \frac{3g}{R}(A + B^\circ - C - C^\circ)n\right] m\eta + \ldots = \text{const}$$

$$V_2 = [(A + B^\circ - C^\circ)\dot\psi_0(n^2 - m^2) - \tfrac{1}{2}Cr_0 n]\eta^2 +$$

$$+ [2(A + B^\circ - C^\circ)\dot\psi_0 n - Cr_0] m\eta + [I + C^\circ + (A + B^\circ - C^\circ)m^2]\xi_2 +$$

$$+ 2(A + B^\circ - C^\circ)mn\eta\xi_2 + C(n - m\eta)\xi_3 + \ldots = \text{const}$$

$$V_3 = \xi_3 = \text{const}$$

где m и n обозначают соответственно $\sin\theta_0$ и $\cos\theta_0$, а многоточия здесь и в дальнейшем заменяют невыписанные члены выше второго порядка малости. Рассмотрим интеграл уравнений возмущенного движения

$$V = V_1 - 2\dot\psi_0 V_2 + 2C(\dot\psi_0 n - r_0)V_3 +$$

$$+ \frac{C^2\dot\psi_0^2}{(A + B^\circ - C^\circ)\dot\psi_0^2 - (3g/R)(A + B^\circ - C - C^\circ)} V_3^2 = (A + A^\circ)\xi_1^2 +$$

$$+ [I + C^\circ + (A + B^\circ - C^\circ)m^2]\xi_2^2 +$$

$$+ C\left[1 + \frac{C\dot\psi_0^2}{(A + B^\circ - C^\circ)\dot\psi_0^2 - (3g/R)(A + B^\circ - C - C^\circ)}\right]\xi_3^2 + 2C\dot\psi_0 m\eta\xi_3 -$$

$$-\left[(A + B^\circ - C^\circ)\dot\psi_0^2(n^2 - m^2) - Cr_0\dot\psi_0 n + Mgln -\right.$$

$$\left. - \frac{3g}{R}(A + B^\circ - C - C^\circ)(n^2 - m^2)\right]\eta^2 + \ldots \text{const}$$

Он будет определенно-положительной функцией аргументов η, ξ_1, ξ_2, ξ_3 при выполнении единственного условия

$$(A + B^\circ - C^\circ)\dot\psi_0^2(n^2 - m^2) - Cr_0\dot\psi_0 n + Mgln -$$

$$- \frac{3g}{R}(A + B^\circ - C - C^\circ)(n^2 - m^2) < 0 \qquad (3.4)$$

которое на основании теоремы Ляпунова служит достаточным условием устойчивости движения (3.1). В рассматриваемом случае ($\sin\theta_0 \neq 0$) условие (3.4), используя (3.3), можно представить в виде

$$(A + B^\circ - C^\circ)\dot\psi_0^2 - \frac{3g}{R}(A + B^\circ - C - C^\circ) > 0 \qquad (3.5)$$

Итак, при условии (3.5) регулярная прецессия гироскопа в кардановом подвесе (уравновешенного или неуравновешенного) устойчива по отношению к θ, $\dot\theta$, $\dot\psi$, r, а следовательно, и по отношению к θ, $\dot\theta$, $\dot\psi$, $\dot\varphi$.

Теперь рассмотрим случай $\theta_0 = 0$, когда в движении (3.1) кожух равномерно вращается вокруг оси Oz_1 с угловой скоростью $\dot\psi_0$, а гироскоп равномерно вращается вокруг той же оси с угловой скоростью r_0.

Как видно из (3.2), постоянные $\dot\psi_0$ и r_0 могут иметь в этом движении любые значения. Рассмотрение интеграла

$$V = V_1 - 2\dot\psi_0 V_2 + 2C(\dot\psi_0 - r_0)V_3$$

показывает, что для получения достаточного условия устойчивости рассматриваемого движения надо положить $\theta_0 = 0$ в условии (3.4). Имеем таким образом

$$(A + B^\circ - C^\circ)\dot\psi_0^2 - Cr_0\dot\psi_0 + Mgl - \frac{3g}{R}(A + B^\circ - C - C^\circ) < 0 \quad (3.6)$$

Это условие можно видоизменить подобно тому, как это сделано в работе [4].

Все полученные условия переходят в известные достаточные условия устойчивости регулярной прецессии или вертикального вращения для тяжелого гироскопа в кардановом подвесе с вертикальной осью внешнего кольца и для движения тяжелого твердого тела вокруг закрепленной точки в случае Лагранжа. Для этого надо отбросить члены, содержащие R, так как они характеризуют скос силовых линий поля, или положить равными нулю моменты инерции колец подвеса.

Установим необходимость условия (3.6). Для этого рассмотрим функцию

$$V = (A + A^\circ)\eta\dot\eta$$

и ее производную по времени, взятую в силу уравнений возмущенного движения. Последняя имеет вид

$$\frac{dV}{dt} = (A + A^\circ)\dot\eta^2 + \Big[(A + B^\circ - C^\circ)\dot\psi_0^2 - Cr_0\dot\psi_0 + Mgl - \\ - \frac{3g}{R}(A + B^\circ - C - C^\circ)\Big]\eta^2 + \ldots$$

и при выполнении условия

$$(A + B^\circ - C^\circ)\dot\psi_0^2 - Cr_0\dot\psi_0 + Mgl - \frac{3g}{R}(A + B^\circ - C - C^\circ) > 0$$

является определенно-положительной функцией переменных η, $\dot\eta$, а функция V может принимать положительные значения. На основании теоремы Четаева движение оказывается при этом неустойчивым. Таким образом условие (3.6) является при исключении границы необходимым и достаточным условием устойчивости движения (3.1) при $\theta_0 = 0$.

Поступила 30 XI 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Четаев Н. Г. О гироскопе в кардановом подвесе. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 3.
2. Скимель В. Н. Некоторые задачи движения и устойчивости тяжелого гироскопа. Тр. КАИ, 1958, т. XXXVIII.
3. Магнус К. Об устойчивости движения тяжелого симметричного гироскопа в кардановом подвесе. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 2.
4. Румянцев В. В. Об устойчивости движения гироскопа в кардановом подвесе. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 3
5. Magnus K. Der schwere symmetrische Kreisel in kardanischer Lagerung. Ingenieur — Archiv, 1959, XXVIII Band.
6. Белецкий В. В. Об интегрируемости уравнений движения твердого тела около закрепленной точки под действием центрального ньютоновского поля сил. ДАН СССР, 1957, т. 113, № 2.
7. Пожарицкий Г. К. Об устойчивости перманентных вращений твердого тела с закрепленной точкой, находящегося в ньютоновском центральном поле сил. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 4.