

ОКОЛОЗВУКОВЫЕ ПЛОСКИЕ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА С ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ НА ЗВУКОВОЙ ЛИНИИ

С. В. Фалькович

(Саратов)

1. Изучение различных случаев плоского безвихревого течения газа при околозвуковых скоростях приводит к краевым задачам для уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа, при этом для наиболее интересных случаев решение такой краевой задачи должно иметь особую точку на звуковой линии. Определение характера такой особой точки часто составляет основную трудность задачи. Такие решения с особой точкой на звуковой линии известны для уравнения Трикоми

$$\eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = 0. \quad (1.1)$$

для которого они являются классом автомодельных решений. Однако плоское безвихревое течение газа определяется уравнением Чаплыгина, которое в окрестности скорости звука может быть лишь приближенно заменено уравнением Трикоми. Уравнение Чаплыгина не имеет автомодельных решений, и это обстоятельство затрудняет нахождение интегралов уравнения Чаплыгина с особенностями на звуковой линии.

В настоящей работе указанные решения находятся в форме бесконечного ряда, первый член которого является соответствующим автомодельным решением уравнения Трикоми.

2. Уравнение плоского, безвихревого, адиабатического движения газа, как показал Чаплыгин, может быть приведено к виду

$$4\tau^2(1-\tau) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} + 4\tau[1+(\beta-1)\tau] \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + [1-(2\beta+1)\tau] \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0. \quad (2.1)$$

$$\left(\tau = \frac{v^2}{v_m^2}, \beta = \frac{1}{\kappa-1}, \tau = \tau_* = \frac{1}{2\beta+1} \text{ при } v = a. \right)$$

Здесь ψ — функция тока; θ — угол, образуемый вектором скорости с выбранным фиксированным направлением; v — скорость потока; v_m и v_* — максимальная и критическая скорости потока; κ — отношение теплоемкостей.

Из формулы (2.1) видно, что при $\tau = \tau_*$ меняется знак у коэффициента последнего члена уравнения. Таким образом, при изучении околозвуковых движений газа мы будем иметь дело с уравнением смешанного эллиптико-гиперболического типа. Такие уравнения, как показал Трикоми [1], удобнее изучать, преобразуя их к специальному каноническому виду, позволяющему легко выделить главный член решения. Для уравнения (2.1) такое преобразование было произведено Ф. И. Франклем [2] посредством введения вместо τ переменной η

$$\eta = \left(\frac{\kappa}{4} \int_{\tau}^{\tau_*} \sqrt{\frac{1-(2\beta+1)\tau}{1-\tau}} \frac{d\tau}{\tau} \right)^{1/2}. \quad (2.2)$$

Уравнение (2.1) примет при этом вид

$$\eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + b(\eta) \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = 0 \quad (2.3)$$

$$b(\eta) = \frac{2\beta(2\beta+1)\tau^2\sqrt{\eta}}{[1-(2\beta+1)\tau]\sqrt{[1-(2\beta+1)\tau](1-\tau)}} - \frac{1}{2\eta} \quad (2.4)$$

Введем переменную $z = \sqrt{[1-(2\beta+1)\tau]/(1-\tau)}$. Тогда из (2.2), (2.3) и (2.4) получим

$$b(\eta) = \frac{\kappa+1}{2} \frac{(1-\tau^2)^2}{z^3} \sqrt{\eta} - \frac{1}{2\eta} \quad (2.5)$$

$$\eta = \left[\frac{3}{4} \ln \left(\frac{h-z}{h+z} \frac{1+z}{1-z} \right)^{2/3} \right] \quad \left(h = \sqrt{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}} \right)$$

Уравнения (2.5) определяют функцию $b(\eta)$ параметрически через параметр z . Отметим, что при дозвуковой скорости, т. е. при $\tau < \tau_c$, параметр z — действительная величина, и $\eta > 0$; при сверхзвуковой скорости z принимает чисто мнимые значения $\eta < 0$, и следовательно, $b(\eta)$ остается действительной величиной при любых действительных значениях η . Из (2.5) видно, что в окрестности значения $\eta = 0$ функция $b(\eta)$ может быть разложена в ряд

$$b(\eta) = b_0 + b_1\eta + b_2\eta^2 + \dots \quad (2.6)$$

$$b_0 = -\frac{2\kappa+5}{5(\kappa+1)^{1/3}}, \quad b_1 = \frac{46\kappa^2+105\kappa+125}{175(\kappa+1)^{2/3}}$$

3. Для отыскания решений уравнения (2.3), имеющих особые точки на звуковой линии $\eta = 0$, удобнее ввести новые переменные

$$\rho = +\sqrt{\theta^2 + \frac{4}{9}\eta^3}, \quad t = \frac{\theta}{\rho} \quad (3.1)$$

и преобразовать уравнение (2.3) к виду

$$(1-t^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{4}{3} t \frac{\partial \psi}{\partial t} + \rho^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} + \frac{4}{3} \rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} = -\frac{2}{3} \eta b(\eta) \left(t \frac{\partial \psi}{\partial t} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) \quad (3.2)$$

Так как из (3.1) следует, что $\eta = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} \rho^{2/3} (1-t^2)^{1/3}$ и согласно (2.6)

$$b(\eta) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m \eta^m = \sum_{m=0}^{\infty} b_m \left(\frac{3}{2}\right)^{2m/3} \rho^{2m/3} (1-t^2)^{m/3}$$

то уравнение (3.2) можно окончательно записать в виде

$$(1-t^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{4}{3} t \frac{\partial \psi}{\partial t} + \rho^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} + \frac{4}{3} \rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} =$$

$$= \left(t \frac{\partial \psi}{\partial t} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) \sum_{m=0}^{\infty} b_m \left(\frac{3}{2}\right)^{2m/3} \rho^{2m/3} (1-t^2)^{m/3} \quad (3.3)$$

Будем искать решение уравнения (3.3) в форме ряда

$$\psi(\rho, t) = \rho^\lambda f_0(t) + \rho^{\lambda+\frac{2}{3}} f_1(t) + \rho^{\lambda+\frac{4}{3}} f_2(t) + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} \rho^{\lambda+\frac{2}{3}m} f_m(t) \quad (3.4)$$

Подставляя разложение (3.4) в уравнение (3.3) и приравнявая нулю коэффициенты при степенях ρ , получим рекуррентную формулу для определения коэффициентов $f_m(t)$ в разложении (3.4):

$$\begin{aligned} & (1-t^2)f_n'' - \frac{4}{3}tf_n' + \left(\lambda + \frac{2}{3}n\right)\left(\lambda + \frac{2}{3}n + \frac{1}{3}\right)f_n = \\ & = \sum_{m=0}^{n-1} b_m \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2m-1}{3}} (1-t^2)^{\frac{m+1}{3}} \left\{ tf_{n-m-1}' - \left[\lambda + \frac{2}{3}(n-m-1)\right] f_{n-m-1} \right\} \\ & \quad (n=0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Первые четыре уравнения имеют вид:

$$(1-t^2)f_0'' - \frac{4}{3}tf_0' + \lambda\left(\lambda + \frac{1}{3}\right)f_0 = 0 \quad (3.6)$$

$$(1-t^2)f_1'' - \frac{4}{3}tf_1' + \left(\lambda + \frac{2}{3}\right)\left(\lambda + \frac{3}{3}\right)f_1 = b_0\left(\frac{3}{2}\right)^{-1/3}(1-t^2)^{1/3}(tf_0' - \lambda f_0) \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} (1-t^2)f_2'' - \frac{4}{3}tf_2' + \left(\lambda + \frac{4}{3}\right)\left(\lambda + \frac{5}{3}\right)f_2 = & b_0\left(\frac{3}{2}\right)^{-1/3}(1-t^2)^{1/3}[tf_1' - \left(\lambda + \frac{2}{3}\right)f_1] + \\ & + b_1\left(\frac{3}{2}\right)^{1/3}(1-t^2)^{2/3}(tf_0' - \lambda f_0) \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} (1-t^2)f_3'' - \frac{4}{3}tf_3' + \left(\lambda + \frac{6}{3}\right)\left(\lambda + \frac{7}{3}\right)f_3 = & \\ = & b_0\left(\frac{3}{2}\right)^{-1/3}(1-t^2)^{1/3}[tf_2' - \left(\lambda + \frac{4}{3}\right)f_2] + \\ & + b_1\left(\frac{3}{2}\right)^{1/3}(1-t^2)^{2/3}[tf_1' - \left(\lambda + \frac{2}{3}\right)f_1] + b_2\left(\frac{3}{2}\right)(1-t^2)(tf_0' - \lambda f_0) \end{aligned} \quad (3.9)$$

4. Общий интеграл уравнения (3.6) выражается через гипергеометрические функции и имеет вид

$$f_0(t) = A_0 F\left(-\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{6}, \frac{1}{2}; t^2\right) + B_0 t F\left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2}, \frac{2}{3} + \frac{\lambda}{2}, \frac{3}{2}; t^2\right) \quad (4.1)$$

Для нахождения общего интеграла уравнения (3.7) заметим, что его левая часть получается из (3.6) заменой параметра λ на $\lambda + \frac{2}{3}$, следовательно, общий интеграл уравнения (3.7) будет

$$f_1(t) = f_{01}(t) + \Phi_1(t) \quad (4.2)$$

Здесь $f_{01}(t)$ — общий интеграл соответствующего (3.7) однородного уравнения имеет, следовательно, вид

$$f_{01}(t) = A_1 F\left(-\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{3}, \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; t^2\right) + B_1 t F\left(\frac{1}{6} - \frac{\lambda}{2}, 1 + \frac{\lambda}{2}, \frac{3}{2}; t^2\right) \quad (4.3)$$

$\Phi_1(t)$ — частный интеграл неоднородного уравнения (3.7), легко видеть, что $\Phi_1(t)$ можно представить в виде

$$\Phi_1(t) = -\frac{1}{2} b_0 \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} (1-t^2)^{1/3} f_0(t) \quad (4.4)$$

Для интегрирования уравнения (3.8) заменим в его правой части $f_1(t)$ согласно (4.2) и (4.4), будем иметь

$$\begin{aligned} & (1-t^2)f_2'' - \frac{4}{3}tf_2' + \left(\lambda + \frac{4}{3}\right)\left(\lambda + \frac{5}{3}\right)f_2 = \\ & = b_0\left(\frac{3}{2}\right)^{-1/3}(1-t^2)^{1/3}[tf_{01}' - \left(\lambda + \frac{2}{3}\right)f_{01}] + \\ & + \left(\frac{3}{2}\right)^{1/3}\left(b_1 - \frac{1}{2}b_0^2\right)(1-t^2)^{2/3}(tf_0' - \lambda f_0) + \left(\frac{2}{3}\right)^{2/3}\frac{1}{2}b_0^2(1-t^2)^{-1/3}f_0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Аналогично изложенному выше можно показать, что общий интеграл уравнения (4.5) имеет вид

$$f_2(t) = f_{02}(t) + \varphi_{21}(t) + \varphi_{22}(t) \quad (4.6)$$

Здесь $f_{02}(t)$ — общий интеграл уравнения (4.5) без правой части

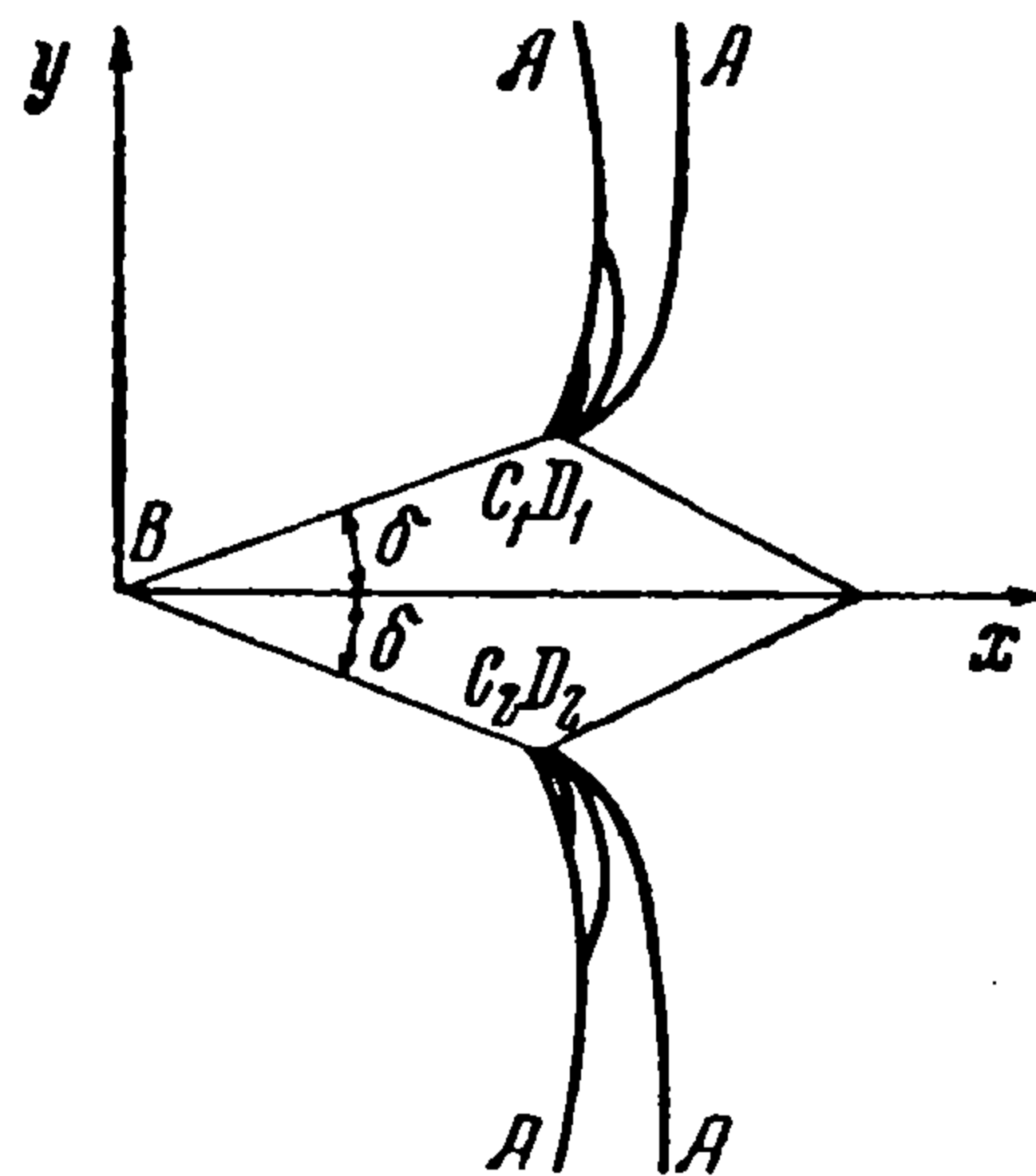
$$f_{02}(t) = A_2 F\left(-\frac{\lambda}{2} - \frac{2}{3}, \frac{\lambda}{2} + \frac{5}{6}, \frac{\lambda}{2}; t^2\right) + B_2 t F\left(-\frac{1}{6} - \frac{\lambda}{2}, \frac{4}{3} + \frac{\lambda}{2}, \frac{3}{2}; t^2\right) \quad (4.7)$$

$$\varphi_{21}(t) = -\frac{1}{2} b_0 \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} (1-t^2)^{1/3} f_{01}(t) \quad (4.8)$$

$$\varphi_{22}(t) = (1-t^2)^{2/3} [\alpha_2 f_0(t) + \beta_2 t f_0'(t)] \quad (4.9)$$

$$\alpha_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^{4/3} \frac{b_0^2 + 3/4 \lambda (1/2 b_0^2 - b_1)}{4 + 3\lambda}$$

$$\beta_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^{4/3} \frac{3(b_1 + 1/2 b_0^2)}{(4 + 3\lambda)(1 + 3\lambda)}$$

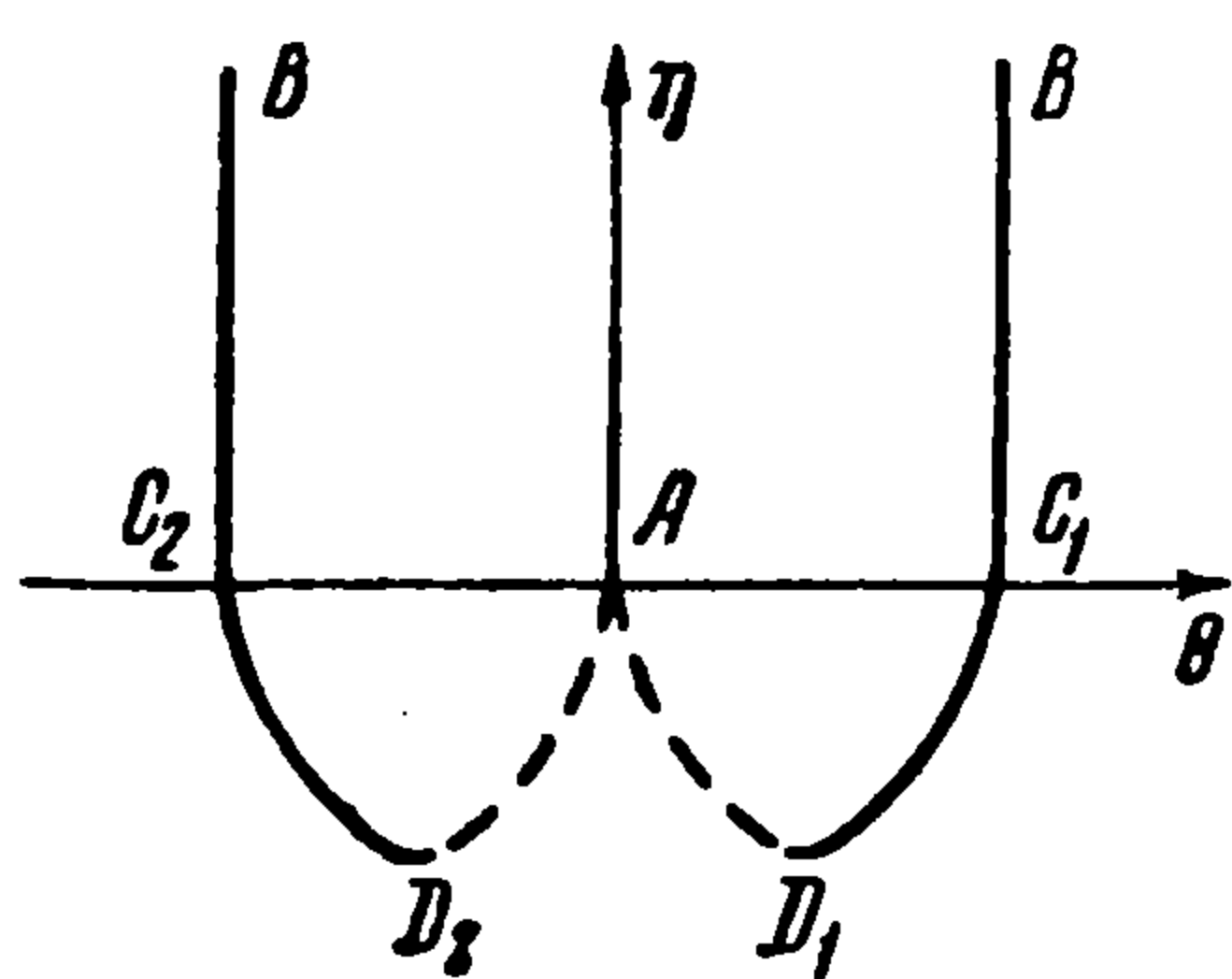


Фиг. 1

Таким образом, интегрирование системы уравнений (3.5) сводится к рекуррентному процессу, выполняемому без затруднений. Если в уравнении (2.3) пренебречь членом с первой производной, то приходим к уравнению Трикоми, для которого каждый член ряда (3.4) есть автомодельное решение.

5. Рассмотрим обтекание клиновидного профиля потоком, имеющим в бесконечности скорость, равную звуковой и направленную по оси симметрии профиля (фиг. 1)¹.

На плоскости годографа $\theta\eta$ области потока (фиг. 2), ограниченной сторонами клина BC_1 и BC_2 и предельными характеристиками C_1A и C_2A , соответствует область $BC_1D_1AD_2C_2B$, и мы приходим к следующей краевой задаче: найти решение уравнения (2.3) $\psi = \psi(\theta, \eta)$ в указанной области, удовлетворяющее условиям



Фиг. 2

$$\psi(\delta, \eta) = 0 \quad (5.1)$$

$$\psi = 0 \text{ на характеристиках } C_1D_1 \text{ и } C_2D_2 \quad (5.2)$$

$$\psi(\theta, +\infty) = 0 \quad (5.3)$$

$$\psi(-\theta, \eta) = -\psi(\theta, \eta) \quad (5.4)$$

Функция $\psi(\theta, \eta)$ ограничена на звуковой линии C_1C_2 и на характеристиках AD_1 и AD_2 и ψ неограниченно возрастает при приближении к точке A изнутри области и по характеристикам AD_1 и AD_2 . (5.5)

Следовательно, мы приходим к задаче о нахождении интеграла уравнения Чаплыгина с особой точкой на звуковой линии.

¹ Задача рассматривалась рядом авторов. Первое и наиболее значительное по результатам решение принадлежит Л. В. Овсянникову [3]. Затем несколько другим методом ее решали Гудерлей и Иосихара [4]. В указанных работах задача решалась на основе замены основного уравнения для функции тока (уравнения Чаплыгина (2.3)) уравнением Трикоми (1.1).

Попытка решения данной задачи на основе уравнений Чаплыгина, имеется в работе [5], однако указанное там решение не имеет физического смысла, так как обращается на предельных характеристиках в бесконечность.

6. Для удовлетворения условия (5.5) будем искать решение уравнения (2.3) в форме ряда (3.4). При этом, как показал Ф. И. Франкль [6], необходимо положить $\lambda = -\frac{5}{3}$. Ряд (3.4) примет, следовательно, вид

$$\psi_0(\theta, \eta) = \rho^{-5/3} f_0(t) + \rho^{-1} f_1(t) + \rho^{-1/3} f_2(t) + \rho^{1/3} f_3(t) + \dots \quad (6.1)$$

Из формулы (4.1), полагая $\lambda = -\frac{5}{3}$ и, кроме того, чтобы удовлетворить (5.4), полагая $A_0 = 0$, получим

$$\begin{aligned} f_0(t) &= B_0 t F\left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{3}{2}; t^2\right) = \\ &= \frac{9}{16} B_0 \left[(1-t^2)^{1/3} \left(\frac{1}{3} + t\right) - (1+t)^{1/3} \left(\frac{1}{3} - t\right)\right] \end{aligned} \quad (6.2)$$

Для нахождения второго члена в (6.1), удовлетворяющего условию (5.4), положим в формуле (4.3) $\lambda = -\frac{5}{3}$, $A_1 = 0$; тогда на основании (4.2) и (4.3) будем иметь

$$\rho^{-1} f_1(t) = B_1 \rho^{-1} t F\left(1, \frac{1}{6}, \frac{3}{2}, t^2\right) - \frac{1}{2} b_0^2 \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} \rho^{-1} (1-t^2)^{1/3} f_0(t) \quad (6.3)$$

Используя свойства гипергеометрических функций, можно показать, что первый член в (6.3) при $\rho = 0$, т. е. на характеристиках AD_1 и AD_2 , обращается в бесконечность, следовательно, для выполнения условия (5.5) необходимо положить $B_1 = 0$, и (6.3) можно записать в виде

$$\rho^{-1} f_1(t) = -\frac{1}{2} b_0 \eta \rho^{-5/3} f_0(t) \quad (6.4)$$

Для определения третьего слагаемого в формуле (6.1), положим в (4.7) $\lambda = -\frac{5}{3}$, $A_2 = 0$; тогда будем иметь

$$f_{02}(t) = B_2 t F\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; t^2\right) \quad (6.5)$$

Из (4.8) получим при $B_1 = 0$ $\varphi_{21}(t) = 0$; формула (4.9) примет вид:

$$\varphi_{22}(t) = \frac{3}{4} \eta^2 \rho^{-5/3} \left[\left(b_1 + \frac{1}{2} b_1\right) t f_0' - \left(b_0^2 + \frac{5}{3} b_1\right) f_0 \right] \quad (6.6)$$

Тогда для третьего члена в уравнении (6.1) на основании (4.6) будем иметь

$$\rho^{-1/3} f_2(t) = B_2 \rho^{-1/3} t F\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}; t^2\right) + \rho^{-1/3} \varphi_{22}(t) \quad (6.7)$$

Так как первый член неограниченно возрастает при $\rho \rightarrow 0$, то необходимо положить $B_2 = 0$; тогда будем иметь

$$\rho^{-1/3} f_2(t) = \frac{3}{4} \eta^2 \rho^{-5/3} \left[\left(b_1 + \frac{b_0^2}{2}\right) t f_0' - \left(b_0^2 + \frac{5}{3} b_1\right) f_0 \right]$$

Подставляя сюда значение $f_0(t)$ из (6.2), окончательно получим

$$\begin{aligned} \rho^{-1/3} f_2(t) &= \frac{9}{16} B_0 \left(\frac{3}{2}\right)^{4/3} \left(b_1 + \frac{b_0^2}{2}\right) \rho^{-1/3} t \left[(1+t)^{1/3} \left(\frac{2}{3} - t\right) + (1-t)^{1/3} \left(\frac{2}{3} + t\right) \right] - \\ &\quad - \frac{3}{4} \left(b_0^2 + \frac{5}{3} b_1\right) \eta^2 \rho^{-5/3} f_0(t) \end{aligned} \quad (6.8)$$

Следующие члены разложения (6.1) ограничены на характеристиках и будут содержать член с произвольным постоянным множителем, который определим так, чтобы $f_k(1) = 0$ $k > 2$.

Для удовлетворения граничному условию (5.1) необходимо, чтобы искомое решение было периодически по переменной θ с периодом 2δ .

Для периодизации полученного решения (6.1) используем его значение на звуковой линии. При $\eta = 0$ из (6.1) имеем ($t = 1, \rho = \theta$)

$$\psi_0(\theta, 0) = f_0(1)\theta^{-5/8} + f_1(1)\theta^{-1} + f_2(1)\theta^{-1/8}$$

Из (6.2) и (6.8) получим

$$f_0(1) = \frac{3}{8} 2^{1/8} B_0, f_1(1) = 0, f_2(1) = -\frac{9}{32} B_0 6^{1/8} (b_1 + \frac{1}{2} b_0^2)$$

следовательно

$$\psi_0(\theta, 0) = \frac{3}{8} 2^{1/8} B_0 [\theta^{-5/8} - \frac{3}{4} 3^{1/8} (b_1 + \frac{1}{2} b_0^2) \theta^{-1/8}] \quad (6.9)$$

7. Обратимся теперь к уравнению (2.3) и найдем частные решения этого уравнения вида $\psi_n(\theta, \eta) = s_n(\eta) \sin(\pi n \theta / \delta)$. При целочисленных значениях n эти решения будут удовлетворять граничному условию (5.1) Подставляя это выражение в (2.3), получим для $s_n(\eta)$ уравнение

$$\frac{d^2 s_n}{d\eta^2} + b(\eta) \frac{ds_n}{d\eta} - \frac{\pi^2 n^2}{\delta^2} s_n = 0 \quad (7.1)$$

Если потребовать, чтобы $s_n(+\infty) = 0$ и $s_n(0) = 1$, то интеграл уравнения (7.1) определится однозначно. Такой интеграл, используя (2.1) и (2.3), можно выразить в явном виде через гипергеометрические функции Чаплыгина

$$s_n(\eta) = \frac{z_\nu(\tau)}{z_\nu(\tau_*)}, \quad z_\nu(\tau) = \tau^\nu F(a_\nu, b_\nu, 2\nu + 1; \tau) \quad (7.2)$$

Здесь

$$\nu = \frac{\pi n}{2\delta}, \quad a_\nu + b_\nu = 2\nu - \beta, \quad a_\nu b_\nu = -\beta\nu(2\nu + 1), \quad \tau_* = \frac{1}{2\beta + 1}$$

Бесконечный сходящийся ряд

$$\psi(\theta, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n s_n(\eta) \sin \frac{\pi n}{\delta} \theta \quad (7.3)$$

есть точное решение уравнения (2.3), удовлетворяющее граничным условиям (5.1), (5.3), (5.4). Для того чтобы удовлетворить основному условию (5.5), необходимо так выбрать коэффициенты A_n в формуле (7.3), чтобы при $\eta = 0$ и $\theta \rightarrow 0$ поведение ряда (7.3) определялось выражением (6.9). В этом случае ряд (7.3) будет представлять собой функцию, ограниченную на характеристиках AD_1 и AD_2 .

8. Для дальнейшего нам необходимо исследовать следующую функцию, являющуюся решением уравнения Чаплыгина (2.1):

$$F_\lambda(\theta, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\lambda} \frac{z_{n/2}(\tau)}{z_{n/2}(\tau_*)} \sin n\theta \quad (8.1)$$

Ряд (8.1) в силу свойств функции $z_{n/2}(\tau)$ сходится при $\tau < \tau_*$ для любых значений постоянной λ . Чтобы исследовать поведение функции $F_\lambda(\theta, \tau_*)$, воспользуемся формулой из теории гамма функций

$$\frac{1}{n^\lambda} = \frac{1}{\Gamma(\lambda) (e^{2\pi i \lambda} - 1)} \int_{\infty}^{(0+)} t^{\lambda-1} e^{-nt} dt \quad (8.2)$$

Здесь интеграл берется по контуру, проходящему в обоих направлениях вдоль положительной части вещественной оси и окружающему начало координат против часовой стрелки.

Подставляя (8.2) в формулу (8.1), будем иметь

$$F_\lambda(\theta, \tau) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)(e^{2\pi i\lambda} - 1)} \int_{\infty}^{(0+)} t^{\lambda-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_{n/2}(\tau)}{z_{n/2}(\tau_*)} e^{-nt} \sin n\theta \right) dt \quad (8.3)$$

при $\tau = \tau_*$, т. е. на звуковой линии, получим

$$F_\lambda(\theta, \tau_*) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)(e^{2\pi i\lambda} - 1)} \int_{\infty}^{(0+)} \frac{t^{\lambda-1} \sin \theta}{\operatorname{ch} t - \cos \theta} dt \quad (8.4)$$

При малых значениях θ полюсы подынтегральной функции в точках $t = \pm i\theta$ лежат вблизи контура интегрирования в (8.4); учитывая это обстоятельство, легко получим представление $F_\lambda(\theta, \tau_*)$ при $\theta \rightarrow 0$.

$$F_\lambda(\theta, \tau_*) \sim \Gamma(1 - \lambda) \cos \frac{\pi\lambda}{2} |\theta|^{\lambda-1} \quad (8.5)$$

В частности, при $\lambda = -2/3$ и $\lambda = 2/3$ будем иметь соответственно

$$F_{-2/3}(\theta, \tau_*) \sim \Gamma\left(\frac{5}{3}\right) \cos \frac{1}{3} \pi \theta^{-5/3}, \quad F_{2/3}(\theta, \tau_*) \sim \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \cos \frac{1}{3} \pi \theta^{-1/3} \quad (8.6)$$

Следовательно, положив в формуле (7.3)

$$A_n = C(n^{2/3} - an^{-2/3}) \quad (8.7)$$

здесь C — произвольная постоянная,

$$a = \frac{3^{1/3} \Gamma(2/3) \delta^{4/3}}{2\pi^{4/3} \Gamma(1/3)} \left(b_1 + \frac{b_0^2}{2} \right) \quad (8.8)$$

т. е. приняв

$$\psi(\theta, \tau) = C \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{2/3} - \frac{a}{n^{2/3}} \right) \frac{z_\nu(\tau)}{z_\nu(\tau_*)} \sin 2\nu\theta \quad \left(\nu = \frac{\pi n}{2\delta} \right) \quad (8.9)$$

мы удовлетворим всем указанным выше граничным условиям, за исключением условия (5.2). Для удовлетворения этому последнему граничному условию к ряду (8.9) достаточно прибавить ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \frac{z_\nu(\tau)}{z_\nu(\tau_*)} \sin 2\nu\theta$$

Требую выполнения условия (5.1) в отдельных точках на характеристиках C_1D_1 и C_2D_2 (см. фиг. 2), получим систему линейных уравнений, определяющих α_n . Получаемые при этом значения коэффициентов α_n оказываются малыми сравнительно с коэффициентами ряда (8.9), вследствие чего ими можно пренебречь.

Таким образом, полученное точное решение уравнения Чаплыгина, определяемое формулой (8.9), не обращается в нуль на характеристиках C_1D_1 и C_2D_2 (см. фиг. 2), но принимает на них малые значения.

9. Пользуясь выражением (8.9) для функции тока ψ , можно получить формулу, определяющую распределение скорости вдоль стороны клина. Согласно Чаплыгину имеем

$$dx = \frac{\cos \theta}{v} d\varphi - \frac{\sin \theta}{(1 - \tau)^\beta} d\psi \quad (9.1)$$

Здесь φ — потенциал скорости, связанный с функцией тока ψ уравнениями

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{2\tau}{(1 - \tau)^\beta} \frac{\partial \psi}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = - \frac{1 - (2\beta + 1)\tau}{2\tau(1 - \tau)^{\beta+1}} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (9.2)$$

Так как вдоль верхней стороны клина $\theta = \sigma$, $d\psi = 0$, то используя второе из уравнений (9.2), получим из (9.1)

$$x = -\frac{\cos \delta}{2v_{\max}} \int_0^{\tau} \frac{1 - (2\beta + 1)\tau}{\tau \sqrt{\tau} (1 - \tau)^{\beta+1}} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)_{\theta=\delta} d\tau \quad (9.3)$$

Из формулы (8.9) имеем

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)_{\theta=\delta} = C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{\delta} (-1)^n (n^{5/3} - an^{1/3}) \frac{z_v(\tau)}{z_v(\tau_*)}$$

Подставляя это выражение в (9.3) и вычисляя интеграл, получим

$$x(\tau) = \frac{c\pi \cos \delta}{\delta v_{\max} \sqrt{\tau} (1 - \tau)^{\beta}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^{5/3} - an^{1/3}}{n^2 \pi^2 / \delta^2 - 1} \frac{z_v(\tau) + 2\tau z_v'(\tau)}{z_v(\tau_*)} \quad (9.4)$$

Формула (9.4) определяет распределение скорости вдоль стороны клина. Для определения постоянной C заметим, что

$$\lim_{\tau \rightarrow \tau_*} \frac{x(\tau)}{\cos \delta} = l \quad \text{при } \tau \rightarrow \tau_*$$

где l — длина стороны клина; следовательно

$$l = \frac{C\pi}{\delta v_{\max} \sqrt{\tau_*} (1 - \tau_*)^{\beta}} \lim_{\tau \rightarrow \tau_*} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (n^{5/3} - an^{1/3})}{n^2 \pi^2 / \delta^2 - 1} \frac{z_v(\tau) + 2\tau z_v'(\tau)}{z_v(\tau_*)} \quad (9.5)$$

Существенно отметить, что в формуле (9.5) нельзя переставлять знак предела и знак суммы, так как получающийся при такой перестановке ряд расходится.

Обозначив для краткости письма

$$S_1 = \lim_{\tau \rightarrow \tau_*} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (n^{5/3} - an^{1/3})}{n^2 \pi^2 / \delta^2 - 1} \frac{z_v(\tau) + 2\tau z_v'(\tau)}{z_v(\tau_*)} \quad (9.10)$$

запишем (9.5) в виде

$$l = \frac{C\pi}{\delta v_{\max} \sqrt{\tau_*} (1 - \tau_*)^{\beta}} S_1 \quad (9.11)$$

10. Для коэффициента давления при скорости набегающего потока, равной звуковой, имеем

$$C_p = \frac{p - p_*}{\frac{1}{2}\rho_* a_*^2} = \frac{2}{\kappa} \left[\left(\frac{1 - \tau}{1 - \tau_*} \right)^{\beta+1} - 1 \right] \quad (10.1)$$

Интегрируя вдоль стороны клина, получим для коэффициента лобового давления

$$C_x = \frac{12 \operatorname{tg} \delta}{l} \int_0^l C_p dx = \frac{2 \operatorname{tg} \delta}{l} \int_0^{\tau_*} C_p \frac{dx}{d\tau} d\tau = -\frac{2 \operatorname{tg} \delta}{l} \int_0^{\tau_*} x \frac{dC_p}{d\tau} d\tau \quad (10.2)$$

Подставляя сюда выражения x и $dC_p/d\tau$ из (9.4) и (10.1), будем иметь

$$C_x = \frac{8\pi c \sin \delta}{\delta l (\kappa - 1) (1 - \tau_*)^{\beta+1} v_{\max}} \int_0^{\tau_*} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^{5/3} - an^{1/3}}{n^2 \pi^2 / \delta^2 - 1} \left(\frac{\sqrt{\tau} z_v'(\tau)}{z_v(\tau_*)} \right)' d\tau$$

Вычисляя интеграл, получим окончательно

$$C_x = \frac{8\pi c \sin \delta \sqrt{\tau_*}}{l\delta(\kappa-1)(1-\tau_*)^{\beta+1} n_{\max}} S_2 \quad (10.3)$$

Здесь

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^{5/3} - an^{1/3}}{n^2\pi^2/\delta^2 - 1} \quad (10.4)$$

Исключая из (10.5) постоянную C при помощи (9.11), получим

$$C_x = 4 \sin \delta \frac{S_2}{S_1} \quad (10.5)$$

11. Для вычисления предела S_1 из (9.10) перепишем ее в виде

$$S_1 = \lim_{\tau \rightarrow \tau_*} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (n^{5/3} - an^{1/3})}{n^2\pi^2/\delta^2 - 1} \frac{z_\nu(\tau)}{z_\nu(\tau_*)} = \lim_{\tau \rightarrow \tau_*} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (n^{5/3} - an^{1/3})}{n^2\pi^2/\delta^2 - 1} \frac{2\tau z'_\nu(\tau)}{z_\nu(\tau_*)}$$

или

$$S_1 = S_2 + S_3$$

Здесь

$$S_3 = \lim_{\tau \rightarrow \tau_*} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (n^{5/3} - an^{1/3})}{n^2\pi^2/\delta^2 - 1} \frac{2\tau z'_\nu(\tau)}{z_\nu(\tau_*)} \quad (11.1)$$

Для вычисления S_3 воспользуемся асимптотической формулой [7]

$$\frac{2\tau_* z'_\nu(\tau_*)}{z_\nu(\tau_*)} = A_1 \nu^{2/3} + A_2 + \frac{A_3}{\nu^{2/3}} + O\left(\frac{1}{\nu^{4/3}}\right)$$

$$A_1 = \frac{2^{2/3} 3^{1/3} \Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)} (\kappa + 1)^{1/3}, \quad A_2 = -\frac{2\kappa + 5}{10}$$

и преобразуем (11.1) так:

$$S_3 = \lim_{\tau \rightarrow \tau_*} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (n^{5/3} - an^{1/3})}{n^2\pi^2/\delta^2 - 1} \left(\frac{2\tau z'_\nu(\tau)}{z_\nu(\tau_*)} - A_1 \nu^{2/3} \left(\frac{\tau}{\tau_*}\right)^n \right) +$$

$$+ \lim_{\tau \rightarrow \tau_*} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (n^{5/3} - an^{1/3})}{n^2\pi^2/\delta^2 - 1} A_1 n^{2/3} \left(\frac{\pi}{2\delta}\right)^{2/3} \left(\frac{\tau}{\tau_*}\right)^n \quad \left(\nu = \frac{\pi n}{2\delta}\right) \quad (11.2)$$

Переходя в первой сумме к пределу, получаем сходящийся ряд; обозначая его через S_4 , будем иметь

$$S_3 = S_4 + S_5$$

Здесь

$$S_5 = \lim_{\tau \rightarrow \tau_*} A_1 \left(\frac{\pi}{2\delta}\right)^{2/3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (n^{7/3} - an)}{n^2\pi^2/\delta^2 - 1} \left(\frac{\tau}{\tau_*}\right)^n \quad (11.3)$$

Это выражение можно записать в виде

$$S_5 = \frac{A_1}{2^{2/3}} \left(\frac{\delta}{\pi}\right)^{4/3} \lim_{\tau \rightarrow \tau_*} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^{1/3}}{1 - \delta^2/\pi^2 n^2} \left(\frac{\tau}{\tau_*}\right)^n - \frac{A_1 a}{2^{2/3}} \left(\frac{\pi}{\delta}\right)^{2/3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{n^2\pi^2/\delta^2 - 1}$$

но

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^{1/3}}{1 - \delta^2/\pi^2 n^2} \left(\frac{\tau}{\tau_*}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\delta}{\pi}\right)^{2k} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{2k-1/3}} \left(\frac{\tau}{\tau_*}\right)^n$$

Согласно известному свойству дзета-функции имеем [10]

$$\lim_{\tau \rightarrow \tau_*} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{2k-1/3}} \left(\frac{\tau}{\tau_*}\right)^n = (1 - 2^{4/3-2k}) \zeta\left(2k - \frac{1}{3}\right)$$

Таким образом, окончательно получаем (11.4)

$$S_3 = \frac{A_1}{2^{2/3}} \sum_{k=0}^{\infty} (1 - 2^{4/3-2k}) \zeta\left(2k - \frac{1}{3}\right) \left(\frac{\delta}{\pi}\right)^{2k+4/3} - \frac{A_1 a}{2^{2/3}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2 \pi^2 / \delta^2 - 1}.$$

Все рассматриваемые суммы можно представить в форме степенных рядов по переменной δ/π , аналогично, может быть, представлен и коэффициент давления C_x . Подробный расчет C_x для различных углов δ будет изложен в отдельной работе.

12. Обтекание плоской пластинки звуковым потоком газа. Рассмотрим пластину длины l (или профиль с плоской нижней поверхностью), поставленную под углом атаки δ к потоку, имеющему в бесконечности скорость, равную $v = a_*$ (фиг. 3).

Картина потока на плоскости годографа представлена на фиг. 4. Все линии тока выходят из точки A , соответствующей бесконечно удаленной точке потока, которая, таким образом, является особой.

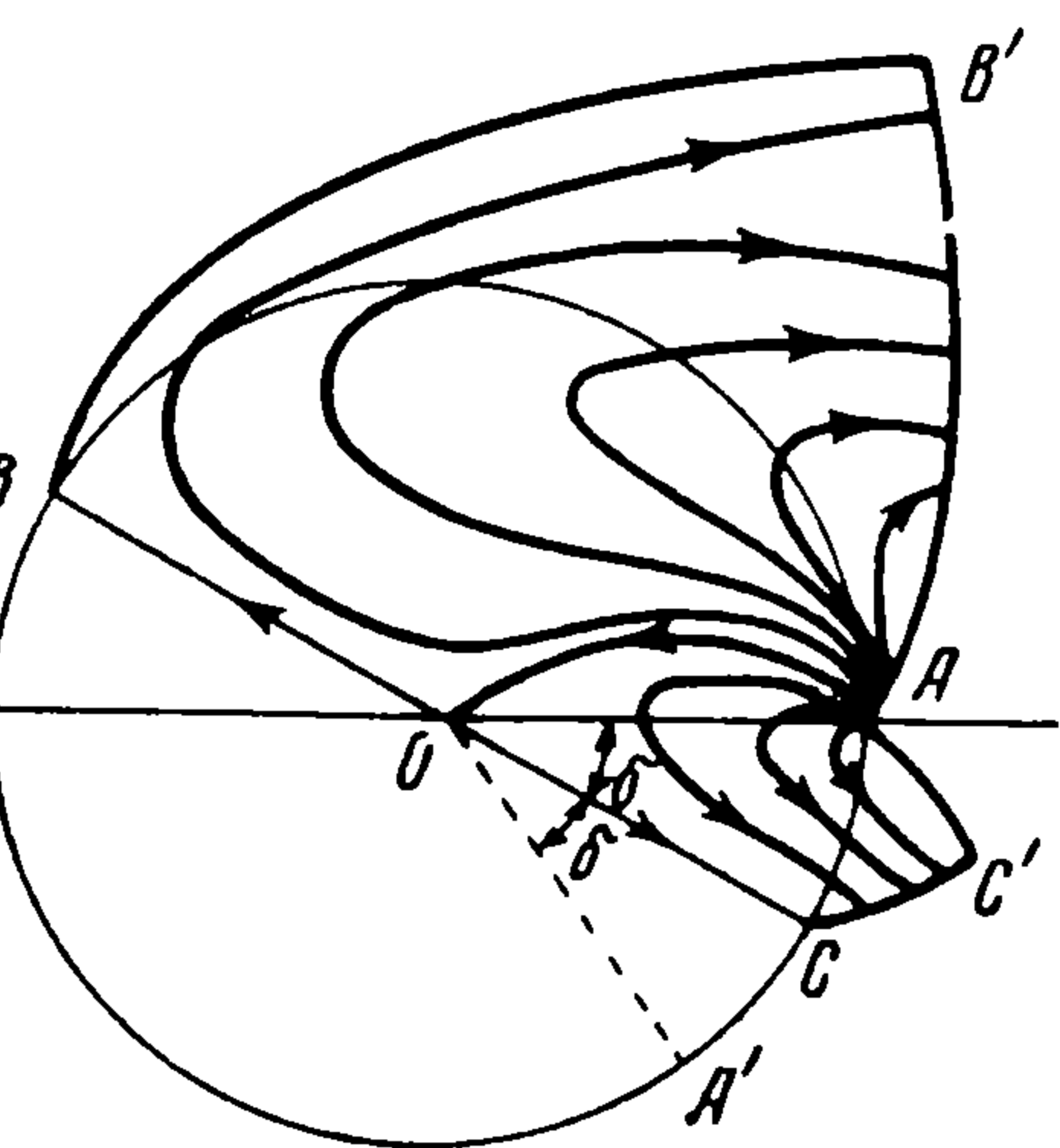
Задача сводится к определению функции тока ψ , удовлетворяющей в области $AB'BOCC'A$ уравнению Чаплыгина (2.1), имеющей особую точку в A и обращающейся в нуль на части границы $C'COBB'$ (см. фиг. 4). Решение этой задачи для уравнения Трикоми было получено Гудерлеем [8].

Пользуясь методом, изложенным выше, построим решение уравнения Чаплыгина, удовлетворяющее всем указанным граничным условиям, за исключением условий обращений в нуль на BB' и CC' . Положив в формуле (8.9) $\delta = \pi$, получим интеграл уравнения (1.1) вида (12.1)

$$\psi_1(\theta, \tau) = c \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{2/3} - \frac{a}{n^{2/3}} \right) \frac{z_{n/2}(\tau)}{z_{n/2}(\tau_*)} \sin n\theta$$

Для получения потока, обтекающего пластинку под углом δ , необходимо к выражению (12.1) прибавить функцию $\psi_2(\theta, \tau)$, четную относительно переменной θ . Соображения, аналогичные использованным при выводе (12.1), приводят к выражению

$$\psi_2 = c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma}{n^{1/3}} \frac{z_{n/2}(\tau)}{z_{n/2}(\tau_*)} \cos n\theta \quad (c, \gamma = \text{const}) \quad (12.2)$$

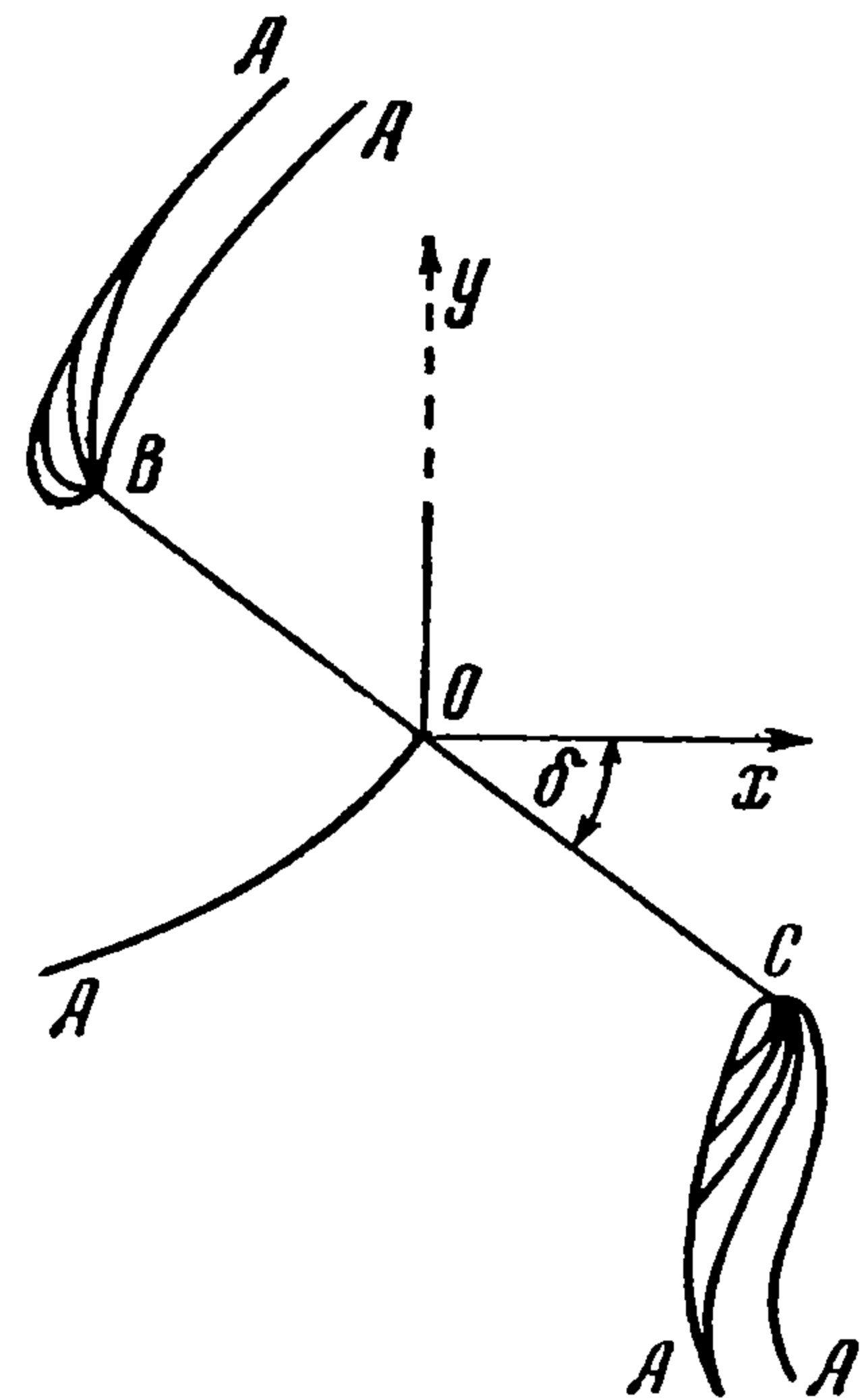


Фиг. 4

Сложив решения ψ_1 и ψ_2 , получим интеграл

$$\psi_0 = \psi_1 + \psi_2 = c \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(n^{2/3} - \frac{a}{n^{2/3}} \right) \sin n\theta + \frac{\gamma}{n^{1/3}} \cos n\theta \right] \frac{z_{n/2}(\tau)}{z_{n/2}(\tau_*)} \quad (12.3)$$

имеющий нужную особенность в точке A .



Фиг. 3

Для удовлетворения условий обтекания прибавим к ψ_0 аналогичное выражение, имеющее особенность в точке A' (см. фиг. 4), являющейся зеркальным отображением точки A относительно линии BC

$$\bar{\psi}_0(\tau, \theta) = c \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(n^{2/3} - \frac{a}{n^{2/3}} \right) \sin n(\theta + 2\delta) - \frac{\gamma}{n^{1/3}} n(\theta + 2\delta) \right] \frac{z_{n/2}(\tau)}{z_{n/2}(\tau_*)}$$

Тогда $\psi = \psi_0 + \bar{\psi}_0$ будет являться искомым решением (12.4)

$$\psi = \psi_0 + \bar{\psi}_0 = c \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(n^{2/3} - \frac{a}{n^{2/3}} \right) \cos n\delta + \frac{\gamma}{n^{1/3}} \sin n\delta \right] \frac{z_{n/2}(\tau)}{z_{n/2}(\tau_*)} \sin n(\theta + \delta)$$

Постоянная γ определится из условия, что точка O (фиг. 3) должна быть точкой разветвления линии тока [9]. Для этого, очевидно, необходимо, чтобы коэффициент при первом члене ряда (12.4) обращался в нуль, следовательно, должно быть

$$(1 - a) \cos \delta + \gamma \sin \delta = 0$$

Отсюда

$$\gamma = (a - 1) \operatorname{ctg} \delta.$$

Подставляя найденное значение γ в (12.4), найдем (12.5)

$$\psi = c \sum_{n=2}^{\infty} \left[\left(n^{2/3} - \frac{a}{n^{2/3}} \right) \sin \delta \cos n\delta + \frac{a-1}{n^{1/3}} \cos \delta \sin n\delta \right] \frac{z_{n/2}(\tau)}{z_{n/2}(\tau_*)} \sin n(\theta + \delta)$$

Полученное решение не удовлетворяет условию обращения в нуль на характеристиках BB' и CC' , но принимает на них малые значения.

Постоянная c может быть выражена через длину пластинки аналогично изложенному выше для клина.

Поступила 23.XII. 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Трикоми Ф. О линейных уравнениях смешанного типа. Гостехиздат, 1947.
2. Франкль Ф. И. К теории сопел Лавалья. Изв. АН СССР, Серия математическая, т. 9, стр. 387—422, 1945.
3. Овсянников Л. В. О движении клиновидного профиля со скоростью звука. Тр. Ленингр. военно-возд. инж. акад., вып. 33, стр. 25—51, 1950.
4. Гудерлей Г. и Йосихара. Обтекание клинообразного профиля при числе M , равном единице. Механика. Сб. переводов и рефератов иностр. период. литер., вып. 3 (VII), стр. 7—28, 1951.
5. Асланов С. К. Сопротивление клиновидного профиля, обтекаемого потоком звуковой скорости. ПММ, 1956, т. 20, вып. 6.
6. Франкль Ф. И. Исследования по теории крыла бесконечного размаха, движущегося со скоростью звука. Докл. АН СССР, 1947, т. 57, вып. 7.
7. Фалькович С. В. Асимптотическое разложение функций Чаплыгина. Изв. высш. уч. зав. Математика, № 2 (15), 1960.
8. Guderley G. The Flow over a flat Plate with a small angle of attack at Mach, Number 1. J. A. S. v. 21, № 4, 1954.
9. Франкль Ф. И. Два газодинамических приложения краевой задачи Лаврентьева-Бицадзе. Вестн. Моск. ун-та, 1951, № 11.
10. Титчмарш Е. К. Теория дзета-функции Римана, Изд. иностр. лит-ры, 1953.