

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ КОНИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ

Б. М. Булах

(Саратов)

Рассматриваются краевые задачи теории вихревых конических течений и уточняется схема обтекания треугольного крыла; находятся типы особых точек, возникающих при смыкании безвихревых и вихревых конических потоков после затухающих ударных волн.

§ 1. Для определенности будем рассматривать плоское треугольное крыло под углом атаки δ без скольжения в потоке невязкого газа, имеющем скорость W_1 , число Маха $M_1 > 1$, скорость звука a_1 (фиг. 1).

Кромки крыла будем предполагать сверхзвуковыми; конические течения, возникающие при обтекании «верха» и «низа» крыла, не взаимодействуют и могут рассматриваться отдельно. В конических потоках компоненты скорости u, v, w , энтропия S , давление p зависят от угловых переменных, за которые примем $\xi = x/z, \eta = y/z$.

Плоскость ξ, η имеет простой физический смысл, это — плоскость $z = 1$ в пространстве x, y, z , а ξ, η — соответственно координаты x и y этой плоскости. Вихревые конические течения описываются уравнениями (1.1) [1]

$$L_1 = (u - \xi w) \left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right)_\xi + (v - \eta w) \left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right)_\eta + a^2 (\xi w_\xi + \eta w_\eta - u_\xi - v_\eta) = 0 \quad (1.1)$$

$$L_2 = (u - \xi w) s_\xi + (v - \eta w) s_\eta = 0$$

$$L_3 = \xi [(u - \xi w) u_\xi + (v - \eta w) u_\eta] + \eta [(u - \xi w) v_\xi + (v - \eta w) v_\eta] + (u - \xi w) w_\xi + (v - \eta w) w_\eta = 0$$

$$L_4 = w \{ \xi [(u - \xi w) u_\eta - (v - \eta w) u_\xi] + \eta [(u - \xi w) v_\eta - (v - \eta w) v_\xi] + (u - \xi w) w_\eta - (v - \eta w) w_\xi \} + [(u - \xi w)^2 + (v - \eta w)^2] (u_\eta - v_\xi) + a^2 [(u - \xi w) s_\eta - (v - \eta w) s_\xi] = 0$$

Эти уравнения представляют собой комбинацию уравнений количества движения, неразрывности, энергии. Здесь c_v — удельная теплоемкость при постоянном объеме, γ — адиабатический индекс, a — скорость звука

$$s = S [(\gamma - 1) \gamma c_v]^{-1}, \quad a^2 = a_1^2 - \frac{\gamma - 1}{2} (u^2 + v^2 + w^2 - W_1^2)$$

Для безвихревых течений конический потенциал

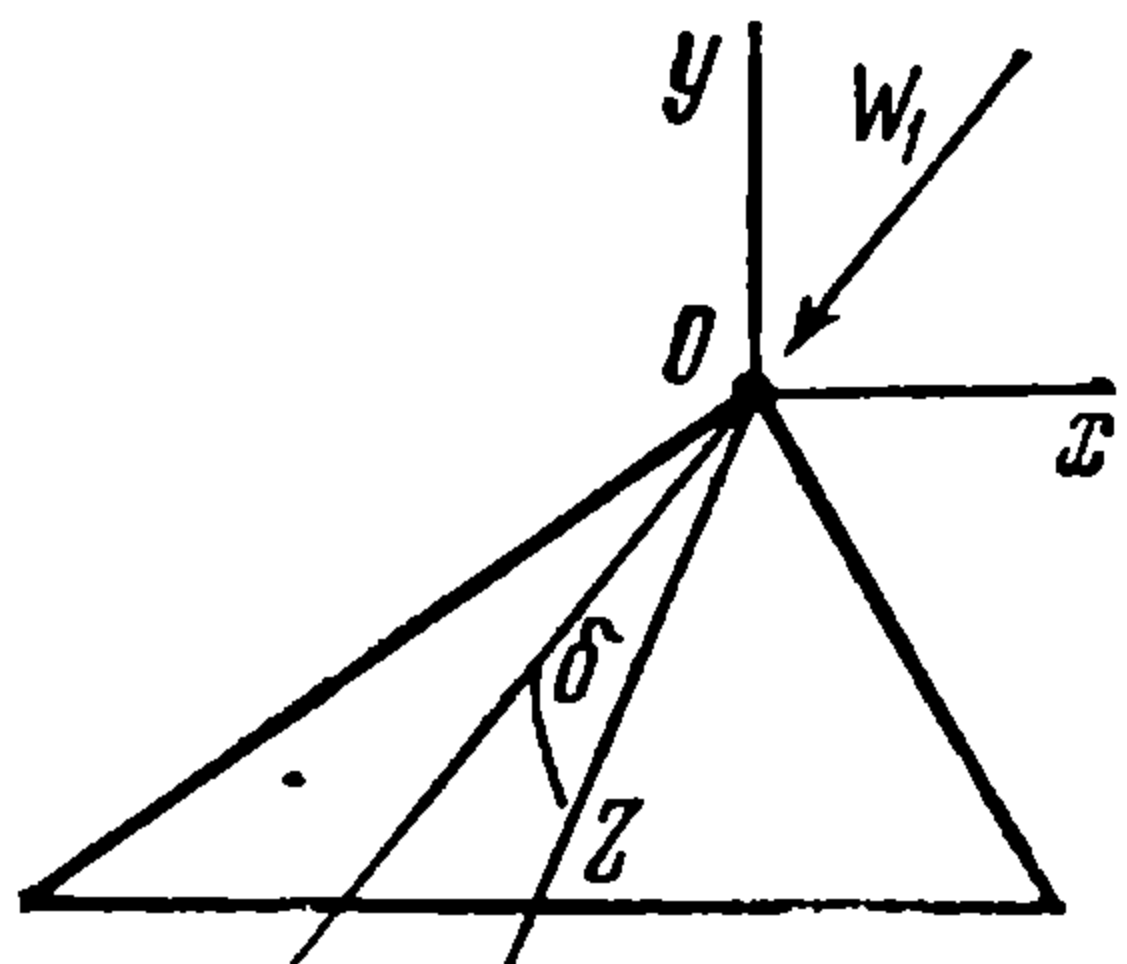
$$F(\xi, \eta) = z^{-1} \varphi(x, y, z)$$

Здесь φ — потенциал скорости, удовлетворяет уравнению [2]

$$\{a^2(1+r^2) - [rF - (1+r^2)F_r]^2\} F_{rr} + 2\left[F - \left(r + \frac{1}{r}\right)F_r\right] F_{\theta\theta} \times \\ \times \left(\frac{1}{r}F_{r\theta} - \frac{1}{r^2}F_{\theta}\right) + \left(a^2 - \frac{1}{r^2}F_{\theta}^2\right)\left(\frac{1}{r^2}F_{\theta\theta} + \frac{1}{r}F_r\right) = 0 \quad (1.2)$$

$$(r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \operatorname{tg} \theta = \eta / \xi)$$

Уравнение (1.2) эллиптического (гиперболического) типа, если проекция скорости на плоскость, перпендикулярную радиусу-вектору точки в пространстве xyz , меньше (больше) местной скорости звука.



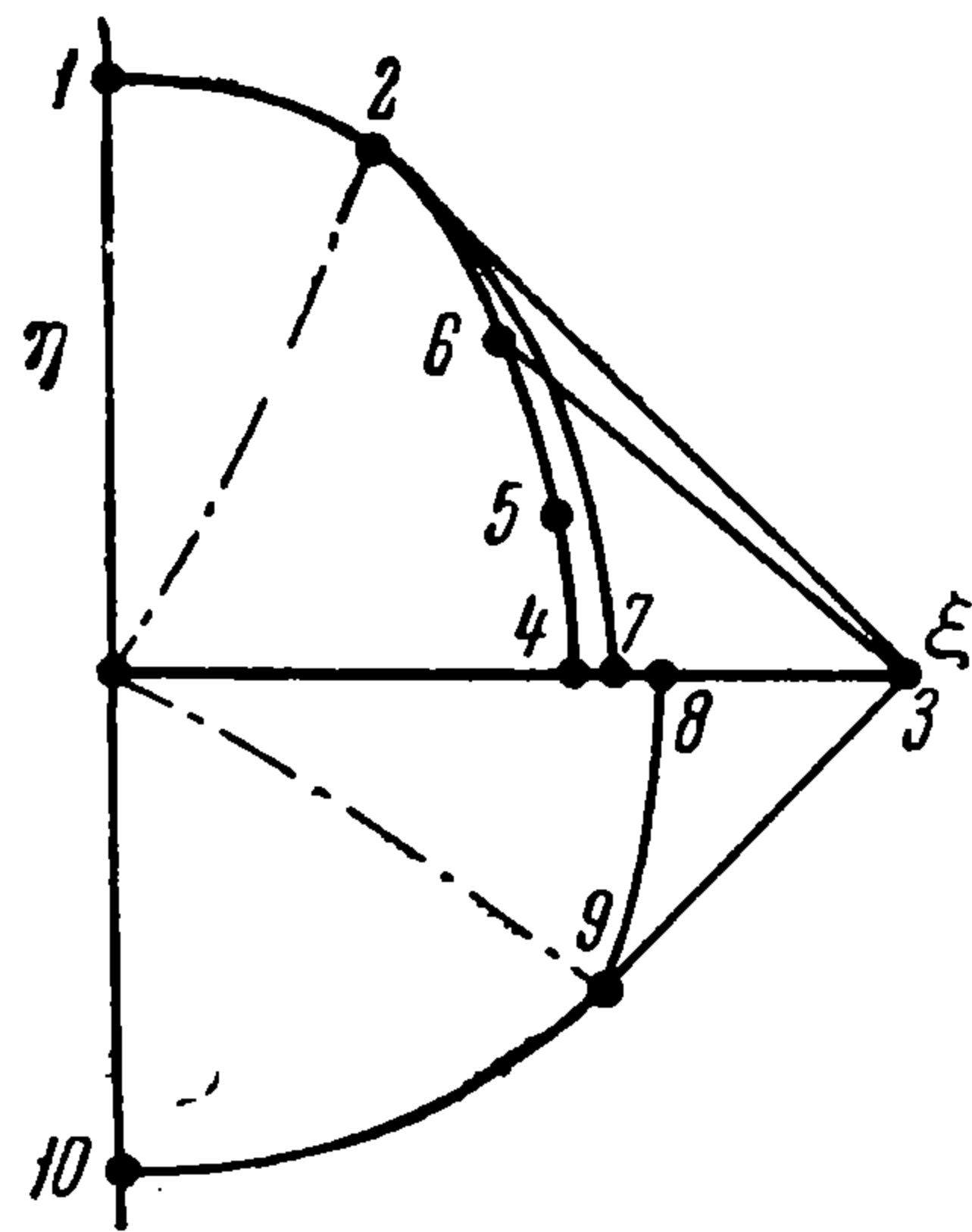
Фиг. 1

Из вида уравнений $L_2 = 0$, $L_3 = 0$ системы (1.1) сразу же следует, что «линии тока» (линии постоянной S), определяемые уравнением

$$\frac{d\xi}{u - \xi w} = \frac{d\eta}{v - \eta w} \quad (1.3)$$

являются двойными характеристиками системы (1.1). Оставшиеся две характеристики системы (1.1), как можно показать, совпадают с таковыми для уравнения (1.2).

Рассмотрим теперь картину обтекания треугольного крыла на плоскости ξ, η . В силу симметрии изображаем только одну половину потока при $\xi > 0$. Общепринятая схема обтекания крыла дается на фиг. 2 [3]. Крыло изображается отрезком $O-3$ (ось z лежит в плоскости крыла). Огибающей конусов Маха невозмущенного потока с вершинами на боковых кромках крыла являются дуга $1-2$ конуса Маха с вершиной в носовой точке крыла (точка O на фиг. 1) и отрезок прямой $2-3$. При обтекании острой боковой кромки образуется течение Прандтля — Майера, которое продолжается до тех пор, пока вектор скорости не станет параллелен плоскости крыла; это течение имеет пучок прямолинейных характеристик уравнения (1.2), проходящих через точку 3. Отрезок $3-6$ изображает границу течения Прандтля — Майера, после которого следует однородный поток, примыкающий к поверхности крыла. Границей общего конического потока является ударная волна $2-7$, которая проходит вблизи криволинейной характеристики $2-6$ течения Прандтля-Майера, прямолинейной характеристики $6-5$, дуги конуса Маха $5-4$. При обтекании «низа» крыла на боковой кромке образуется плоский скачок $3-9$; затем следует однородный поток. Область конического течения ограничена криволинейным скачком $9-10$ и дугой $9-8$ конуса Маха для однородного потока после скачка $3-9$.



Фиг. 2

В работе [3] вводились «возможные» скачки около конусов Маха $1-2$, $9-8$, относительно которых было неясно, можно ли без них обойтись при математической формулировке задачи или нет. В этой работе автор отказывается от введения подобных скачков. В дальнейшем рассматривается в первую очередь структура потока в окрестности точки 9 (фиг. 2), где происходит соединение безвихревого потока после конуса Маха $9-8$ и вихревого потока после криволинейного скачка $9-10$. Показывается, что соединение этих потоков без особой точки невозможно.

Повернем оси координат так, чтобы ось Oz была направлена по скорости однородного потока в области 3-8-9, а скачок 3-9 изображался бы на плоскости ξ, η отрезком, параллельным оси ξ (фиг. 3).

В этой системе координат конус Маха 8-9, фиг. 2, изобразится окружностью 8-9 (фиг. 3) радиуса

$$r_0 = (M_0^2 - 1)^{-1/2}$$

где M_0 — число Маха после скачка 3-9; точка 9 имеет координаты (ξ_0, η_0) ; вектор скорости невозмущенного потока имеет компоненты $(0, v_1, w_1)$, вектор скорости после скачка 3-9 имеет компоненты $(0, 0, w_0)$; полярные координаты точки 9 будем обозначать $r = r_0, \theta = \theta_0$.

В работе [2] для конического потенциала F в окрестности конуса Маха 8-9 найдено разложение

$$F = u_0 + \beta (r_0 - r)^2 + \gamma_1 (r_0 - r)^3 \ln (r_0 - r) + c(\theta) (r_0 - r)^3 + \dots \quad (1.4)$$

Здесь

$$\beta = \frac{w_0}{2(\gamma + 1)} \frac{(M_0^2 - 1)^2}{M_0^4}$$

$$\gamma_1 = \frac{w_0}{6(\gamma + 1)^2} \frac{(M_0^2 - 1)^{5/2}}{M_0^6} [3(M_0^2 - 1) - (\gamma + 1)(2 - M_0^2)]$$

Функция $c(\theta)$ — произвольная; точками обозначены члены высшего порядка относительно $r_0 - r$. Если в точке 9 нет особенности, то функция $c(\theta)$ регулярна при $\theta = \theta_0$ и поведение решения в окрестности точки 9 определяется вторым членом в разложении (1.4), в частности $F_r = F_\theta = F_{r\theta} = F_{\theta r} = 0, F_{rr} = 2\beta$. Используя формулы

$$u = \cos \theta F_r - \frac{1}{r} \sin \theta F_\theta, \quad v = \sin \theta F_r + \frac{1}{r} \cos \theta F_\theta, \quad w = F - r F_r \quad (1.5)$$

найдем в точке 9 производные u, v, w вдоль линии тока 9-0:

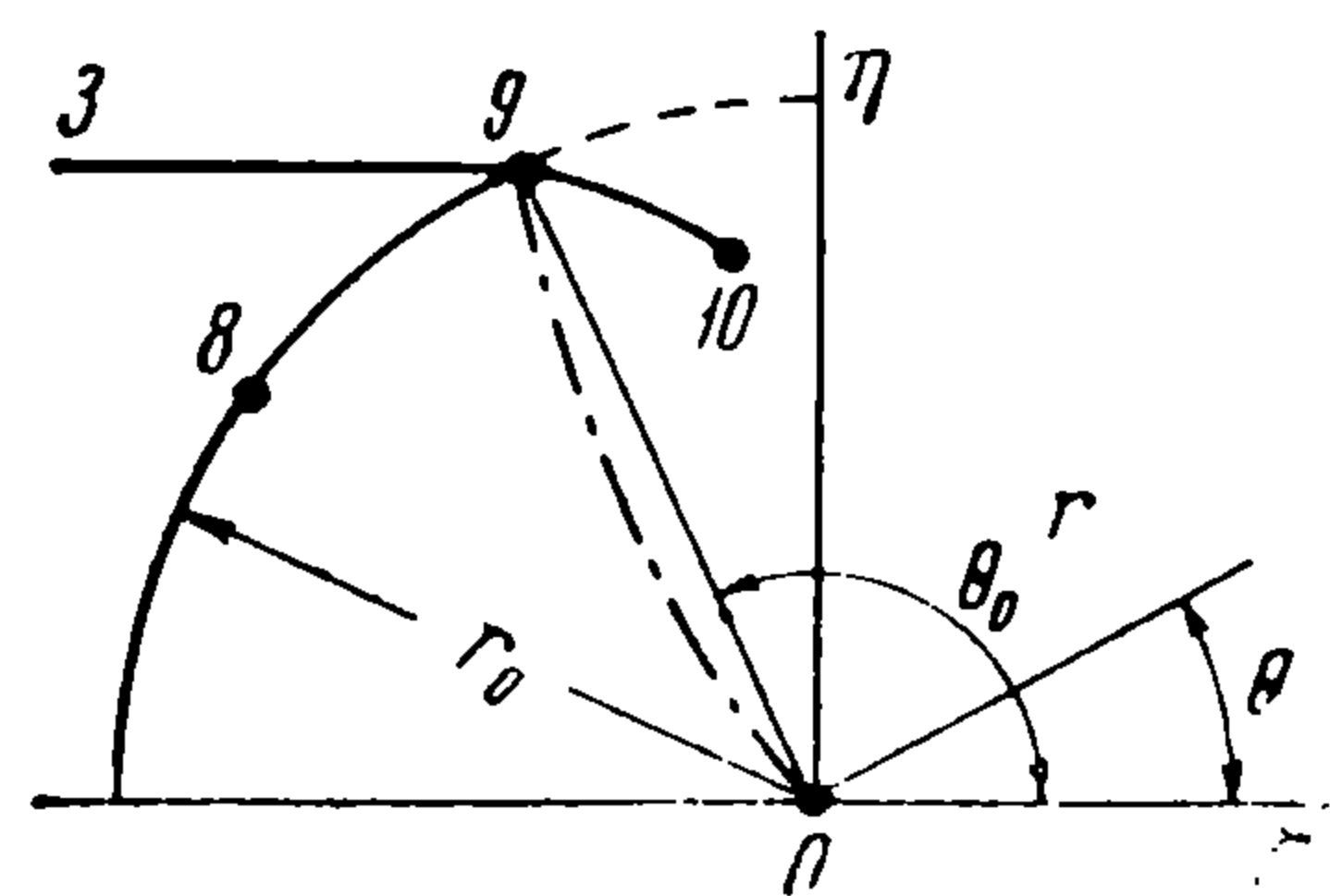
$$\begin{aligned} r_0 u_r &= \xi_0 u_\xi + \eta_0 u_\eta = \xi_0 2\beta \\ r_0 v_r &= \xi_0 v_\xi + \eta_0 v_\eta = \eta_0 2\beta \\ r_0 w_r &= \xi_0 w_\xi + \eta_0 w_\eta = -r_0^2 2\beta \end{aligned} \quad (1.6)$$

Кроме того, $\xi_0 s_\xi + \eta_0 s_\eta = 0$, так как течение безвихревое. Если записать уравнения для коэффициентов разрыва производных компонент скоростей и s вдоль линии тока 9-0 (энтропийная характеристика системы (1.1)), то можно убедиться, что точка 9 для этих уравнений не является особой и, следовательно, вихревой поток после скачка 9-10 должен в точке 9 обладать конечными производными. Условия на коническом скачке запишем в виде [4]

$$u = u_1 - \eta' P, \quad v = v_1 + P, \quad w = w_1 + (\xi \eta' - \eta) P \quad (1.7)$$

$$\eta' = \frac{d\eta}{d\xi}, \quad P = \frac{2}{\gamma + 1} \left[\frac{a_1^2}{v_1 - \eta' u_1 + w_1 (\xi \eta' - \eta)} - \frac{v_1 - \eta' u_1 + w_1 (\xi \eta' - \eta)}{1 + \eta'^2 + (\xi \eta' - \eta)^2} \right]$$

где $(u_1, v_1, w_1), (u, v, w)$ — компоненты скорости до и после скачка, a_1 — скорость звука до скачка, $\eta = \eta(\xi)$ — уравнение скачка.



Фиг. 3

Кроме того, скачок s определяется по скачку энтропии S по формуле

$$\Delta s = \frac{1}{\gamma(\gamma-1)} \left\{ \ln \left[\frac{2\gamma q_n^2 - (\gamma-1)}{\gamma+1} \right] + \gamma \ln \left[\frac{2 + (\gamma-1) q_n^2}{(\gamma+1) q_n^2} \right] \right\} \quad (1.8)$$

где

$$q_n^2 a_1^2 = [v_1 - u_1 \eta' + w_1 (\xi \eta' - \eta)]^2 [1 + \eta'^2 + (\xi \eta' - \eta)^2]^{-1}$$

Учитывая, что для скачка 3-9 (фиг. 3) имеем $u_1 = \eta' = 0$, из (1.7) получим соотношения

$$w_0 = w_1 + \eta_0 v_1, \quad \left[a_1^2 + v_1 \frac{\gamma+1}{2} (v_1 - \eta_0 w_1) \right] (1 + \eta_0^2) - (v_1 - \eta_0 w_1)^2 = 0$$

Записывая уравнение скачка 9-10 в окрестности точки 9 (в виде $\eta = \eta_0 - l(\xi - \xi_0)^2 + \dots$, где l — постоянная, получим из (1.7), (1.8) значения u , v , w , s вдоль скачка 9-10; дифференцируя по ξ и учитывая конечность производных u , v , w , s по ξ и η , получим в точке 9

$$u_\xi = -2lv_1, \quad v_\xi = l \frac{4\xi_0}{\gamma+1} \frac{w_1 [(1 + \eta_0^2) a_1^2 + (v_1 - \eta_0 w_1)^2] + 2\eta_0 (v_1 - \eta_0 w_1)^3}{(v_1 - \eta_0 w_1)^2 (1 + \eta_0^2)^2} \quad (1.10)$$

Условия соединения безвихревого и вихревого потоков вдоль линии тока 0-9 заключаются в равенстве производных u , v , w , s вдоль 0-9. Поскольку характеристика 0-9 системы (1.1) двойная, то достаточно потребовать равенства этих производных только для u , v . Уравнение $L_1 = 0$ из (1.1) с учетом (1.6) в точке 9 можно представить в виде

$$u_\xi + v_\eta = 2\beta \quad (1.11)$$

Умножая (1.11) на η_0 и вычитая из второго соотношения (1.6), получим

$$\xi_0 v_\xi - \eta_0 u_\xi = 0 \quad (1.12)$$

Внося (1.10) в (1.12) и выражая ξ_0 , w_0 , M_0 через v_1 , w_1 , η_1 , после сокращения на l получим

$$\left[a_1^2 (1 + \eta_0^2) - \eta_0^2 \frac{\gamma+1}{2} (w_1 + \eta_0 v_1)^2 + \frac{\gamma-1}{2} (v_1 - \eta_0 w_1)^2 \right] \times \\ \times \{ w_1 (1 + \eta_0^2) [(1 + \eta_0^2) a_1^2 + (v_1 - \eta_0 w_1)^2] + 2\eta_0 (v_1 - \eta_0 w_1)^3 \} + \frac{\gamma+1}{2} \eta_0 v_1 \times \\ \times \left[\frac{\gamma+1}{2} (w_1 + \eta_0 v_1)^2 - \frac{\gamma-1}{2} (v_1^2 + w_1^2) - a_1^2 \right] (v_1 - \eta_0 w_1)^2 (1 + \eta_0^2)^2 = 0$$

Подставляя конкретные значения $\gamma = 1.4$, $v_1 = 1.14497 a_1$, $w_1 = 3.29694 a_1$, удовлетворяющие (1.9), в (1.13) получим не нуль, а 3.65...; это показывает, что (1.13) не есть следствие (1.9), т. е. смыкание потоков невозможно. Отметим, что этот результат остается в силе, если $F_{r,r}$ в точке 9 (фиг. 3) есть произвольная константа, а $F_{r,0} = F_{\theta\theta} = 0$. Значение $l = 0$ также не подходит.

Вопрос о смыкании вихревых и безвихревых конических потоков вообще аналогичен таковому для плоского сверхзвукового течения газа, если решение (1.2) в точке смыкания будет гиперболического типа. Рассмотрим, например, обтекание симметричного профиля (фиг. 4, а) и симметричного треугольного крыла (фиг. 4, б) сверхзвуковым потоком газа при условии, что кромки конического крыла сверхзвуковые, крылья

имеют клиновидную форму в окрестности передней кромки, углы атаки равны нулю. В силу симметрии обтекания можно качественно представить течения в окрестностях передних кромок для η и $y > 0$.

Около плоских участков крыльев $0-1$ имеются плоские скачки $0-2$, после которых следуют однородные потоки, примыкающие к поверхности крыльев (области $0-1-2$). Искривление крыльев, начиная с точки 1 , приводит к искривлению скачков $2-5$ и образованию вихревых потоков, соединяющихся вдоль линий тока $2-4$ с безвихревыми. Линии $1-2$, $2-3$ — характеристики.

В случае плоского потока за искомые функции можно взять компоненты скорости u , v и $s = S [c_v \gamma (\gamma - 1)]^{-1}$, S — энтропия, а уравнения для них записать в виде, аналогичном (1.1)

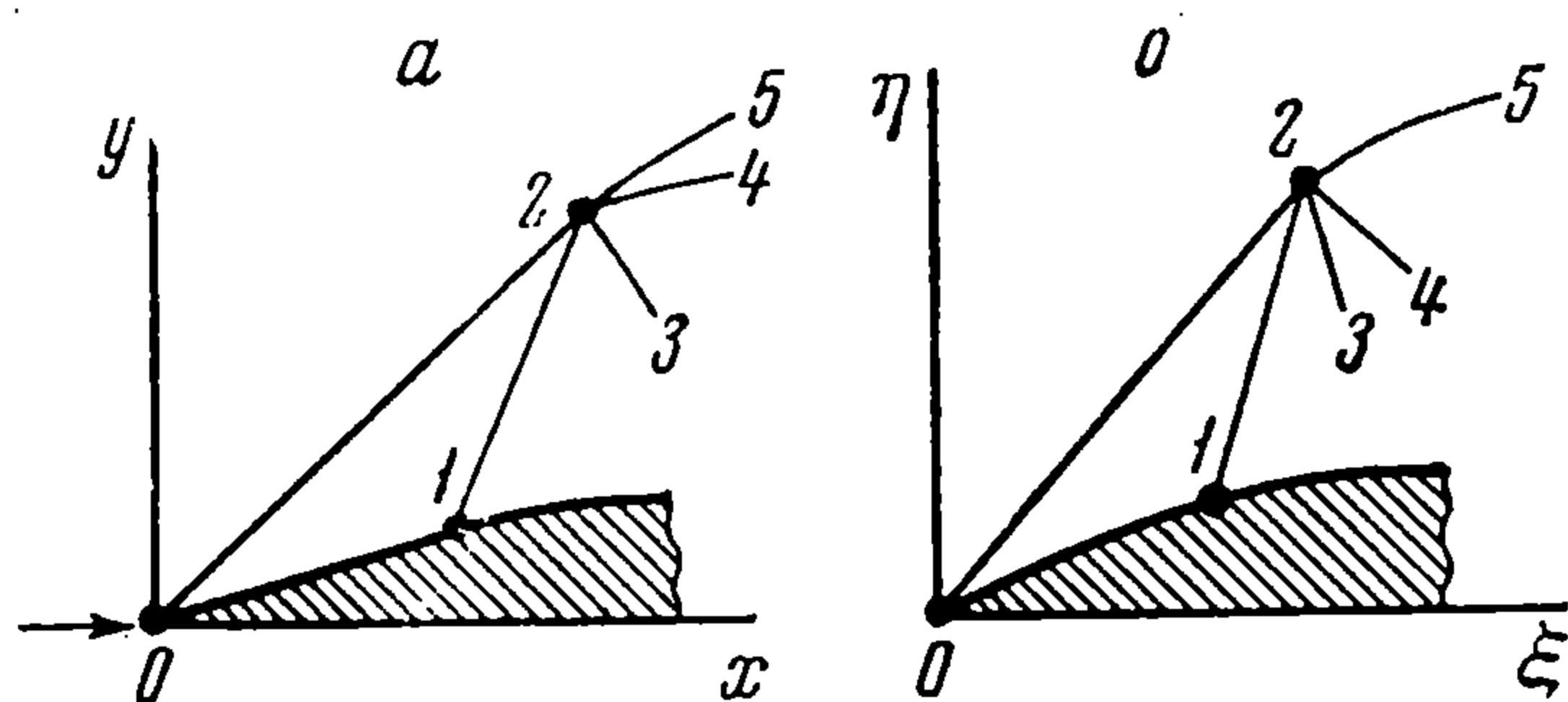
$$\begin{aligned} L_5 = v(u_y - v_x) - a^2 s_x = 0, \quad L_6 = us_x + vs_y = 0 \\ L_7 = (a^2 - u^2)u_x - uv(u_y + v_x) + (a^2 - v^2)v_y = 0 \end{aligned} \quad (1.14)$$

Условием смыкания вихревого и безвихревого потоков в точке 2 (фиг. 4, а) является совпадение производных u , v , s вдоль линии тока $2-4$ (энтропийная характеристика).

После удовлетворения условий на ударной волне $2-5$ и характеристике $2-3$ остаются два неопределенных параметра: кривизна скачка в точке 2 и нормальная производная u или v на характеристике $2-3$, что дает возможность уравнивать производные u , v вдоль $2-4$ в вихревом и безвихревом потоках. В коническом потоке искомые функции u , v , w , s . Здесь положение аналогично плоскому случаю, с той только разницей, что линия тока $2-4$ (фиг. 4, б) является двойной характеристикой системы (1.1), обеспечивающей смыкание как s , так и w .

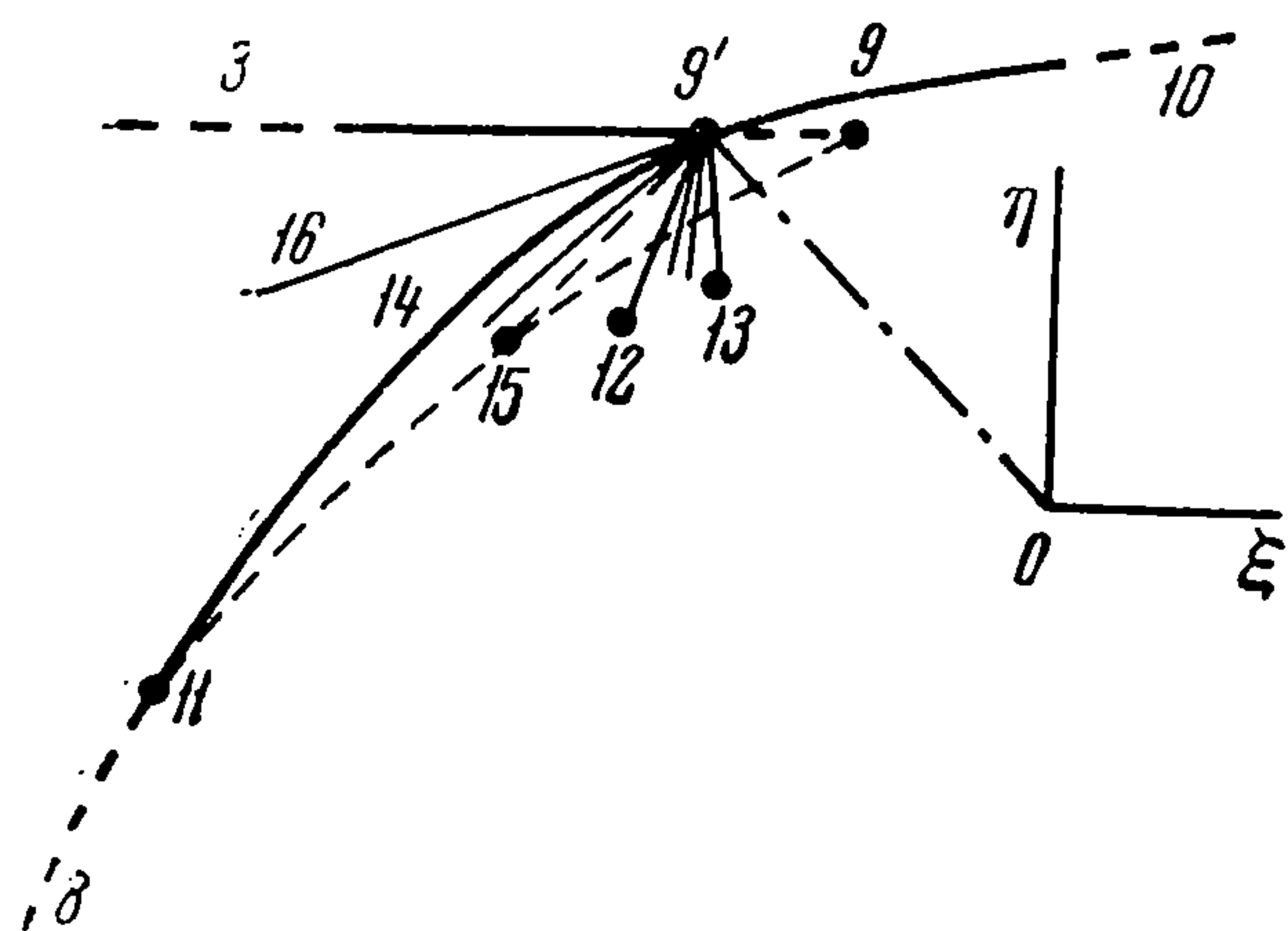
В случае потока после конуса Маха $8-9$ (фиг. 3) положение более сложное, так как конус Маха является одновременно характеристической и параболической линией уравнения (1.2), что приводит к специальной структуре решения в ее окрестности и невозможности соединения вихревого и безвихревого потоков без особых точек. (Аналогичная картина будет в случае, когда крыло искривлено. Тогда конус Маха $8-9$ (фиг. 2) заменяется характеристической кривой, выходящей из параболической точки 9 .) Но автору не удалось найти такую особую точку, которая устранила бы трудности смыкания потоков в точке 9 (фиг. 2) (см. § 2), поэтому он занялся поисками других конструкций потока в точке 9 . К настоящему времени удалось построить только одну схему, устраняющую трудности в точке 9 (см. фиг. 5).

Точка 9 (фиг. 3) сдвигается по ударной волне $3-9$ и занимает положение $9'$ (фиг. 5). К точке $9'$ подходит дополнительно слабая ударная волна $9'-11$, которая затухает в точке 11 , лежащей на конусе Маха. После скачка $9'-11$ следует локальное течение Прандтля — Майера, начинающееся характеристикой $9'-12$ и заканчивающееся характеристикой



Фиг. 4

9'-13, которая обеспечивает смыкание потоков по линии контактного разрыва 9'-0 (для смыкания потоков с контактным разрывом требуется



Фиг. 5

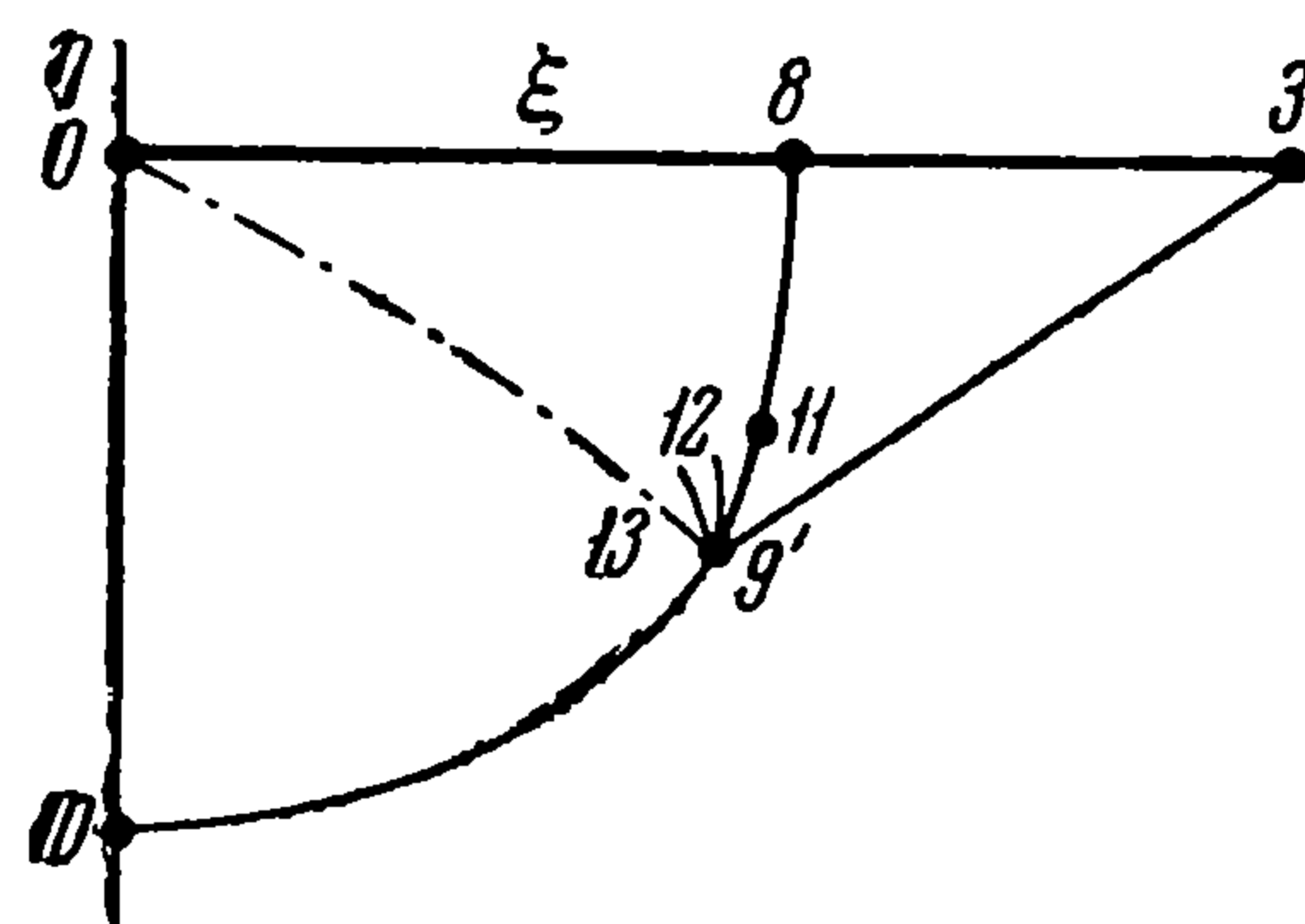
поведение этой схемы при неограниченном ослаблении скачка 3-9' ($v_1 \rightarrow 0$) и нашел, что величина контактного разрыва имеет более высокий порядок, чем v_1 . Заменить скачок 9'-11 прямой характеристикой нельзя, так как примыкающая к ней простая волна не может сомкнуться с течением после скачка 9'-10; также нельзя точку 9' совместить с точкой 9, так как в этом случае скачок 9'-10 был бы скачком разряжения при $v_1 \rightarrow 0$. Ударные волны 3-9', 9'-10, 9'-11 — «приходящие», но тип их различен, скачок 3-9' — плоский, скачки 9'-10, 9'-11 — типа скачка, образующегося при осесимметричном обтекании круглого конуса. Отметим, что конструкция потока типа точки 9' встречается при обтекании сверхзвуковым потоком клина с изломом щеки [5]. Итак, возможная схема обтекания «низа» треугольного крыла изображена на фиг. 6 (с обозначениями, соответствующими фиг. 2, 5). Протяженность скачка 9'-11 мала, она стремится к нулю, когда угол атаки стремится к нулю.

§ 2. Займемся теперь построением решения в окрестностях точки 11 (фиг. 6) и точки 2 (фиг. 2), где начинается соединение потоков после конусов Маха и затухающих ударных волн. Будем интересоваться только главными членами решений в окрестностях этих точек и их структурой. Начнем с точки 11. Такая точка также встречается при обтекании треугольного крыла с дозвуковыми кромками, края прямоугольной пластинки и т. д., когда ударная волна, произведенная телом, ослабляется и переходит в конус Маха, который частично ограничивает область, возмущенную обтекаемым телом, с той стороны, где происходит расширение невозмущенного потока. Повернем оси координат xuz так, чтобы ось oz была бы направлена по скорости потока на конусе Маха 8-11 (фиг. 6), а точка 11 имела бы координаты $(0, \eta_0)$ (фиг. 7). Конус Маха 8-11 изобразится тогда окружностью $r_0 = \eta_0 = (M_0^2 - 1)^{-1/2}$ и $\theta = \theta_0 = 1/2\pi$ для точки 11.

столько же неопределенных параметров, как и в случае энтропийной характеристики 9-0).

Кривые 9'-12, 9'-14 — характеристики после скачка 9'-11, прямые 9'-16, 9'-15 — характеристики однородного потока до скачка; 9'-10 — скачок. Сила скачка 9'-11 в точке 9' зависит от степени расширения в течении Прандтля — Майера; если расширения нет, то скачок 9'-11 вырождается в характеристику.

Автор исследовал асимптотическое



Фиг. 6

Будем исходить из разложения (1.4) решения в окрестности конуса Маха. Решение ищется с особенностью в точке II , поэтому предположим

$$c(\theta) = \frac{\nu}{\vartheta^p} + \frac{\mu}{\vartheta^k} + \dots, \quad (\vartheta = \theta - \theta_0, p > k > 0) \quad \left(\begin{array}{l} \nu, \mu - \text{произвольные} \\ \text{постоянные} \end{array} \right)$$

Обозначая $\rho = (r_0 - r) \vartheta^{-k}$ и подставляя $c(\theta)$ и $r_0 - r = \rho \vartheta^k$ в (1.4), получим

$$F = w_0 + (\nu \rho^3 + \dots) \vartheta^{3k-p} + (\beta \rho^2 + \mu \rho^3 + \dots) \vartheta^{2k} + \dots$$

т. е. решение нужно искать в виде

$$F = w_0 + R(\rho) \vartheta^{3k-p} + F(\rho) \vartheta^{2k} + \dots \quad (2.1)$$

причем при малых ρ

$$R(\rho) = \nu \rho^3 + \dots, \quad F(\rho) = \beta \rho^2 + \mu \rho^3 + \dots$$

Подставляя (2.1) в (1.2) и приравнявая коэффициенты при наименьшей степени ϑ , получим, что $p = 2$, $1 < k < 2$

$$\Omega(\rho) = R(\rho) c_1 \quad \left(c_1 = \frac{(1 + r_0^2) w_0 r_0^3 (\gamma + 1)}{a_0^2} \right)$$

удовлетворяет уравнению

$$(k^2 \rho^2 - \Omega') \Omega'' - 5k(k-1) \rho \Omega' + 3(k-1)(3k-2) \Omega = 0$$

и при малых ρ

$$\Omega(\rho) = \frac{1}{3} \rho^3 + c_2 \rho^{3 + \frac{1}{k-1}} + \dots$$

где c_2 — произвольная постоянная. Эти решения соответствуют обтеканию искривленных стенок, примыкающих к конусу Маха. Так, например, при $k = 3/2$ получим обтекание стенки с конечной кривизной.

Решение в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} \Omega(\rho) &= c^{-3} v(t), \quad t = c\rho \\ v(t) &= -\frac{9}{10} [(\sqrt{1+t^3} + t)^{1/3} - (\sqrt{1+t^3} - t)^{1/3}]^3 + \\ &+ \frac{27}{20} t [(\sqrt{1+t^3} + t)^{1/3} - (\sqrt{1+t^3} - t)^{1/3}]^2 \end{aligned}$$

Здесь c — постоянная, зависящая от кривизны стенки на конусе Маха.

Положим теперь $\nu = 0$, т. е. $R(\rho) \equiv 0$. Тогда из (1.2) получим условие $k \geq 2$. Рассмотрим случай $k > 2$ (как увидим, он соответствует особенности в точке II). Выберем дальнейшие члены разложения $c(\theta)$ в виде

$$c(\theta) = \frac{\mu}{\vartheta^k} + \frac{\lambda}{\vartheta^2} + \varepsilon \ln \vartheta + \nu_1 + \dots$$

где μ , λ , ε , ν_1 — произвольные постоянные.

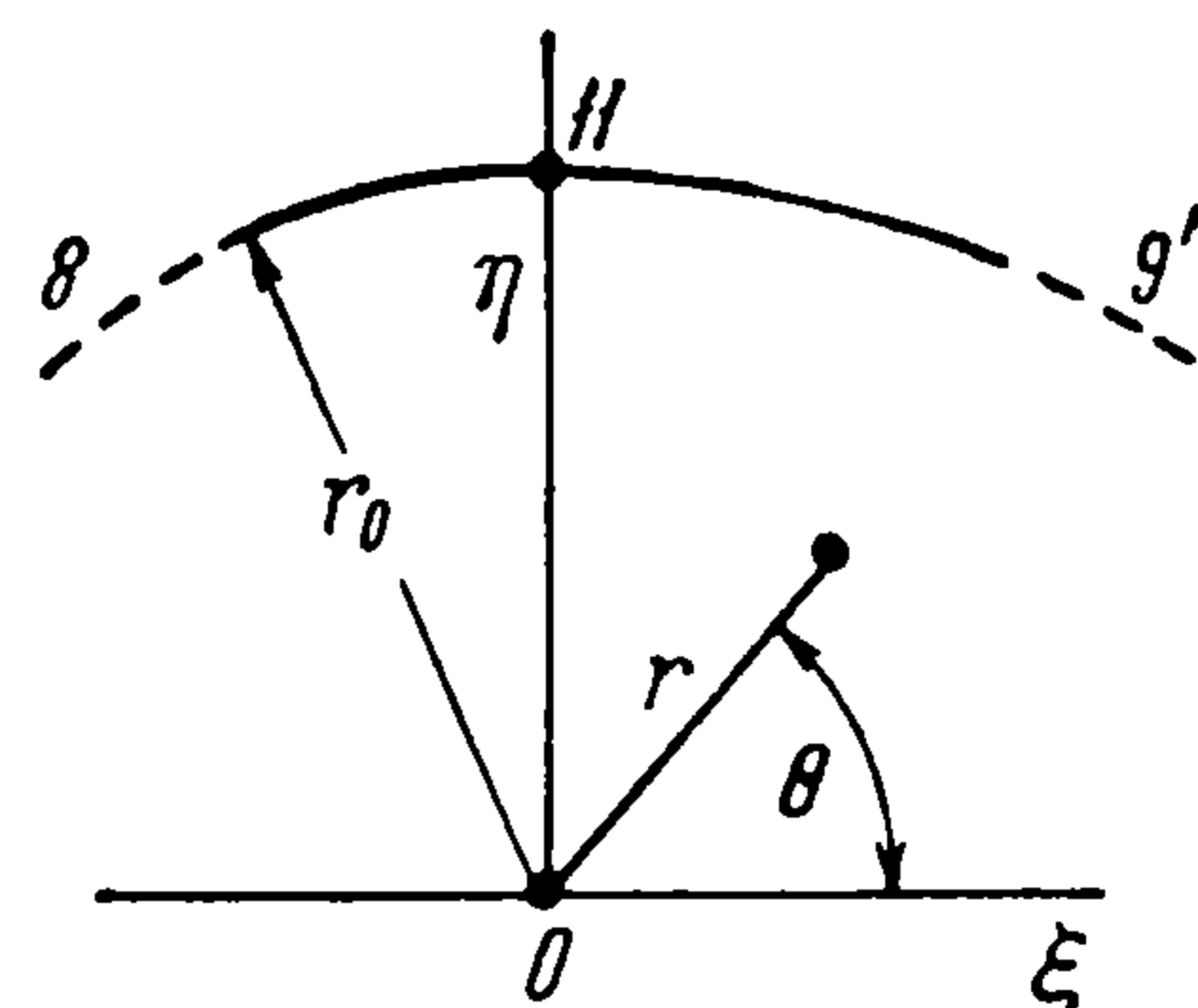
Тогда соответствующее решение будет иметь вид

$$F = w_0 + F(\rho) \vartheta^{2k} + \Phi(\rho) \vartheta^{3k-2} + T(\rho) \vartheta^{3k} \ln \vartheta + R_1(\rho) \vartheta^{3k} + \dots \quad (2.2)$$

причем при малых ρ

$$F(\rho) = \beta \rho^2 + \mu \rho^3 + \dots, \quad \Phi(\rho) = \lambda \rho^3 + \dots$$

$$T(\rho) = (\gamma_1 k + \varepsilon) \rho^3 + \dots, \quad R_1(\rho) = \gamma_1 \rho^3 \ln \rho + \nu_1 \rho^3 + \dots$$



Фиг. 7

Подставляя (2.2) в (1.2) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ϑ и $\ln \vartheta$, получим для F, Φ, T, R_1, \dots уравнения

$$F'' [2r_0^2 (w_0^2 - a_0^2) \rho - (1 + r_0^2) w_0 r_0^2 (\gamma + 1) F'] - a_0^2 F' = 0 \quad (2.3)$$

$$\Phi'' [2r_0^2 (w_0^2 - a_0^2) \rho - (1 + r_0^2) w_0 r_0^2 (\gamma + 1) F'] - (1 + r_0^2) w_0 r_0^2 (\gamma + 1) F'' \Phi' - a_0^2 \Phi' = -\frac{a_0^2}{r_0} [2k(2k - 1) F - k(3k - 1) \rho F' + k^2 \rho^2 F''] \quad (2.4)$$

и т. д. Эти уравнения легко интегрируются в замкнутом виде и их решения удовлетворяют условиям при малых ρ , например,

$$F(\rho) = \frac{2\beta}{3c^2} [(1 + 2c\rho)^{3/2} - 3c\rho - 1]$$

где $c > 0$ произвольная постоянная.

При больших ρ приведем для них асимптотические выражения

$$F(\rho) = \frac{8\beta}{3\sqrt{2c}} \rho^{3/2} + \dots, \quad \Phi(\rho) = -\frac{2\beta}{15\sqrt{2c}} \cdot \frac{k(k-2)}{r_0} \rho^{5/2} + \dots \quad (2.5)$$

$$T(\rho) \sim \rho^{3/2}, \quad R_1(\rho) \sim \rho^{5/2} \text{ или } \rho^3, \text{ если } k = 4$$

Переходя при больших ρ в (2.2) к переменным ϑ и $\zeta = (r_0 - r) r_0^{-1} \vartheta^{-2}$ ($\rho = \zeta r_0 \vartheta^{2-k}$), имеем

$$F = w_0 + g \left[\zeta^{\frac{3}{2}} - \frac{k(k-2)}{20} \zeta^{\frac{5}{2}} + \dots \right] \vartheta^{\frac{k}{2} + 3} + \dots \quad (g = \frac{8\beta r_0^{3/2}}{3\sqrt{2c}} > 0) \quad (2.6)$$

Здесь выписанные члены с ζ получаются из $F(\rho)$ и $\Phi(\rho)$. Из (2.6) следует, что при $\rho \rightarrow \infty$ и конечном ζ решение имеет вид

$$F = w_0 + \chi(\zeta) \vartheta^{\frac{k}{2} + 3} + \dots \quad (2.7)$$

причем при малых ζ

$$\chi(\zeta) = g \left[\zeta^{3/2} - \frac{k(k-2)}{20} \zeta^{5/2} + \dots \right] \quad (2.8)$$

Подставляя (2.7) в (1.2), получим для $\chi(\zeta)$ уравнение

$$2\zeta(1 + 2\zeta)\chi'' - [1 + 2\zeta(k + 3)]\chi' + \left(\frac{k}{2} + 2\right)\left(\frac{k}{2} + 3\right)\chi = 0 \quad (2.9)$$

(это уравнение приводится к гипергеометрическому заменой $2\zeta = -t$). Подставляя (2.8) в (2.9), убеждаемся, что (2.8) есть решение (2.9) при малых ζ . Причем при $k = 0, 2, 4, 6$ ряд (2.8) обрывается и решение получается в замкнутом виде

$$\chi(\zeta) = g \left[\zeta^{3/2} - \frac{k(k-2)}{20} \zeta^{5/2} \right] \quad (2.10)$$

При других k легко найти асимптотическое выражение для χ при больших ζ , исходя из (2.9) имеем

$$\chi(\zeta) \sim \zeta^{\frac{k}{4} + \frac{3}{2}} \text{ или } \chi(\zeta) \sim \zeta^{\frac{k}{4} + 1} \quad (2.11)$$

Рассмотрим случаи $k = 4, k = 6$. Возникает вопрос, получится ли главный член решения в четверти окрестности точки II ($\vartheta > 0, r_0 - r > 0$) удержанием в разложении (2.2) трех первых слагаемых

$$F = w_0 + F(\rho)\vartheta^{2k} + \Phi(\rho)\vartheta^{3k-2}$$

При стремлении к точке *II* по параболам $r_0 - r = \rho \vartheta^k$, $r_0 - r = \zeta r_0 \vartheta^k$ (где ρ , ζ фиксированы) ответ, очевидно, положительный; исследование требуется произвести только при $\zeta \rightarrow \infty$.

Перейдем в (2.7) к $r_0 - r$ и ϑ вместо ζ и ϑ ; для $k = 4$ получим

$$F = w_0 + h [\vartheta^2 (r_0 - r)^{3/2} - \frac{2}{5r_0} (r_0 - r)^{5/2}] + \dots \quad \left(h = \frac{8\beta}{3\sqrt{2c}} \right) \quad (2.12)$$

Подставляя (2.12) в (1.2), легко убедимся, что (2.12) есть главный член при стремлении к точке *II* по любому пути. Для $k = 6$ получим

$$F = w_0 + h [(r_0 - r)^{3/2} \vartheta^3 - \frac{6}{5r_0} (r_0 - r)^{5/2} \vartheta] + \dots \quad (2.13)$$

Подставляя (2.13) в (1.2), получим, что (2.13) есть главный член только при движении к точке *II* по параболам

$$\vartheta = \text{const} (r_0 - r)^\alpha, \quad \alpha < \frac{5}{2}$$

Поэтому необходимо в разложении (2.7) взять еще член

$$F = w_0 + \chi(\zeta) \vartheta^6 + \Psi(\zeta) \vartheta^{10} + \dots \quad (2.14)$$

Уравнение для $\Psi(\zeta)$ легко интегрируется. Выписываем асимптотическое представление Ψ при $\zeta \rightarrow \infty$

$$\Psi(\zeta) = g^2 \frac{w_0}{a_0^2} \frac{18}{5} \zeta^4 + \dots \quad (2.15)$$

Переходя в (2.14) к $r_0 - r_1$, ϑ при $\zeta \rightarrow \infty$, получим

$$F = w_0 + h [(r_0 - r)^{3/2} \vartheta^3 - \frac{6}{5r_0} (r_0 - r)^{5/2} \vartheta] + h^2 \frac{w_0}{a_0^2 r_0} \frac{18}{5} (r_0 - r)^4 \vartheta^2 + \dots \quad (2.16)$$

Подставляя (2.16) в (1.2), убеждаемся, что выписанные слагаемые в (2.16) дают главный член решения при любом законе стремления к точке *II*. Причем для F_r и F_θ главный член по-прежнему дается членом с χ , а член с Ψ дает главный член для $F_{\theta\theta}$. Итак, в случае $k = 6$ к первым трем слагаемым в (2.2) нужно добавить еще члены, которые при переходе от ρ к ζ дают $\Psi(\zeta)$. Однако важно, что все они порождаются только первыми двумя членами $w_0 + F(\rho) \vartheta^{2k}$ в разложении (2.2). Действительно, член $\Phi(\rho) \vartheta^{3k-2}$ вызывает в разложении (2.2) членом $F(\rho) \vartheta^{2k}$ они вместе дают $\chi(\zeta)$ при $\rho \rightarrow \infty$, а член $\chi(\zeta) \vartheta^6$ в разложении (2.14) вызывает появления члена $\Psi(\zeta) \vartheta^{10}$.

Следовательно, главный член $w_0 + F(\rho) \vartheta^{2k}$ при $\rho = \text{const}$ приводит к главному члену (2.16) в окрестности прямой $\vartheta = 0$. Обращает на себя внимание неавтономность главного члена решения в окрестности точки *II*. В случаях $k \neq 4, 6$ положение аналогично рассмотренному, что можно установить при помощи (2.11), причем

$$\chi \sim \zeta^{\frac{k}{4} + \frac{3}{2}}, \quad \chi \sim \zeta^{\frac{k}{4} + 1}$$

соответствуют случаям $k = 4$ и $k = 6$.

Используем случай $k = 6$ для построения решения в окрестности точки *II* (фиг. 7). Уравнение ударной волны *II*—*9'* в окрестности точки *II* запишем в виде $r_0 - r = \rho_0 \vartheta^6 + \dots$, где $\rho_0 < 0$ — неизвестная постоянная.

Тогда условия на скачке (1.7) дадут

$$s = d_0 \vartheta^{18} + \dots, \quad d_0 = -\frac{16}{3} \frac{\rho_0^3}{(\gamma+1)^3} \frac{(M_0^2-1)^{3/2}}{M_0^6} \quad (2.17)$$

и в обозначениях безвихревого потока условия для скоростей

$$F = w_0 \quad F_r = -\frac{4w_0}{\gamma+1} \frac{(M_0^2-1)^2}{M_0^4} \rho_0 \vartheta^6 + \dots \quad (2.18)$$

Будем искать безвихревое решение в окрестности точки II , удовлетворяющее условиям на конусе Маха и условиям (2.18) на ударной волне. Главный член этого решения будет, как показано далее, главным членом решения для скоростей вихревой задачи. Ищем F в окрестности скачка $II-9'$ в виде разложения

$$F = w_0 + F_1(\rho) \vartheta^{2k} + \Phi_1(\rho) \vartheta^{3k-2} + \dots, \quad \rho = (r_0 - r) \vartheta^{-k}, \quad k = 6 \quad (2.19)$$

т. е. вид разложения тот же самый, что и в окрестности конуса Маха, только произвольные постоянные в $F_1(\rho)$ должны быть определены из (2.18). Для $F_1(\rho)$ получим

$$F_1(\rho) = -\frac{2\beta}{c_1} \left[\frac{(1+2c_1\rho)^{3/2} - (1+2c_1\rho_0)^{3/2}}{3c_1} + \rho - \rho_0 \right] \quad \left(c_1 = \frac{3}{8|\rho_0|} \right)$$

$$\Phi_1(\rho) = \frac{2\beta}{15\sqrt{2c_1}} \frac{k(k-2)}{r_0} \rho^{5/2} + \dots, \quad F_1(\rho) = -\frac{8\beta}{3\sqrt{2c_1}} \rho^{3/2} + \dots \quad \text{при } \rho \rightarrow \infty$$

При переходе к ϑ и ζ получим

$$F = w_0 + \chi_1(\zeta) \vartheta^{\frac{k}{2}+3} + \dots$$

где

$$\chi_1(\zeta) = g_1 \left[\zeta^{3/2} - \frac{k(k-2)}{20} \zeta^{5/2} \right], \quad g_1 = h_1 r_0^{2/3} < 0, \quad h_1 = -\frac{8\beta}{3\sqrt{2c_1}} < 0$$

При $\zeta \rightarrow \infty$ после подстановки $k = 6$ получим

$$F = w_0 + g_1 \left[\zeta^{3/2} - \frac{6}{5} \zeta^{5/2} \right] \vartheta^6 + g_1^2 \frac{w_0}{a_0^2 r_0} \frac{18}{5} \zeta^4 \vartheta^{10} + \dots$$

Переходя к $r_0 - r$, ϑ и учитывая, что $\vartheta < 0$ для скачка, получим

$$F = w_0 - h_1 \left[(r_0 - r)^{3/2} \vartheta^3 - \frac{6}{5r_0} (r_0 - r)^{5/2} \vartheta \right] + h_1^2 \frac{w_0}{a_0^2 r_0} \frac{18}{5} (r_0 - r)^4 \vartheta^2 + \dots \quad (2.20)$$

Сравнивая (2.20) и (2.16), получаем, что (2.20) есть аналитическое продолжение (2.16) для $\vartheta < 0$, если $c_1 = c$. Тем самым построен главный член безвихревого решения, удовлетворяющий условиям на конусе Маха и скачке и содержащий неопределенный параметр ρ_0 , характеризующий «кривизну» скачка. Подставим теперь найденные значения скоростей в $L_2 = 0$ (1.1) и определим s , а затем установим, что производные s в $L_4 = 0$ (1.1) будут малы по сравнению с производными скоростей. Это будет означать, что главный член решения для скоростей совпадает для вихревой и безвихревой задач. После перехода к полярным координатам и выбрасывания заведомо малых членов $L_2 = 0$ принимает вид

$$s_r - \frac{1}{r_0^3 w_0} F_\theta s_\theta = 0 \quad (2.21)$$

где для F_θ нужно взять главный член в виде

$$F_\theta = \vartheta^{11} [12F_1(\rho) - 6\rho F_1'(\rho)] + \vartheta^{15} [16\Phi_1(\rho) - 6\rho\Phi_1'(\rho)]$$

После перехода к новым независимым переменным ρ и $\vartheta = \theta - \theta_0$ (2.21) преобразуется в

$$s_\rho [1 - \vartheta^{16} \rho A(\rho) - \vartheta^{20} \rho B(\rho)] + s_\vartheta [\vartheta^{17} A(\rho) + \vartheta^{21} B(\rho)] = 0 \quad (2.22)$$

$$A(\rho) = \frac{1}{r_0^3 w_0} [12F_1(\rho) - 6\rho F_1'(\rho)], \quad B(\rho) = \frac{1}{r_0^3 w_0} [16\Phi_1(\rho) - 6\rho\Phi_1'(\rho)]$$

Ищем решение (2.22) в виде

$$s(\rho, \vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(\rho) \vartheta^{17+n}$$

причем (2.17) дает $s_1(\rho_0) = d_0$. Из рекуррентных соотношений для $s_n(\rho)$ легко получить, что $s_1(\rho) \equiv d_0$, а порядок роста $s_n(\rho)$ при $\rho \rightarrow \infty$ не превышает $\rho^{(n-25)/4}$; отсюда следует, что при $\rho \rightarrow \infty$ и конечном $\zeta = \rho \vartheta^4 r_0^{-1}$ s представляется в виде

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(\zeta) \vartheta^{18+n}$$

$$p_0(0) = d_0, \quad p_1(\zeta) \sim \zeta^{3/2}, \quad p_2(\zeta) \sim \zeta^5, \quad p_3(\zeta) \sim \zeta^{15/2}, \quad p_4(\zeta) \sim \zeta^{10}, \dots, \quad \text{при } \zeta \rightarrow 0$$

После перехода к независимым переменным ζ, ϑ вместо ρ, ϑ уравнение (2.22) преобразуется к виду

$$s_\zeta [1 - 2(a\zeta^{3/2} + b\zeta^{7/2}) \vartheta^6] + \vartheta^7 (a\zeta^{3/2} + b\zeta^{7/2}) s_\vartheta = 0 \quad (2.23)$$

где a и b определяются из соотношений

$$A(\rho) \sim a\rho^{3/2}, \quad B(\rho) \sim b\rho^{7/2} \quad \text{при } \rho \rightarrow \infty$$

При помощи рекуррентных соотношений для $p_n(\zeta)$, получаемых из уравнения (2.23), можно установить, что при $\zeta \rightarrow \infty$ порядок роста $p_n(\zeta)$ не превышает $\zeta^{7n/2}$, откуда следует при малых τ

$$s = \vartheta^{18} \sum_{n=0}^{\infty} d_n \tau^n \quad (\tau = (r_0 - r)^{1/2} \vartheta^{-1}, \quad d_n = \text{const})$$

Это значит, что при конечных τ решение представляется в виде

$$s = \vartheta^{18} Q(\tau) + \dots, \quad Q(0) = d_0$$

Переходя в (2.23) к независимым переменным τ и ϑ , получим

$$s_\tau \left(\frac{7}{2} + b\tau \right) - bs_\vartheta = 0$$

Отсюда для $Q(\tau)$ легко находим

$$Q' \left(\frac{7}{2} + b\tau \right) - 18bQ = 0, \quad Q(\tau) = d_0 \left(1 + \frac{2}{7} b\tau \right)^{18}$$

Отсюда

$$s(r, \theta) = d_0 \left(1 + \frac{2}{7} b\tau \right)^{18} \vartheta^{18} + \dots = d_0 \left[\vartheta + \frac{2}{7} b(r_0 - r)^{1/2} \right]^{18} + \dots \quad (2.24)$$

Из (2.24) следует, в частности, уравнение линии тока $s = 0$

$$\vartheta = -\frac{2}{7} b(r_0 - r)^{1/2} = \dots = -\frac{32}{35} \frac{\beta}{r_0^4 w_0 \sqrt{2c}} (r_0 - r)^{1/2} + \dots$$

Оно получается также путем непосредственного интегрирования уравнения, определяющего линии тока (см. (2.16))

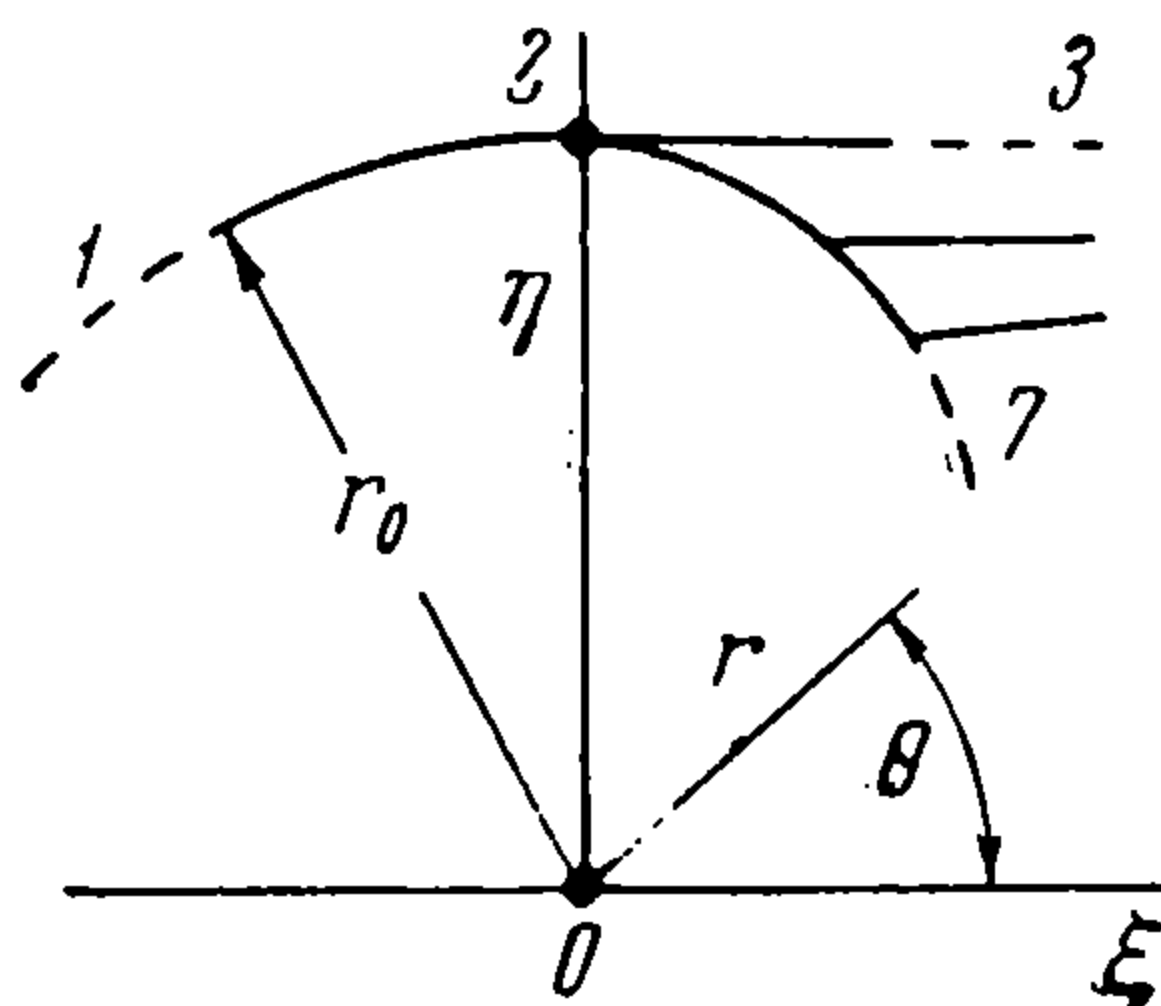
$$\frac{d\vartheta}{dr} = -\frac{1}{r_0^3 w_0} F^0 = \frac{16}{5} \frac{\beta}{r_0^4 w_0 \sqrt{2c}} (r_0 - r)^{1/2} + \dots$$

Представление s для конечных ρ, ζ, τ показывает, что производные s малы по сравнению с производными скоростей в $L_4 = 0$.

Займемся теперь исследованием решения в окрестности точки 2 (фиг. 2). Повернем систему координат так, чтобы ось z была направлена по скорости на конусе Маха 1-2, а характеристика 2-3 была бы параллельна оси ξ (фиг. 8). При подходе к точке 2 слева ($\xi = -0$) и справа ($\xi = +0$) имеются две разных особенности. Для построения особенности при $\xi = -0$ используем разложение (2.2) при $k = 2$. Переменная ρ при $k = 2$ есть $\rho = \zeta r_0$ и уравнение для $Y(\zeta)$, определяемого соотношением $F(\rho) = 2\beta r_0^2 Y(\zeta)$, запишется в виде

$$(2\zeta + 4\zeta^2 - Y')Y'' - (10\zeta + 1)Y' + 12Y = 0 \quad (2.25)$$

При этом $Y = 1/2\zeta^2 + \lambda\zeta^3 + \dots$ ($\lambda = \text{const}$) для малых ζ . Уравнение (2.25) в замкнутом виде проинтегрировать нельзя, но характер асимптотического поведения Y при $\zeta \rightarrow \infty$ установить нетрудно. Возможны два типа асимптотических представлений



Фиг. 8

$$Y(\zeta) \sim a_1\zeta^2 + a_2\zeta^{3/2},$$

$$Y(\zeta) \sim \frac{\zeta^3}{3} + \frac{\zeta^2}{2} + a_3\zeta \quad \text{при } \zeta \rightarrow \infty \quad (a_1, a_2, a_3 = \text{const})$$

Существуют также такие λ , что при некотором $\zeta < \infty$

$$|Y| < \infty, \quad |Y'| < \infty, \quad |Y''| = \infty$$

Нас интересуют решения с асимптотикой $Y \sim a_1\zeta^2 + a_2\zeta^3$. О них известно, что существует по крайней мере одно такое решение $Y = 1/2\zeta^2$, но-видимому, существуют и другие решения такого типа. На линии тока, выходящей из точки 2 ($\zeta \rightarrow \infty$), эти решения дают

$$u = -2\beta \frac{a_2}{r_0^2} (r_0 - r)^{3/2} + \dots, \quad v = -4\beta a_1 (r_0 - r) + \dots$$

$$w = w_0 - r_0 v + \dots \quad (2.26)$$

Для построения решения при $\xi = +0$ запишем уравнение ударной волны 2-7 в окрестности точки 2 в виде $\eta = \eta_0 - l\xi^2 + \dots$, где $\eta_0 = r_0$, l — неизвестная постоянная. Используя решение для простой волны в окрестности параболической линии [4] из (1.7), найдем компоненты скорости после скачка 2-7

$$u = -l^2 \frac{16w_0}{\gamma + 1} \frac{(M_0^2 - 1)^{3/2}}{M_0^4} (l - \sqrt{M_0^2 - 1}) \xi^3 + \dots \quad (2.27)$$

$$v = -l \frac{2w_0}{\gamma + 1} \frac{(M_0^2 - 1)^{3/2}}{M_0^4} (4l - 3\sqrt{M_0^2 - 1}) \xi^2 + \dots$$

$$w = w_0 - \eta_0 v + \dots, \quad s = O(\xi^6)$$

Будем искать решение после ударной волны 2-7 в виде

$$u = u(\sigma) \xi^3 + \dots, \quad v = v(\sigma) \xi^2 + \dots, \quad w = w_0 + w(\sigma) \xi^2 + \dots,$$

$$s = s(\sigma) \xi^6 + \dots, \quad \sigma = \frac{\eta_0 - \eta}{\xi^2} \eta_0$$

Подставляя u, v, w, s в систему (1.1), получим, что главный член

решения будет безвихревым и $u(\sigma)$, $v(\sigma)$, $w(\sigma)$ выражаются через одну функцию $X(\sigma)$

$$\begin{aligned} u(\sigma) &= \frac{2w_0}{\gamma+1} \frac{(M_0^2-1)^3}{M_0^4} (2X - \sigma X'), & v(\sigma) &= -\frac{w_0}{\gamma+1} \frac{(M_0^2-1)^{3/2}}{M_0^4} X', \\ w(\sigma) &= -\eta_0 v(\sigma) \end{aligned} \quad (2.28)$$

а функция $X(\sigma)$ удовлетворяет уравнению

$$(X' + 2\sigma - 4\sigma^2) X'' + (10\sigma - 4) X' - 12X = 0 \quad (2.29)$$

Условия (2.27) дают, что при значении $\sigma = \sigma_0$, соответствующем ударной волне

$$X(\sigma_0) = \sigma_0^2, \quad X'(\sigma_0) = 2\sigma_0(4\sigma_0 - 3) \quad (0 < \sigma_0 < 1) \quad (2.30)$$

При $\sigma \rightarrow \infty$ возможны два типа асимптотических выражений

$$X(\sigma) \sim b_1 \sigma^2 + b_2 \sigma^{3/2}, \quad X(\sigma) \sim \frac{\sigma^3}{3} + b_3 \sigma \quad (b_1, b_2, b_3 = \text{const})$$

Для рассматриваемой задачи представляет интерес решение первого типа. В частности уравнение (2.29) имеет семейство точных решений

$$X = \sigma^2 + b_2 \left(\sigma^{3/2} + \frac{3}{32} b_2 \right)$$

которое при $b_2 = -\frac{32}{27} \sqrt{3}$ и $\sigma_0 = \frac{1}{3}$ удовлетворяет условиям (2.30). По-видимому, существуют решения с $b_1 \neq 1$. На линии тока, выходящей из точки 2 (фиг. 8) ($\sigma \rightarrow \infty$), эти решения дают

$$\begin{aligned} u &= b_2 \frac{w_0}{\gamma+1} \frac{(M_0^2-1)^{3/2}}{M_0^4} (\eta_0 - \eta)^{3/2} + \dots, \\ v &= -b_1 \frac{2w_0}{\gamma+1} \frac{(M_0^2-1)^2}{M_0^4} (\eta_0 - \eta) + \dots, \quad w = w_0 - \eta_0 v + \dots \end{aligned} \quad (2.31)$$

Сравнивая (2.26) и (2.31), можно сделать вывод, что для смыкания потоков нужно, чтобы a_1 , a_2 , зависящие от λ , и b_1 , b_2 , зависящие от σ_0 , давали равные коэффициенты при степенях $\eta_0 - \eta$, $r_0 - r$. Это приводит к системе уравнений для определения λ и σ_0 , которая, видимо, может быть составлена и решена численным интегрированием (2.25) и (2.29), после чего можно будет сделать окончательный вывод о возможности смыкания потоков в точке 2.

Рассмотренные выше и более сложные особенности, полученные автором, не разрешили задачу смыкания потоков в точке 9 (фиг. 3). Отметим только, что решение (1.1) после скачка 9-10, мы брали в виде $u = u(\varphi) \varepsilon^\alpha + \dots$, $v = v(\varphi) \varepsilon^\alpha + \dots$, $w = w_0 + w(\varphi) \varepsilon^\alpha + \dots$, где ε , φ — полярные координаты на плоскости ξ, η с началом в точке 9, $\alpha > 0$ — постоянная.

Автор благодарит С. В. Фальковича за ценные замечания.

Поступила 15 XII 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Булах Б. М. Замечание к докладу А. Ферри «Новая теоретическая работа по сверхзвуковой аэродинамике в Бруклинском политехническом институте». ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 3.
2. Булах Б. М. К теории конических течений. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 1.
3. Булах Б. М. Замечание к статье Л. Р. Фауэлла «Точное и приближенное решение для сверхзвукового дельтаобразного крыла». ПММ, 1958, т. XXII, вып. 3.
4. Булах Б. М. К теории нелинейных конических течений. ПММ, 1955, т. XIX.
5. Курант Р., Фридрихс К., Сверхзвуковое течение и ударные волны, ИИЛ, 1950.