Прикладная математика и механика. Том XXV, 1961
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

О ДВИЖЕНИИ ВИХРЯ ПОД ПОВЕРХНОСТЬЮ ЖИДКОСТИ

И. Г. Филиппов

(Москва)

Задача об установившемся движении вихря под поверхностью жидкости в нелинейной постановке рассматривалась Н. Н. Моисеевым [1].

Н. Н. Моисеев [1] показал, что при числах Фруда, близких к единице, но больших единицы, возможны во всяком случае два решения. Одно из решений описывает поток, переходящий в плоскопараллельный при стремлении интенсивности вихря к нулю; другое решение описывает поток, переходящий при тех же условиях в уединенную волну. Теорему существования и единственности первого решения «в малом» доказал А. М. Тер - Крикоров [2]. Автор [3] доказал теорему существования и единственности второго решения, но также лишь «в малом», т. е. для малых значений интенсивности вихря.

Ниже доказывается теорема существования первого решения для конечных значений интенсивности вихря. Доказательство теоремы основывается на применении топологических методов теории неподвижной точки Лерэ — Шаудера [4].

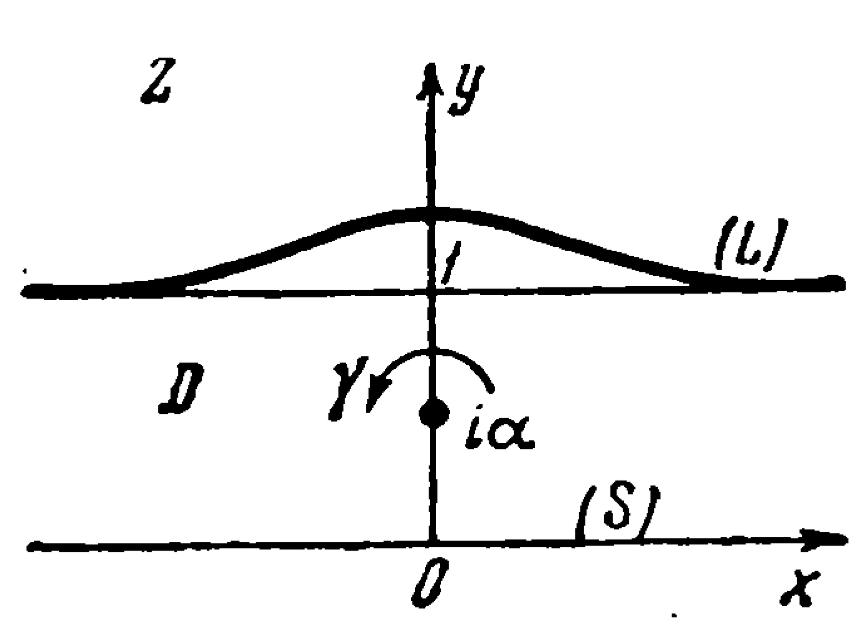
§ 1. Постановка задачи. Задача об установившемся движении вихря под поверхностью тяжелой идеальной жидкости в безразмерных переменных сводится к определению аналитической функции $\zeta(z) = \xi(x, y) + i\eta(x, y)$, осуществляющей конформное отображение физической области z (фиг. 1) на параметрическую область ζ (фиг. 2) — полосу единичной ширины $0 \leqslant \eta \leqslant 1$. Положив

$$\frac{d\zeta}{dz} = e^{-i\omega(\zeta)}, \qquad \omega(\zeta) = \theta(\xi, \eta) + i\tau(\xi, \eta)$$

задачу сводим к определению аналитической функции $\omega(\zeta)$, удовлетворяющей условиям (см. работу [2]): (1.1)

$$\frac{\partial\theta}{\partial\eta} = \nu\,\frac{e^{-3\tau}\sin\theta}{f^2(\xi)} + \frac{f'(\xi)}{f(\xi)}, \qquad \nu < 1 \quad \text{при } \eta = 1$$

$$\omega = 0 \quad \text{при } |\xi| \to \infty, \quad \theta = 0 \quad \text{при } \eta = 0 \qquad (1.2)$$



Фиг. 1

Здесь

$$f(\xi) = 1 - \frac{\gamma}{2}\,\frac{\sin\pi\beta}{\operatorname{ch}\pi\xi + \cos\pi\beta}, \qquad \gamma = \frac{\Gamma}{cH} \qquad (1.3)$$

$$\beta = \alpha + \operatorname{Im}\int_{i\beta}^{i-\infty}\left[e^{i\omega(t)} - 1\right]dt$$

α и β — глубины погружения вихря в физической и параметрической областях, соответственно.

Для того чтобы скорость на свободной поверхности L не обращалась в нуль, необходимо выполнить условие $\gamma < 2\operatorname{ctg}\pi/2\beta$. Данное условие всегда выполняется при $\gamma < 0$. Этот случай наиболее интересен, так как в данном случае подъемная сила направлена вверх.

Функция $\omega(\zeta)$ с точностью до константы определит однозначную функцию $z(\zeta)$. Достаточным условием однолистности функции $z(\zeta)$ является условие [5]

$$|\theta(\xi, 1)| \leqslant \pi \tag{1.4}$$

Заметим, что в данной безразмерной постановке решение задачи определяется параметрами ν, $V_0 = e^{-\tau(0)}$, γ и β.

§ 2. Функция Грина. Общие уравнения задачи. Основное граничное условие (1.1) можно записать в виде

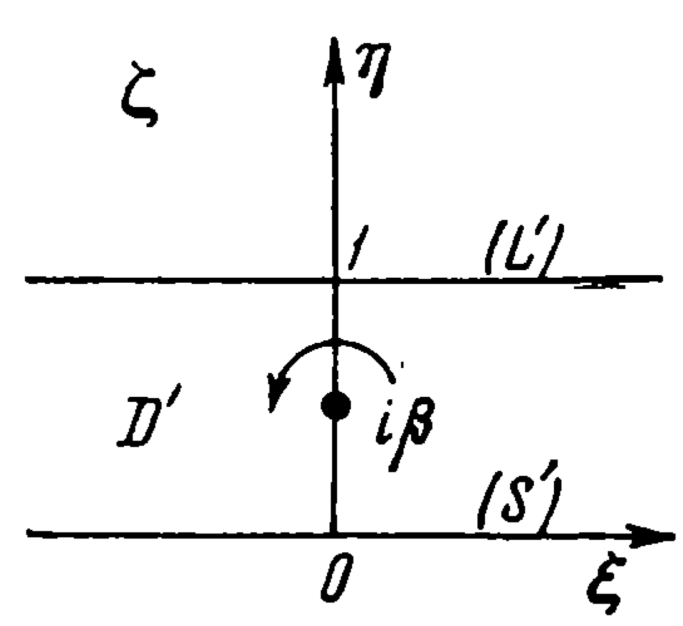
$$\frac{\partial\theta}{\partial\eta} = \nu \frac{e^{-3\tau}\sin\theta}{f^2(\xi)} + \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = F(\xi) \quad \text{при } \eta = 1, \qquad \theta = 0 \quad \text{при } \eta = 0 \tag{2.1}$$

Назовем функцией Грина задачи (2.1) функцию $G(\zeta, \zeta') = H(\zeta, \zeta') + iQ(\zeta, \zeta')$, аналитическую в полосе $0 < \eta < 1$, имеющую логарифмическую особенность в точке $\xi = \xi'$, $\eta = \eta'$ и удовлетворяющую условиям:

$$\frac{\partial H}{\partial\eta} = 0 \quad \text{при } \eta = 1, \qquad H = 0 \quad \text{при } \eta = 0 \tag{2.2}$$

Функция Грина G, удовлетворяющая условиям (2.2), имеет вид

$$G(\zeta, \zeta') = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\mu(\zeta - \xi')}{\mu}\,\frac{\operatorname{ch}\mu(1-\eta')}{\operatorname{ch}\mu}\,d\mu \tag{2.3}$$



Фиг. 2

Полагая здесь $\eta' = 1$, получим теорему.

Теорема 2.1. Если $F(\xi)$ абсолютно интегрируемая функция, то функция

$$\omega(\zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\zeta, \xi' + i) F(\xi')\,d\xi'$$

будет аналитической в открытой полосе $0 < \eta < 1$, непрерывной в замкнутой полосе $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, и если $F(\xi)$ нечетная функция, то действительная часть $\omega(\zeta)$ удовлетворяет условиям (1.2) и (2.1).

Теорема доказывается аналогично теоремам (3.1) и (3.2) работы [2].

Отделяя в (2.3) мнимую и реальную части, получим

$$\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} H_0(\xi - \xi', \eta) F(\xi')\,d\xi', \qquad \tau = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} Q_0(\xi - \xi', \eta) F(\xi')\,d\xi' \tag{2.4}$$

где

$$H_0(\xi - \xi', \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\mu(\xi - \xi')\operatorname{sh}\mu\eta}{\mu\operatorname{ch}\mu}\,d\mu = \ln\frac{\operatorname{ch}{}^1\!/_2\pi(\xi - \xi') + \sin{}^1\!/_2\pi\eta}{\operatorname{ch}{}^1\!/_2\pi(\xi - \xi') - \sin{}^1\!/_2\pi\eta}$$

$$Q_0(\xi - \xi', \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\mu(\xi - \xi')\operatorname{ch}\mu\eta}{\mu\operatorname{ch}\mu}\,d\mu = 2\operatorname{arctg}\left\{\frac{\operatorname{sh}{}^1\!/_2\pi(\xi - \xi')}{\cos{}^1\!/_2\pi\eta}\right\}$$

Первый интеграл (2.4) по теореме (2.1) непрерывен при $\eta = 1$, второй — при $\eta = 0$. Поэтому, обозначив $\theta(\xi, 1) = \theta(\xi)$, $\tau(\xi, 1) = \tau(\xi)$, $\tau(\xi, 0) = \tau_0(\xi)$, получим

$$\theta(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \ln\frac{\operatorname{ch}{}^1\!/_2\pi(\xi - \xi') + 1}{\operatorname{ch}{}^1\!/_2\pi(\xi - \xi') - 1} F(\xi')\,d\xi' \tag{2.5}$$

$$\tau_0(\xi) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arc\,tg}\{\operatorname{sh}{}^1\!/_2\pi(\xi - \xi')\} F(\xi')\,d\xi' \tag{2.6}$$

Кроме того, используя соотношение $\partial\theta/\partial\eta = -\partial\tau/\partial\xi$, по (1.1) найдем связь между $\theta(\xi)$ и $\tau(\xi)$:

$$-\tau(\xi) = \ln f(\xi) + \nu \int\limits_{-\infty}^{\xi} \frac{e^{-3\tau}\sin\theta}{f^2(\xi')}\, d\xi' \tag{2.7}$$

Отметим некоторые свойства искомых функций в полуполосе $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, $-\infty < \xi \leqslant 0$. Из условия (1.2) следует, что интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \sin\theta(\xi)\, d\xi$$

конечен, функция $\tau(\xi)$ непрерывна и равна нулю при $|\xi| = \infty$. Из (2.7) также вытекает, что функция $\tau(\xi)$ непрерывно дифференцируема по ξ и ограничена

$$|\tau(\xi)| \leqslant \rho, \qquad \rho = -\ln V_0 \tag{2.8}$$

Тогда по (2.6) функция $\tau_0(\xi)$ также ограничена и, как легко видеть, $|\tau_0(\xi)| \leqslant \rho$.

Функция $\theta(\xi)$ на L' ограничена и имеет место неравенство

$$|\theta(\xi)| \leqslant |F(\xi)| \leqslant \nu / V_0^3 + p(\gamma) \tag{2.9}$$

Неравенство (2.9) легко получить из (2.5), причем

$$p(\gamma) = \frac{\pi\,|\gamma|\sin {}^1\!/_2\pi\beta}{2\cos {}^1\!/_2\pi\beta\,(2\cos^{2}{}^1\!/_2\pi\beta - {}^1\!/_2\gamma\sin\pi\beta)}, \qquad 0 < V_0 < 1$$

Условие однолистности (1.4) функции $z(\zeta)$ накладывает дополнительное ограничение на начальные параметры ν, V_0, γ вида

$$\nu / V_0^3 + p(\gamma) \leqslant \pi \tag{2.10}$$

Замечание. В силу (2.9) имеет место также неравенство

$$|\theta(\xi)| \leqslant \nu / V_0^3 \max|\theta(\xi)| + p(\gamma)$$

Отсюда вытекает, что при $\nu < 1$

$$\max|\theta(\xi)| \to 0 \quad \text{при } \gamma \to 0, \text{ если } \nu / V_0^3 < 1 \tag{2.11}$$

т. е. при $\gamma = 0$ течение переходит в плоско-параллельное.

С другой стороны, из (2.10) следует, что с увеличением γ по абсолютной величине ν должно уменьшаться, т. е. решение, удовлетворяющее условию (2.10), соответствует быстрым течениям.

Таким образом, если функция $F(\xi)$ нечетная, т. е. волна симметричная, функции $\theta(\xi)$, $\tau(\xi)$, $\tau_0(\xi)$ удовлетворяют уравнениям (2.7), (2.5) и (2.6) и всем граничным и асимптотическим условиям. Обозначим через V систему уравнений (2.5), (2.6), (2.7), где α — функционал (1.3), а начальные параметры удовлетворяют условию (2.10).

Будем изучать вопрос существования решения системы V, предполагая, что $\theta(\xi)$ принадлежит классу функций, имеющих заданный apriori модуль непрерывности (или мажоранту) на бесконечности вида $|\theta(\xi)| < CT(\xi)$, где C пока произвольная константа, а $T(\xi)$ удовлетворяет условиям:

а) функция $T(\xi)$ непрерывна при $-\infty < \xi < +\infty$, положительная и четная, убывает при $\xi > 0$, возрастает при $\xi < 0$ и $T(\pm\infty) = 0$;

б) интеграл $\int\limits_{-\infty}^{0} T(\xi)\, d\xi$ конечен

Введя модуль непрерывности $\theta(\xi)$, систему V можно заменить системой V_c, зависящую от C и $T(\xi)$, к которой применим теорию неподвижной точки Лерэ—Шаудера [4]. Мажоранту $T(\xi)$ и C определим так, чтобы решение системы V_c было решением системы V, и покажем, что система V_c имеет во всяком случае одно решение.

§ 3. Построение системы V_c. Функциональные уравнения задачи. Предположим, что существует постоянная C — положительное число и непрерывная функция $T(\xi)$, удовлетворяющая условиям (2.11), такие, что

$$|\theta(\xi)| < CT(\xi) \tag{3.1}$$

Рассмотрим некоторое решение системы V, удовлетворяющее условию (3.1). Пусть $\theta(\xi)$ удовлетворяет условию (1.4) и $\tau(\xi)$ и $\theta(\xi)$ связаны соотношением (2.7). Тогда условие (2.7), согласно (3.1), можно записать в виде

$$-\tau(\xi) = \ln f(\xi) + \nu \int\limits_{-\infty}^{\xi} \sup\left\{\frac{e^{-3\tau}\sin\theta}{f^2(\xi')},\ CT(\xi')\right\} d\xi' \tag{3.2}$$

где $-\tau(\xi)$ — положительная функция, а $\sup\{Q_1(\xi),\ Q_2(\xi)\}$ обозначает нижнюю огибающую двух положительных функций $Q_1(\xi)$ и $Q_2(\xi)$. Через V_c обозначим систему (2.5), (2.6) и (3.2). Система V_c зависит от C и $T(\xi)$. Нетрудно видеть, что

$$\left|\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}\right| = \frac{\pi|\gamma|\sin\pi\beta}{2} e^{-\pi|\xi|}\varphi(\xi), \qquad 0 \leqslant \varphi(\xi) \leqslant 1, \qquad \varphi(0) = 0$$

Тогда, согласно (2.1), естественно положить

$$T(\xi) = e^{-\pi|\xi|} \tag{3.3}$$

причем так выбранная функция $T(\xi)$ удовлетворяет всем условиям (2.11).

Предположим, что имеем некоторое решение системы V_c и начальные параметры ν, V_0 и γ удовлетворяют условию (2.9). Это решение отличается от решения системы V только тем, что на верхней границе области D' (фиг. 2) имеем условие (3.2); откуда следует, что

$$\left|\frac{\partial\tau}{\partial\xi}\right| \leqslant CT(\xi)\left\{\frac{\nu}{V_0^2} + \frac{\mu}{C}\right\}, \qquad \mu = \frac{\pi|\gamma|\sin\pi\beta}{2} \tag{3.4}$$

Неравенство (3.4) позволяет оценить величину $\theta(\xi)$ из (2.5). Так как $F(\xi) = \partial\tau/\partial\xi$, то легко показать, что

$$|\theta(\xi)| \leqslant CT(\xi)\,\{\nu/V_0^3 + \mu/C\} \tag{3.5}$$

Из неравенства (3.5) следует, что при $\nu/V_0^3 < 1$, постоянную C можно выбрать таким образом, чтобы выполнялось условие (3.1).

Таким образом, при условии (2.10) существует система V_c, обладающая всеми необходимыми свойствами. Покажем, что систему V_c можно свести к одному функциональному уравнению.

Для этого введем пространство B непрерывных и конечных на интервале $-\infty < \xi \leqslant 0$ функций $\varphi(\xi)$ с нормой $\|\varphi(\xi)\| = \max|\varphi(\xi)|$; пространство B — линейное, нормированное и полное.

Обозначим

$$-\tau(\xi) = H_1(\xi), \qquad \theta(\xi) = H_2(\xi), \qquad -\tau_0(\xi) = H_3(\xi)$$

Тогда систему V_c можно заменить следующей системой уравнений:

$$H_1(\xi) = \ln f(\xi) + \nu \int\limits_{-\infty}^{\xi} \sup\left\{\frac{e^{-3\tau}\sin\theta}{f^2(\xi')},\ CT(\xi')\right\} d\xi' \tag{3.6}$$

$$H_2(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln\frac{\operatorname{ch}{}^1/_2\pi(\xi-\xi')+1}{\operatorname{ch}{}^1/_2\pi(\xi-\xi')-1} F(\xi')\, d\xi' \tag{3.7}$$

$$H_3(\xi) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg}\{\operatorname{sh}{}^1/_2\pi(\xi-\xi')\} F(\xi')\, d\xi' \tag{3.8}$$

$$F(\xi) = \nu\,\frac{e^{-3\tau}\sin\theta}{f^2(\xi)} + \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} \tag{3.9}$$

Рассмотрим некоторое решение задачи. Из вида (3.7) и (3.8) вытекает, что $H_2(\xi)$, $H_3(\xi)$ принадлежит B. Из (3.6) также следует, что дифференцируемая функция $H_1 \in B$.

Если через $R = B\times B\times B$ обозначим пространство векторов с компонентами $\tau(\xi)$, $\theta(\xi)$, $\tau_0(\xi)$ и с нормой $\|y\|$, где $y \in R$, то систему (3.6) — (3.9) можно записать в виде одного функционального уравнения

$$y = W(y), \qquad y \in R \tag{3.10}$$

которое элементу y с координатами $\tau(\xi)$, $\theta(\xi)$, $\tau_0(\xi)$ ставит в соответствие элемент y' с координатами $H_1(\xi)$, $H_2(\xi)$, $H_3(\xi)$. Пространство R линейное, нормированное и полное.

§ 4. Существование решения. Покажем, что оператор W вполне непрерывен, т. е. он непрерывен и компактен на любом ограниченном множестве из R.

По предположению оператор W действует на ограниченном множестве из R. Поэтому по виду уравнений (3.6) — (3.9) нетрудно установить, что функции $H_1(\xi)$, $H_2(\xi)$, $H_3(\xi)$ принадлежат пространству B и непрерывно зависят от $\tau(\xi)$, $\theta(\xi)$, причем $dH_1/d\xi$ конечна на интервале $-\infty < \xi \leqslant 0$. Покажем, что оператор W компактен.

Функция $H_1(\xi)$, определяемая правой частью (3.7), для любой точки $y \in R$ удовлетворяет соотношениям

$$|dH_1/d\xi| \leqslant \nu/V_0^3 + p(\gamma, \beta) \leqslant \pi \tag{4.1}$$

где

$$p = \frac{\pi|\gamma|\sin{}^1/_2\pi\beta}{2\cos{}^1/_2\pi\beta\,(2\cos^2{}^1/_2\pi\beta - {}^1/_2\gamma\sin\pi\beta)}$$

$$\left|\frac{dH_2}{d\xi}\right| \leqslant CT(\xi)\left(\frac{\nu}{V_0^3} + \frac{\mu}{C}\right) \leqslant CT(\xi) \tag{4.2}$$

при условии $\nu/V_0^3 < 1$ и таком C, что выполняется условие (3.1).

Из неравенства (4.1), (4.2) и свойств функции $T(\xi)$ следует, что $H_1(\xi) \in R$ и оператор H_1 равностепенно-непрерывен и равномерно-ограничен на любом конечном шаре из R.

Аналогично можно показать, что $H_2(\xi)$, $H_3(\xi)$ принадлежат R и являются равностепенно-непрерывными и равномерно-ограниченными на любом шаре из R.

Отсюда, на основании теоремы Арцеля, следует, что оператор W является компактным, а так как к тому же W непрерывен, то, следовательно, и вполне непрерывен на каждом шаре из R и имеет место.

Теорема 4.1. Существует по крайней мере одно решение задачи, начальные параметры которого удовлетворяют неравенствам

$$\nu / V_0^3 < 1, \qquad \nu / V_0^3 + p(\gamma, \beta) \leqslant \pi \tag{4.3}$$

Рассмотрим некоторое решение функционального уравнения (3.10), начальные параметры которого удовлетворяют неравенству

$$\nu / V_0^3 + p(\gamma, \beta) \leqslant \pi \tag{4.4}$$

При выполнении неравенства (4.4) данное решение определит некоторое течение жидкости, на границе которого выполняется условие (3.2) или (3.6). Так как, кроме того, из (3.7) имеем неравенство

$$|d\tau / d\xi| \leqslant \nu / V_0^3 + p(\gamma, \beta) = A(\nu, V_0, \gamma, \beta)$$

то можно показать, что $\|y\| \leqslant \text{const}\, A(\nu, V_0, \gamma, \beta) + \text{const}$.

Далее рассмотрим уравнение

$$y = W(\mu', y) \tag{4.5}$$

которое получено заменой ν и γ на $\mu'\nu$ и $\mu'\gamma$. Нетрудно показать, что при выполнении неравенства (4.4), которое при замене ν и γ на $\mu'\nu$ и $\mu'\gamma$ является целой и возрастающей функцией от μ', решения уравнения (4.5) равномерно ограничены при $0 \leqslant \mu' \leqslant 1$, оператор W вполне непрерывен при каждом μ' из интервала $0 \leqslant \mu' \leqslant 1$ и равномерно непрерывен по μ' при каждом значении y из шара пространства R.

Положив $\mu' = 0$ в уравнении (4.5), получим $y = 0$. Следовательно, [4] полный индекс функционального уравнения (4.5) при $\mu' = 0$ равен $+1$ и уравнение (3.10), полученное из (4.5) при $\mu' = 1$, имеет хотя бы одно решение. Таким образом, задача решена.

Замечание (4.1). Условия (4.3) и (4.4) дают, что $\nu < 1$ и что с увеличением γ по модулю ν уменьшается. Такие решения соответствуют быстрым течениям.

Замечание (4.2.) Из условия $0 \leqslant |\theta(\xi)| \leqslant \pi$ на полуполосе $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, $-\infty < \xi \leqslant 0$ вытекает, что образ данной полуполосы не перекрывается. Но может случиться, что данная полуполоса (см. фиг. 2) перекрывается с симметричной полуполосой. Достаточным условием неперекрываемости полуполос $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, $-\infty < \xi \leqslant 0$ и $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, $0 \leqslant \xi < +\infty$ является условие $|\theta(\xi)| < {}^1\!/_2\pi$ и, следовательно, условие (2.9) заменяется следующим:

$$\nu / V_0^3 + p(\gamma, \beta) \leqslant {}^1\!/_2\pi$$

Поступила 16 VI 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Моисеев Н. Н., О единственности возможных форм установившихся течений тяжелой жидкости при числах Фруда, близких к единице. ПММ, т. 21, вып. 6, 1957.
2. Тер-Крикоров А. М. Точное решение задачи о движении вихря под поверхностью жидкости. Изв. АН СССР, Сер. матем., т. 22, вып. 2, 1958.
3. Филиппов И. Г., Решение задачи о движении вихря под поверхностью жидкости при числах Фруда, близких к единице. ПММ, т. 24, вып. 3, 1960.
4. Лерей Ж., Шаудер Ю. Топология и функциональные уравнения. УМН, т. I, вып. 3—4, 1946.
5. Gerber R., Sur les solutions exacts des equations du mouvement avec surface lebre d'un liquide pesant. J. Math. Pures Appl., 34, (1955), 185—299.