Прикладная математика и механика. Том XXV, 1961
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ЗАМКНУТЫХ ПОТОКАХ ВБЛИЗИ КРИТИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ РЕЙНОЛЬДСА

В. С. Сорокин
(Иваново)

Показано, что в замкнутом стационарном потоке жидкости, независимо от формы стенок и характера их движения, малые нормальные возмущения всегда либо монотонно затухают, либо монотонно растут. Пользуясь этим, исследованы в общем виде стационарные движения вблизи критического числа Рейнольдса R. В общем случае при критическом R пересекаются две серии стационарных движений, аналитически зависящих от R. Движения одной серии, начинающиеся с равновесия при $R=0$, устойчивы при R, меньшем критического R_0, и неустойчивы при $R > R_0$. Движения второй серии, наоборот, устойчивы выше критической точки, неустойчивы ниже ее и исчезают при некотором $R_1 < R_0$. В самой критической точке движения обеих серий совпадают, а вблизи R_0 их разность меняется как $(R-R_0)$. Особый случай может иметь место, если задача допускает преобразование симметрии (например, произвольный сдвиг вдоль оси), а нарушающее устойчивость возмущение неинвариантно относительно этого преобразования. Тогда выше критической точки появляются две новые серии стационарных движений, аналитически зависящие от $(R-R_0)^{1/2}$. Именно так обстоит дело в случае жидкости, движущейся между двумя вращающимися цилиндрами.

До последнего времени в теории гидродинамической устойчивости изучалась почти исключительно устойчивость незамкнутых потоков, причем усилия направлялись главным образом на вычисление критического числа Рейнольдса, т.е. на решение линейных уравнений малых возмущений. Только Ландау [1,2] поставил вопрос о явлениях при числах Рейнольдса, немного превышающих критические, и показал, что должно существовать (он имел в виду незамкнутые потоки) нестационарное пери одическое движение, амплитуда которого пропорциональна $(R-R_0)^{1/2}$. Что касается замкнутых потоков, то было исследовано, по-видимому, только движение жидкости между двумя вращающимися цилиндрами (задача Тейлора). Тейлор [3] вычислил для этой задачи критическое число Рейнольдса и срывающее стационарный поток возмущение, а затем в его экспериментах [3] (см. также работу Льюиса [4]) и экспериментах Стюарта [5] показано, что все выводы теории правильны. В его опытах видно также, что после срыва основного течения устанавливается новое стационарное движение, интенсивность которого отличается от интенсивности основного течения на величину, пропорциональную $(R-R_0)^{1/2}$. Стюарт [5] использовал в задаче Тейлора соображение Ландау и показал, что хотя движение здесь замкнутое, выводы Ландау частично остаются в силе, и теория прекрасно согласуется с экспериментом количественно. Может создаться впечатление, что указанные Ландау закономерности должны иметь место и для замкнутых потоков.

Однако случай Тейлора не является типичным случаем замкнутого течения. В опытах Тейлора длина цилиндров была больше ширины заполненного жидкостью пространства в 800 раз, и уже поэтому можно думать, что наблюдавшиеся там явления должны быть похожи на явления в бесконечных незамкнутых потоках. Было бы очень интересно исследовать экспериментально какое-нибудь типичное замкнутое движение, например движение между двумя вращающимися шаровыми поверхностями.

В этой работе проведено общее исследование нелинейных уравнений гидродинамики для замкнутых потоков вблизи критических чисел Рейнольдса и показано, что задача Тейлора действительно является особой и что в типичных замкнутых потоках явления вблизи критических точек выглядят совершенно иначе. Примененный здесь метод является развитием метода работы [6].

1. Нормальные возмущения. Рассматривается жидкость, заполняющая объем (V), стенки которого (S) движутся стационарно со скоростями $\mathbf{U}_s$, разными в разных точках. Стенки могут состоять из нескольких частей, имеющих форму тел вращения, но можно рассматривать и более сложные случаи, например когда стенки сделаны из гибкой ленты, движущейся в «себе». Предполагается, что в этих условиях возможно стационарное движение жидкости, устойчивость которого нужно исследовать.

Введем характерный размер объема l, скорость ν/l и время l^2/ν (ν — кинематическая вязкость), а также число Рейнольдса

$$R = \frac{lU_s^{(0)}}{\nu} \tag{1.1}$$

где $U_s^{(0)}$ — характерная скорость стенок; уравнения движения будут

$$\dot{\mathbf{v}} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{v}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \qquad \mathbf{v}|_s = R\mathbf{U}_s \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{U}_s$ обозначает распределение скоростей на стенках, нормированное на единичную характерную скорость.

Далее будут исследоваться стационарные течения жидкости при заданном виде распределения скоростей на стенках и различных числах Рейнольдса. Такие стационарные течения удовлетворяют уравнениям

$$\nabla P + \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{U} + (\mathbf{U}\cdot\nabla)\mathbf{U} = 0, \qquad \operatorname{div}\mathbf{U} = 0, \qquad \mathbf{U}|_s = R\mathbf{U}_s \tag{1.3}$$

Чтобы исследовать их устойчивость, рассмотрим возмущенное течение

$$\{\mathbf{v},\ p'\} = \{\mathbf{U},\ P\} + \{\mathbf{u},\ p\} \tag{1.4}$$

Если подставить это в (1.2) и учесть (1.3), а затем, считая возмуще ние малым, отбросить квадратичные по возмущению члены и положить

$$\{\mathbf{u},\ p\} \sim e^{-\lambda t} \tag{1.5}$$

то получатся линейные уравнения для нормальных возмущений стационарного движения $\mathbf{U}(R)$

$$\begin{gathered} -\lambda\mathbf{u} + L[\mathbf{u};\mathbf{U}(R)] = -\lambda\mathbf{u} + \nabla p + \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{u} + (\mathbf{U}\cdot\nabla)\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{U} = 0 \\ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \qquad \mathbf{u}|_s = 0 \end{gathered} \tag{1.6}$$

Для простоты будем считать собственные числа λ простыми[1]. Тогда решение задачи (1.6) даст (для конечного объема) бесконечную последовательность нормальных возмущений и соответствующих им декрементов

$$\mathbf{u}_\alpha, \quad p_\alpha; \quad \lambda_\alpha \qquad (\alpha = 0, 1, 2\ldots) \tag{1.7}$$

пронумерованных в порядке возрастания вещественных частей чисел λ. Физически ясно, что эта последовательность будет полной: любое малое возмущение $\mathbf{u}$ должно слагаться из экспоненциально меняющихся со временем нормальных возмущений.

---

[1] Случай кратных λ не представляет особого интереса, так как в этой задаче не может быть (принципиально возможных для несамосопряженного L) «присоединенных» возмущений, меняющихся со временем как $(1 + at)e^{-\lambda t}$ и т. п. Дело в том, что оператор L при $R \to 0$ аналитически переходит в самосопряженный.

Здесь в символе $L[\varphi;\ \chi]$ буква L означает оператор, действующий на функцию-аргумент φ, а χ — функцию, от которой L зависит как от параметра.

Так как задача (1.6) несамосопряженная, то нормальные возмущения неортогональны между собой, а декременты могут быть комплексными. Задача, сопряженная с (1.6), получится, если уравнения, комплексно сопряженные с (1.6), умножить на переменный вектор $\mathbf{v}$, проинтегрировать по объему, перевести, пользуясь теоремой Гаусса, производные с $\mathbf{u}^*$ на $\mathbf{v}$ и множитель при $\mathbf{u}^*$ приравнять нулю. Тогда получится

$$-\lambda^*\mathbf{v} + L^+[\mathbf{v};\ \mathbf{U}(R)] = -\lambda^*\mathbf{v} + \nabla q + \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{v} - (\mathbf{U}\cdot\nabla)\mathbf{v} + \nabla(\mathbf{U}\cdot\mathbf{v}) = 0$$
$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \qquad \mathbf{v}|_s = 0 \tag{1.8}$$

Задача (1.8) также имеет полную последовательность решений (сопряженных нормальных возмущений)

$$\mathbf{v}_\alpha, \quad q_\alpha, \quad \lambda_\alpha^* \qquad (\alpha = 0, 1, 2\ldots) \tag{1.9}$$

декременты которых комплексно сопряжены с декрементами (1.7). Эти решения не имеют прямого физического смысла, но они ортогональны к нормальным возмущениям (1.7) и необходимы для определения коэффициентов разложения произвольного возмущения по нормальным. Действительно, из (1.6) и (1.8) получаем

$$(\lambda_\beta - \lambda_\alpha)\int \mathbf{v}_\beta^* \cdot \mathbf{u}_\alpha dV = \int \{\mathbf{v}_\beta^* L[\mathbf{u}_\alpha] - L^+[\mathbf{v}_\beta^*]\,\mathbf{u}_\alpha\}\,dV = 0$$

Отсюда, при надлежащей нормировке

$$\int \mathbf{v}_\beta^* \cdot \mathbf{u}_\alpha dV = \delta_{\beta\alpha} \tag{1.10}$$

Любое несжимаемое течение, исчезающее на стенках, должно разлагаться в ряд вида

$$\{\mathbf{u},\ p\} = \sum_\alpha a_\alpha \{\mathbf{u}_\alpha,\ p_\alpha\}, \qquad a_\alpha = \int \mathbf{v}_\alpha^* \mathbf{u}\,dV \tag{1.11}$$

Исследование устойчивости сводится к вычислению декрементов λ. Стационарное движение устойчиво относительно нормального возмущения (α), если $\operatorname{Re}\lambda_\alpha > 0$.

2. Основная серия стационарных движений. При данных геометрических условиях и данном распределении скоростей на стенках будет существовать серия стационарных движений, непрерывно меняющихся с числом Рейнольдса и при $R = 0$, т. е. при неподвижных стенках, превращающихся в равновесие. Легко показать, что при неподвижных стенках невозможно никакое стационарное движение, кроме основного, $\mathbf{U}(0) = 0$. Действительно, при $R = 0$ из (1.2) вытекает, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \frac{\mathbf{v}^2}{2} dV = -\int (\operatorname{rot}\mathbf{v})^2 dV < 0$$

Таким образом, если движение стационарно, то

$$\operatorname{rot}\mathbf{v} = 0, \qquad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \qquad \mathbf{v}|_s = 0$$

и, следовательно, $\mathbf{v} = 0$. Это рассуждение доказывает даже, что «движение» $\mathbf{U} = 0$ устойчиво, что следует также и из уравнений (1.6). При $\mathbf{U} = 0$ они принимают вид

$$-\lambda\mathbf{u} + \nabla p + \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{u} = 0, \qquad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \qquad \mathbf{u}|_s = 0 \tag{2.1}$$

Эта краевая задача — самосопряженная, так что ее решения

$$\mathbf{u}_\alpha(0), \qquad p_\alpha(0); \qquad \lambda_\alpha(0) \tag{2.2}$$

вещественны и

$$\lambda_\alpha(0)\int \mathbf{u}_\alpha^2 dV = \int (\operatorname{rot}\mathbf{u}_\alpha)^2 dV > 0$$

При малых R движения основной серии можно представить в виде рядов по R

$$\begin{Bmatrix}\mathbf{U}(R)\\ P(R)\end{Bmatrix} = R\begin{Bmatrix}\mathbf{U}_1\\ P_1\end{Bmatrix} + R^2\begin{Bmatrix}\mathbf{U}_2\\ P_2\end{Bmatrix} + \ldots \tag{2.3}$$

Подстановка в (1.3) дает уравнения

$$\begin{gathered}\nabla P_1 + \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{U}_1 = 0, \qquad \operatorname{div}\mathbf{U}_1 = 0, \qquad \mathbf{U}_1|_s = \mathbf{U}_s\\ \nabla P_n + \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{U}_n = -\sum_{k=1}^{n-1}(\mathbf{U}_k\cdot\nabla)\,\mathbf{U}_{n-k}\\ \operatorname{div}\mathbf{U}_n = 0, \qquad \mathbf{U}_n|_s = 0 \qquad (n>1)\end{gathered} \tag{2.4}$$

решая которые можно последовательно определить все $\mathbf{U}_n$. Ряды (2.3) можно аналитически продолжить до первой особой точки, лежащей на вещественной оси R. Дальше будет предполагаться, что либо такой точки вовсе нет, либо она лежит при очень большом R, так что во всей представляющей интерес области чисел Рейнольдса будут существовать движения основной серии. О характере особой точки, в которой перестают существовать основные стационарные движения, можно будет получить некоторые сведения позже.

Для каждого движения основной серии будут существовать свои нормальные возмущения и свои декременты

$$\mathbf{u}_\alpha(R), \quad p_\alpha(R), \quad \lambda_\alpha(R) \tag{2.5}$$

Покажем, что все эти возмущения и их декременты вещественны. Пусть для некоторого числа Рейнольдса R вещественность уже доказана. Для $R+\xi$ положим

$$\begin{aligned}\lambda_\alpha(R+\xi) &= \lambda_\alpha + \xi\lambda^{(1)} + \xi^2\lambda^{(2)} + \ldots\\ \mathbf{u}_\alpha(R+\xi) &= \mathbf{u}_\alpha + \xi\mathbf{u}^{(1)} + \xi^2\mathbf{u}^{(2)} + \ldots\end{aligned} \tag{2.6}$$

и аналогично для давления. Основное движение при $R+\xi$ будет

$$\mathbf{U}(R+\xi) = \mathbf{U}(R) + \xi\mathbf{U}^{(1)} + \xi^2\mathbf{U}^{(2)} + \ldots \tag{2.7}$$

Подстановка в (1.6) дает для членов, содержащих ξ^n

$$\begin{gathered}\lambda_\alpha\mathbf{u}^{(n)} - L[\mathbf{u}^{(n)}\,\mathbf{U}(R)] + \lambda^{(n)}\mathbf{u}_\alpha = -[\lambda^{(n-1)}\mathbf{u}^{(1)} + \ldots + \lambda^{(1)}\mathbf{u}^{(n-1)}] -\\ -[(\mathbf{U}^{(n)}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}_\alpha + \ldots + (\mathbf{U}^{(1)}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}^{(n-1)}] -\\ -[(\mathbf{u}_\alpha\cdot\nabla)\,\mathbf{U}^{(n)} + \ldots + (\mathbf{u}^{(n-1)}\cdot\nabla)\,\mathbf{U}^{(1)}]\end{gathered} \tag{2.8}$$

Умножая это равенство на (по предположению вещественное) сопряженное нормальное возмущение $\mathbf{v}_\alpha$ и интегрируя, получим в силу (1.8)

$$\lambda^{(n)} = \int \mathbf{v}_\alpha\{\ldots\}\,dV \tag{2.9}$$

Здесь точки в скобках обозначают правую часть уравнения (2.8).

Каждое из $\mathbf{u}^{(n)}$ можно разложить по возмущениям (2.5):

$$\mathbf{u}^{(n)} = \sum_{\beta\neq\alpha} b_\beta^{(n)}\mathbf{u}_\beta(R) \tag{2.10}$$

(Исключение члена с $\beta=\alpha$ равносильно изменению нормировки.) Если такие разложения подставить в (2.8), умножить на какое-либо $\mathbf{v}_\beta$,

$\beta \neq \alpha$ и проинтегрировать, то получится (2.11)

$$(\lambda_\beta - \lambda_\alpha) b_\beta{}^{(n)} = \int \mathbf{v}_\beta \cdot (\mathbf{U}^{(n)} \cdot \nabla) \mathbf{u}_\alpha dV + \int \mathbf{v}_\beta \cdot (\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla) \mathbf{U}^{(n)} dV +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} \lambda^{(k)} b_\beta{}^{(k)} + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\gamma \neq \alpha} \left\{ \int \mathbf{v}_\beta \cdot (\mathbf{U}^{(n-k)} \cdot \nabla) \mathbf{u}_\gamma dV + \int \mathbf{v}_\beta \cdot (\mathbf{u}_\gamma \cdot \nabla) \mathbf{U}^{(n-k)} dV \right\} b_\gamma{}^{(k)}$$

Из (2.9) и (2.11) видно, что можно последовательно определить все члены разложений (2.6) и все они будут вещественными. Так как при $R = 0$ нормальные возмущения вещественны, то они будут вещественными во всей области существования основных стационарных движений. Следовательно, если жидкость движется стационарно в замкнутом объеме и это движение принадлежит к основной серии, то при любом числе Рейнольдса всякое нормальное возмущение или монотонно затухает, или монотонно растет.

3. Критическое число Рейнольдса. Выше показано, что при неподвижных стенках основное стационарное движение (равновесие) устойчиво. По непрерывности будут устойчивыми и движения основной серии при достаточно малых R. Существуют случаи, когда движение остается устойчивым при всех R, так что все $\lambda_\alpha(R)$ всегда положительны.

Сюда относятся, например, случаи, когда стенки движутся с одной угловой скоростью, вращаясь около общей оси

$$\mathbf{U}_s = \mathbf{n} \times \mathbf{r}, \qquad \mathbf{n} = \text{const}, \qquad \mathbf{n}^2 = 1 \tag{3.1}$$

Тогда в основном стационарном движении жидкость будет вращаться как твердое тело, т. е.

$$\mathbf{U} = R \qquad \mathbf{n} \times \mathbf{r} \tag{3.2}$$

Для исследования устойчивости здесь проще всего перейти к системе отсчета, вращающейся вместе со стенками. В уравнениях (1.6) нужно тогда положить $\mathbf{U} = 0$ и добавить центробежную силу (которая является градиентом скаляра) и силу Кориолиса. В результате получим

$$\begin{gathered} \lambda \mathbf{u} - \nabla f - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} + 2R\, \mathbf{u} \times \mathbf{n} = 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \qquad \mathbf{u}|_s = 0 \end{gathered} \tag{3.3}$$

Отсюда вытекает равенство

$$\lambda \int |\mathbf{u}|^2 dV = \int |\operatorname{rot} \mathbf{u}|^2 dV - 2R\, \mathbf{n} \int \mathbf{u}^* \times \mathbf{u}\, dV$$

и, следовательно,

$$\operatorname{Re} \lambda = \int |\operatorname{rot} \mathbf{u}|^2 dV \Big/ \int |\mathbf{u}|^2 dV > 0 \tag{3.4}$$

Таким образом, твердое вращение устойчиво при всех R.

Но известно также, что для жидкости, заполняющей пространство между двумя коаксиальными цилиндрами, вращающимися с разными угловыми скоростями, при некоторых условиях существует критическое R, при котором наименьший декремент обращается в нуль. Хотя существующие расчеты относятся к бесконечным цилиндрам, эксперименты с цилиндрами конечной длины показывают, что при некотором R_0 движение действительно становится неустойчивым.

Итак, могут существовать серии стационарных движений, устойчивых при R, меньших некоторого R_0, и неустойчивых при $R > R_0$. Мы исследуем стационарные движения вблизи критической точки R_0, в которой

$$\lambda_0(R_0) = 0, \qquad \lambda_\alpha(R_0) > 0 \qquad (\alpha > 0) \tag{3.5}$$

Для простоты будем считать, что все $\lambda_\alpha(R_0)$ различны.

4. Обыкновенная критическая точка. Критическая точка R_0 может быть обыкновенной (неособой) точкой для основного течения. Рассмотрим разложение основного течения около некоторого R, не предполагая пока R критическим

$$\mathbf{U}(R + \xi) = \mathbf{U}(R) + \xi \mathbf{U}_1 + \ldots \tag{4.1}$$

Дивергенции всех членов этого разложения должны быть равны нулю, а на стенках должно быть

$$\mathbf{U}(R + \xi)|_s = (R + \xi)\,\mathbf{U}_s \tag{4.2}$$

так что

$$\mathbf{U}_1|_s = \mathbf{U}_s \quad \mathbf{U}_n|_s = 0 \qquad (n > 1)$$

Ряды (4.1) должны удовлетворять уравнениям (1.3), в силу чего получается последовательность краевых задач

$$L[\mathbf{U}_1] = 0, \qquad L[\mathbf{U}_n] = -\sum_{k=1}^{n-1} (\mathbf{U}_k \cdot \nabla)\,\mathbf{U}_{n-k} \equiv \mathbf{F}_n \qquad (n > 1) \tag{4.3}$$

Чтобы сделать граничные условия однородными также и при $n = 1$, положим

$$\mathbf{U}_1 = R^{-1}\mathbf{U}(R) + \mathbf{U}_1' \tag{4.4}$$

Тогда

$$L[\mathbf{U}_1'] = -R^{-1}(\mathbf{U} \cdot \nabla)\,\mathbf{U} \equiv \mathbf{F}_1, \qquad \mathbf{U}_1'|_s = 0, \qquad \operatorname{div} \mathbf{U}_1' = 0 \tag{4.5}$$

Для любого n можно, умножая обе части уравнений (4.3) и (4.5) на одно из сопряженных нормальных возмущений (1.9) и интегрируя, получить равенства

$$\lambda_\alpha \int \mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{U}_n dV = \int \mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{F}_n dV \tag{4.6}$$

(При $n = 1$ слева должно быть $\mathbf{U}_n'$.) Интегралы в левых частях этих равенств являются коэффициентами Фурье разложений $\mathbf{U}_n$ по $\mathbf{u}_\alpha$, поэтому, если ни один из декрементов не равен нулю, то

$$\mathbf{U}_n = \delta_{n1} R^{-1}\mathbf{U}(R) + \sum_\alpha \mathbf{u}_\alpha \lambda_\alpha^{-1} \int \mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{F}_n dV \tag{4.7}$$

Формулы эти теряют смысл, если R равно критическому R_0, так как тогда $\lambda_0 = 0$. Однако в критической точке все остальные декременты не равны нулю, и, следовательно, все члены ряда (4.7), кроме нулевого, непрерывны в R_0. Так как основное течение также непрерывно в своей обыкновенной точке, то ясно, что при $R = R_0$ нулевой член ряда (4.7) будет

$$\lim_{R \to R_0} \frac{1}{\lambda_0(R)} \int \mathbf{v}_0(R) \cdot \mathbf{F}_n(R)\, dV \tag{4.8}$$

С этой оговоркой формула (4.7) сохраняет смысл и в критической точке, где, следовательно

$$\lambda_0 = 0, \qquad \int \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{F}_n dV = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{4.9}$$

При $n=1$ соотношение (4.9) имеет вид

$$\int \mathbf{v}_0 \cdot (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} dV = \int \operatorname{rot} \mathbf{v}_0 (d\mathbf{S} \times \mathbf{U}_s) = 0 \tag{4.10}$$

как легко проверить при помощи (1.3) и (1.8).

Покажем, что вблизи обыкновенной критической точки существует вторая серия стационарных движений, для которой эта точка также не является особой. В самой критической точке движения обеих серий совпадают. Будем искать второе решение в виде

$$\begin{gathered} \mathbf{V}(R_0 + \xi) = \mathbf{U}(R_0 + \xi) + \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{U}(R_0) + \xi [\mathbf{U}_1(R_0) + \boldsymbol{\varphi}_1] + \\ + \xi^2 [\mathbf{U}_2(R_0) + \boldsymbol{\varphi}_2] + \ldots \\ \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}_n = 0, \qquad \boldsymbol{\varphi}_n|_s = 0 \end{gathered} \tag{4.11}$$

Подстановка в уравнения вида (1.3) с учетом (4.3) дает

$$\begin{gathered} L[\boldsymbol{\varphi}_1] = 0 \\ L[\boldsymbol{\varphi}_2] = -\{(\mathbf{U}_1 \cdot \nabla) \boldsymbol{\varphi}_1 + (\boldsymbol{\varphi}_1 \cdot \nabla) \mathbf{U}_1 + (\boldsymbol{\varphi}_1 \cdot \nabla) \boldsymbol{\varphi}_1\} \equiv \mathbf{f}_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ L[\boldsymbol{\varphi}_n] = -\sum_{k=1}^{n-1} \{(\mathbf{U}_k \cdot \nabla) \boldsymbol{\varphi}_{n-k} + (\boldsymbol{\varphi}_k \cdot \nabla) \mathbf{U}_{n-k} + (\boldsymbol{\varphi}_k \cdot \nabla) \boldsymbol{\varphi}_{n-k}\} \equiv \mathbf{f}_n \end{gathered} \tag{4.12}$$

где оператор L составлен по (1.6) при помощи $\mathbf{U}(R)$. Из (4.12) следует

$$\boldsymbol{\varphi}_1 = b_1 \mathbf{u}_0 (R_0) \tag{4.13}$$

с неизвестной постоянной b_1. Для $n > 1$ в силу свойства сопряженных операторов и того факта, что в критической точке $\lambda_0 = 0$, получим

$$\int \mathbf{v}_0 (R_0) L[\boldsymbol{\varphi}_n] dV = \int L^+ [\mathbf{v}_0 (R_0)] \cdot \boldsymbol{\varphi}_n dV = 0$$

из которого вытекает условие разрешимости уравнений (4.12)

$$\int \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{f}_n dV = 0 \tag{4.14}$$

При $n=2$, подставив в $\mathbf{f}_2$ вместо $\boldsymbol{\varphi}_1$ его значение (4.13), получим из (4.14)

$$b_1^2 \int \mathbf{v}_0 \cdot (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u}_0 dV + b_1 \int \mathbf{v}_0 \cdot \{(\mathbf{U}_1 \cdot \nabla) \mathbf{u}_0 + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \mathbf{U}_1\} dV = 0 \tag{4.15}$$

Выбор $b_1 = 0$ ведет, конечно, снова к основной серии; возьмем

$$b_1 = -\int \mathbf{v}_0 \{(\mathbf{U}_1 \cdot \nabla) \mathbf{u}_0 + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \mathbf{U}_1\} dV \Big/ \int \mathbf{v}_0 \cdot (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u}_0 dV \tag{4.16}$$

что возможно, если

$$\int \mathbf{v}_0 \cdot (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u}_0 dV \neq 0 \tag{4.17}$$

Особый случай, когда этот интеграл обращается в нуль, будет исследован в п. 6.

При таком выборе уравнение (4.12) при $n=2$ будет иметь решение, к которому можно будет добавить u_0, умноженное на произвольную постоянную b_2. Легко видеть, что в условие разрешимости (4.14) для $n=3$ постоянная b_2 войдет линейно, так что она определится однозначно и будет вещественной. После этого можно решить уравнение (4.12) для $n=3$ и т. д. Следовательно, вблизи обыкновенной критической точки будет существовать решение вида

$$\mathbf{V}(R) = \mathbf{U}(R) + b_1 (R - R_0)\mathbf{u}_0 + \dots \tag{4.18}$$

Существование такого решения выше критической точки не кажется удивительным: основное стационарное движение там неустойчиво, и если в нем возникнет возмущение, то с течением времени установится новое стационарное движение (4.18). Более странно, что движения второй серии, как это видно из (4.18), возможны и ниже критической точки. Так как там основные движения устойчивы, естественно думать, что движения второй серии будут при $R < R_0$ неустойчивыми. Чтобы показать это, напишем уравнения для нормальных возмущений второго стационарного течения (4.18), аналогичные уравнениям (1.6)

$$-\mu\mathbf{w} + L[\mathbf{w}, \mathbf{V}(R)] = -\mu\mathbf{w} + \nabla s + \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{w} + (\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{w} + (\mathbf{w}\cdot\nabla)\mathbf{V} = 0$$
$$\operatorname{div}\mathbf{w} = 0, \qquad \mathbf{w}|_s = 0 \tag{4.19}$$

При малом ξ, $\mathbf{V}$ может быть заменено его приближенным значением (4.18), после чего получим

$$-\mu\mathbf{w} + L[\mathbf{w}, \mathbf{U}(R_0)] = -\xi[(\mathbf{U}_1\cdot\nabla)\mathbf{w} + (\mathbf{w}\cdot\nabla)\mathbf{U}_1] - \\ - \xi b_1[(\mathbf{u}_0\cdot\nabla)\mathbf{w} + (\mathbf{w}\cdot\nabla)\mathbf{u}_0] \tag{4.20}$$

Вычислим то μ, которое близко к нулю, т. е. найдем $\mathbf{w}_0$, близкое к $\mathbf{u}_0$. Для этого заменим в правой части $\mathbf{w}$ на $\mathbf{u}_0$, а слева положим

$$\mathbf{w} = \mathbf{u}_0 + \sum_{\gamma \neq \alpha} a_\gamma \mathbf{u}_\gamma \tag{4.21}$$

причем a будут малыми первого порядка. Умножив затем (4.20) на $\mathbf{v}_0(R_0)$ и проинтегрировав, получим с точностью до ξ, с учетом (1.10)

$$\mu_0 = \xi\left\{2b_1\int \mathbf{v}_0\cdot(\mathbf{u}_0\cdot\nabla)\mathbf{u}_0 dV + \int \mathbf{v}_0\cdot[(\mathbf{U}_1\cdot\nabla)\mathbf{u}_0 + (\mathbf{u}_0\cdot\nabla)\mathbf{U}_1]\,dV\right\} \tag{4.22}$$

Если подставить сюда значение b_1 из (4.16), получим окончательно

$$\mu_0(R_0 + \xi) = -\xi\int \mathbf{v}_0\cdot[(\mathbf{U}_1\cdot\nabla)\mathbf{u}_0 + (\mathbf{u}_0\cdot\nabla)\mathbf{U}_1]\,dV \tag{4.23}$$

Этот декремент нужно сравнить с декрементом основного движения $\lambda_0(R_0 + \xi)$, вычисление которого проводится, как и выше, только в (4.20) и (4.22) нужно положить $b_1 = 0$. Таким образом,

$$\lambda_0(R_0 + \xi) = +\xi\int \mathbf{v}_0\cdot[(\mathbf{U}_1\cdot\nabla)\mathbf{u}_0 + (\mathbf{u}_0\cdot\nabla)\mathbf{U}_1]\,dV \tag{4.24}$$

и, следовательно,

$$\mu_0(R_0 + \xi) = -\lambda_0(R_0 + \xi) + \dots \tag{4.25}$$

Это значит, что там, где основные движения устойчивы, движения второй серии неустойчивы, и наоборот. В обыкновенной критической точке происходит, следовательно, пересечение двух регулярных серий стационарных решений со сменой устойчивости.

5. Концевая критическая точка. Проведенное исследование показывает, что во всех нормальных случаях, когда интеграл (4.17) не равен нулю, выше критической точки R_0 устойчивы, т. е. будут наблюдаться только стационарные движения второй серии, которые могут существовать также и ниже критической точки, где они будут, однако, неустойчивыми. В п. 2 было доказано, что при $R=0$ никаких стационарных движений, кроме основного $\mathbf{U}=0$, нет. Отсюда следует, что движения второй серии должны перестать существовать [1] при некотором $R_1 < R_0$.

Покажем, что это может случиться, если для второй серии движений R_1 является точкой разветвления, вблизи которой $\mathbf{V}(R)$ разлагается по степеням

$$\eta = (R - R_1)^{1/2} \tag{5.1}$$

При $R < R_1$ такое решение становится мнимым, т. е. перестает существовать физически. Пусть

$$\mathbf{V}(R_1 + \eta^2) = \mathbf{V}_0 + \eta \mathbf{V}_1 + \eta^2 \mathbf{V}_2 + \ldots \tag{5.2}$$

(и аналогично для давления). Очевидно, что

$$\operatorname{div} \mathbf{V}_n = 0, \quad \mathbf{V}_0|_s = R_1 \mathbf{U}_s, \quad \mathbf{V}_2|_s = \mathbf{U}_s, \quad \mathbf{V}_n|_s = 0, \quad n \neq 2 \tag{5.3}$$

Уравнение вида (1.3) для членов, содержащих η, дает:

$$L(\mathbf{V}_1;\ \mathbf{V}_0) = 0 \tag{5.4}$$

Это значит, что в концевой критической точке один из декрементов должен быть нулем. В нашем случае может быть или $\mu_0(R_1) = 0$, или $\mu_1(R_1) = 0$. Предполагая, для определенности последнее, получим:

$$\mathbf{V}_1 = a_1 \mathbf{u}_1(R_1) \tag{5.5}$$

где a_1 — неизвестная пока постоянная.

Далее, для членов, содержащих η^2, получаем

$$L(\mathbf{V}_2;\ \mathbf{V}_0) = -(\mathbf{V}_1 \cdot \nabla)\mathbf{V}_1 \tag{5.6}$$

Если здесь положить $\mathbf{V}_2 = R_1^{-1}\mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_2'$, то получится краевая задача с однородными граничными условиями:

$$L[\mathbf{V}_2', \mathbf{V}_0] = -R_1^{-1}(\mathbf{V}_0 \cdot \nabla)\mathbf{V}_0 - (\mathbf{V}_1 \cdot \nabla)\mathbf{V}_1, \qquad \mathbf{V}_2'|_s = 0 \tag{5.7}$$

Она разрешима только тогда, когда ее правая часть ортогональна к сопряженному возмущению $\mathbf{v}_1(R_1)$, т. е., когда

$$a_1^2 R_1 \int \mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla)\mathbf{u}_1 dV = -\int \mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{V}_0 \cdot \nabla)\mathbf{V}_0 dV \tag{5.8}$$

Интеграл в правой части здесь не равен нулю, так как в противном случае вблизи R_1 существовало бы решение, разлагающееся по степеням $(R - R_1)$. Таким образом, из (5.8) можно определить $a_1 \neq 0$, и вблизи R_1 движения второй серии будут иметь вид

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + (R - R_1)^{1/2} a_1 \mathbf{u}_1(R_1) + \ldots \tag{5.9}$$

Остальных членов этого разложения мы рассматривать не будем.

Без дальнейшего исследования нельзя исключить возможность, что и основная серия стационарных движений может иметь концевую точку при некотором R_2, выше которой не будет стационарных движений.

6. Точка разветвления. Особый случай получается, когда при $\lambda_0 = 0$

$$\int \mathbf{v}_0 (\mathbf{u}_0 \nabla)\mathbf{u}_0 dV = 0 \tag{6.1}$$

Из формул (4.16) и (5.8) видно, что R_0 не может быть ни обыкновенной критической, ни концевой точкой. Интеграл (6.1) может ока-

[1] См. замечание Ландау в [[2]], конец § 27.

заться нулем либо случайно (возможность этого исключается), либо в силу симметрии задачи; именно так обстоит дело в случае движения жидкости между двумя бесконечными цилиндрами. Симметрия задачи допускает здесь любой сдвиг вдоль оси цилиндров, и поэтому нормальные возмущения $\mathbf{u}_0$ и $\mathbf{v}_0$ зависят от отсчитываемой вдоль оси цилиндров координаты z как $\cos kz$ или $\sin kz$. Каждое слагаемое в интеграле (6.1) будет содержать произведение трех таких функций и, следовательно, будет равно нулю. В этой же задаче, как вообще в задачах с цилиндрической симметрией, нормальные возмущения зависят от угла φ, отсчитываемого вокруг оси симметрии как $\cos m\varphi$ или $\sin m\varphi$, $m = 0, 1, 2, \ldots$. В задаче Тейлора для возмущения срывающего стационарное движение m оказывается равным нулю. Но если бы в какой-либо задаче устойчивость нарушалась при $m \neq 0$, то интеграл (6.1) содержал бы три множителя вида $\cos m\varphi$ или $\sin m\varphi$, и также получился бы особый случай.

Покажем, что если в критической точке выполняется условие (6.1) и при этом вблизи нее существуют решения основной серии, разлагающиеся по целым степеням $(R - R_0)$, то в этой точке появляются две новые серии стационарных движений, разлагающиеся по целым степеням

$$\eta = \pm (R - R_0)^{1/2}$$

Эти новые решения должны иметь вид

$$\mathbf{V}(R) = \mathbf{U}(R) + \boldsymbol{\psi} = \mathbf{U}_0 + \eta\boldsymbol{\psi}_1 + \eta^2 [\mathbf{U}_1 + \boldsymbol{\psi}_2] + \eta^3\boldsymbol{\psi}_3 + \ldots \qquad (6.2)$$
$$\boldsymbol{\psi}_n|_s = 0, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{\psi}_n = 0$$

и они должны удовлетворять уравнениям, аналогичным (1.3). Для членов первого порядка по η получим

$$L(\boldsymbol{\psi}_1;\ \mathbf{U}_0) = 0 \qquad (6.3)$$

Отсюда

$$\boldsymbol{\psi}_1 = a_1 \mathbf{u}_0 (R_0) \qquad (6.4)$$

Уравнения для членов второго порядка будут

$$L(\boldsymbol{\psi}_2;\ \mathbf{U}_0) = -(\boldsymbol{\psi}_1 \cdot \nabla)\boldsymbol{\psi}_1 = -a_1^2 (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla)\mathbf{u}_0 \qquad (6.5)$$

и условие их разрешимости

$$\int \mathbf{v}_0 \cdot (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla)\mathbf{u}_0 dV = 0$$

выполняется автоматически в силу (6.1). Их решение будет иметь вид

$$\boldsymbol{\psi}_2 = a_1^2 \boldsymbol{\chi}_2 + a_2 \mathbf{u}_0 \qquad (6.6)$$

причем a_1 остается неопределенным, а a_2 — новая неизвестная постоянная. Наконец, в третьем порядке получим уравнения

$$L[\boldsymbol{\psi}_3;\ \mathbf{U}_0] = -(\boldsymbol{\psi}_1 \cdot \nabla)[\mathbf{U}_1 + \boldsymbol{\psi}_2] - [(\mathbf{U}_1 + \boldsymbol{\psi}_2) \cdot \nabla]\boldsymbol{\psi}_1 \qquad (6.7)$$

в правую часть которых следует подставить выражения (6.4) и (6.6). Условие их разрешимости (ортогональности правой части к $\mathbf{v}_0$) будет

$$a_1^3 \int \mathbf{v}_0 [(\mathbf{u}_0 \cdot \nabla)\boldsymbol{\chi}_2 + (\boldsymbol{\chi}_2 \cdot \nabla)\mathbf{u}_0]\, dV + \qquad (6.8)$$
$$+ a_1 \int \mathbf{v}_0 \cdot [(\mathbf{u}_0 \cdot \nabla)\mathbf{U}_1 + (\mathbf{U}_1 \cdot \nabla)\mathbf{u}_0]\, dV + 2a_1 a_2 \int \mathbf{v}_0 \cdot (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla)\mathbf{u}_0 dV = 0$$

Последнее слагаемое здесь равно нулю в силу (6.1) и ненулевое решение для a_1 будет

$$a_1^2 = -\frac{\int \mathbf{v}_0 \cdot [(\mathbf{u}_0 \cdot \nabla)\, \mathbf{U}_1 + (\mathbf{U}_1 \cdot \nabla)\, \mathbf{u}_0]\, dV}{\int \mathbf{v}_0 \cdot [(\mathbf{u}_0 \cdot \nabla)\, \chi_2 + (\chi_2 \cdot \nabla)\, \mathbf{u}_0]\, dV} \tag{6.9}$$

и т. д. Таким образом, в R_0 появляются решения вида

$$\mathbf{V} = \mathbf{U} \pm a_1 (R - R_0)^{1/2} \mathbf{u}_0 + \ldots \tag{6.10}$$

Такого рода критическую точку естественно назвать точкой разветвления. Легко показать, что наименьшие декременты движений (6.10) будут $\lambda_0 = \pm c (R - R_0)^{1/2} + \ldots$, поэтому только одно из этих движений устойчиво.

Именно такой случай был исследован экспериментально Тейлором [5]. Жидкость находилась между двумя очень длинными коаксиальными цилиндрами, которые вращались с разными угловыми скоростями, и измерялся вращающий момент, действующий со стороны жидкости на один из цилиндров. В этой задаче для основного течения момент строго пропорционален R. На экспериментальной же кривой, дающей момент в зависимости от R, в критической точке R_0 ясно виден излом. Добавочный момент, появляющийся выше критической точки, по-видимому, действительно пропорционален $(R - R_0)^{1/2}$. Следует иметь в виду, что цилиндры Тейлора имели конечную длину, так что, строго говоря, критическая точка должна быть обыкновенной. Второе стационарное решение, а с ним и добавочный момент, должны отличаться от основного на величину, пропорциональную $(R - R_0)$, но с очень большим коэффициентом пропорциональности. Такую кривую трудно отличить от параболы (6.10). Между обыкновенной точкой и точкой разветвления существует качественное различие: в точке разветвления второе решение существует только при $R > R_0$, тогда как в обыкновенной точке оно возможно и при $R < R_0$, хотя там оно неустойчиво. Если осторожно, уменьшая число Рейнольдса, перейти через обыкновенную критическую точку, то можно сохранить второе течение и при $R < R_0$. В точке разветвления это абсолютно невозможно. В экспериментах Льюиса, по-видимому, наблюдалась именно обыкновенная точка, так как он говорит, что «когда скорость постепенно уменьшалась, вихри сохранялись до тех пор, пока эта скорость не принимала значений меньших, чем те, при которых они появлялись» [4].

Поступила 8 IV 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д. К проблеме турбулентности. ДАН СССР, 1944, т. 44, стр. 339.
2. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред, ГИТТЛ, 1953, стр. 129.
3. Taylor G. J. Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders. Phil. Trans. Roy. Soc., ser. A, 1923, vol. 223, 289.
4. Lewis J. W. An experimental study of the motion of a viscous liquid contained between two coaxial cylinders. Proc. Roy. Soc., ser. A, 1928, vol. 117, 388.
5. Stuart I. T. On the non linear mechanics of hydrodynamic stability. J. of Fluid Mechanics, 1958, vol. 4, 1.
6. Сорокин В. С. О стационарных движениях в жидкости, подогреваемой снизу. ПММ, 1954, т. XVIII, вып. 1.