

ОТРАЖЕНИЕ СХОДЯЩИХСЯ СЛАБЫХ УДАРНЫХ ВОЛН В ГАЗЕ ПЕРЕМЕННОЙ ПЛОТНОСТИ

Ф. Л. Черноусько

(Москва)

В работе [1] рассматривались сходящиеся сферические, цилиндрические и плоские ударные волны в газе переменной плотности. Начальное (невозмущенное) состояние идеального газа задавалось в виде

$$p \equiv p_0, \quad \rho = \omega r^s, \quad v \equiv 0 \quad (1)$$

где r , p , ρ , v — расстояние частицы от центра (оси или плоскости) симметрии, давление, плотность и массовая скорость, а p_0 , s , ω — постоянные. По газу в состоянии (1) распространяется (по степенному закону в зависимости от времени) сходящаяся ударная волна, которая приходит в точку, ось или плоскость $r = 0$ в момент времени $t = 0$. В работе [1] показано, что в зависимости от чисел s и ν ($\nu = 1, 2, 3$ соответственно для плоских, цилиндрических и сферических волн) имеют место качественно различные случаи поведения сходящейся волны при $r \rightarrow 0$.

При $s < 2(\nu - 1)$ ударные волны неограниченно усиливаются или сохраняют определенную постоянную интенсивность при $r \rightarrow 0$; в этом случае можно построить автомодельные решения со сходящимися ударными волнами, обладающими этими свойствами. Анализ автомодельных решений показывает, что при отражении от центра (оси) волн постоянной интенсивности газ за отраженным фронтом покоится при постоянном давлении.

При $s > 2(\nu - 1)$ таких автомодельных решений не существует. Для этого случая в [1] построено решение линеаризованных уравнений газовой динамики, описывающее движение газа со сходящейся слабой ударной волной. Анализ решения показал, что условия линеаризации выполняются при $r \rightarrow 0$, $t \rightarrow 0$, если $s > 2(\nu - 1)$, в частности, интенсивность сходящейся волны стремится к 0 при $r \rightarrow 0$.

Однако вблизи фронта отраженной волны давление и скорость частиц, согласно линейному решению, растут неограниченно. Поэтому нельзя пользоваться линеаризованными уравнениями в окрестности отраженного фронта, здесь нелинейные члены играют существенную роль.

Ниже строится решение, учитывающее нелинейные члены и справедливое асимптотически (при $r \rightarrow 0$) также и вблизи отраженного фронта. Для этого используется прием разложения в ряды одновременно и зависимых, и независимых переменных, лежащий в основе метода Пуанкаре — Лайтхилла — Го, изложенного в статье [2].

Нелинейные эффекты в слабых расходящихся волнах впервые были изучены Л. Д. Ландау [3], а для газа переменной плотности — К. Е. Губкиным [4].

Пусть скорость, давление и плотность газа до прихода возмущений заданы формулами (1), причем $s > 2(\nu - 1)$, а $u(r, t)$ — смещение частицы из начального состояния. Уравнения одномерного адиабатического движения идеального газа можно взять в виде (r — лагранжева координата)

$$\rho(r+u)^{\nu-1} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r}\right) = \omega r^s r^{\nu-1}, \quad \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r}\right) \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (2)$$
$$p \rho^{-\gamma} = p_0 (\omega r^s)^{-\gamma}$$

Первые два уравнения системы (2) выражают сохранение массы и импульса, а третье — сохранение энтропии в частице (γ — показатель адиабаты). Последнее условие, вообще говоря, не имеет места при наличии ударных волн, но его можно принять приближенно, если ударные волны являются слабыми, так как скачок энтропии в них есть величина третьего порядка малости от скачка скорости или давления. В решении, которое будет построено, ударные волны окажутся слабыми, что и оправдывает сделанное допущение.

Из первого и третьего уравнений системы (2) выразим p и ρ через u

$$p = p_0 \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r}\right)^{-\gamma} \left(1 + \frac{u}{r}\right)^{-\gamma(\nu-1)}, \quad \rho = \omega r^s \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r}\right)^{-1} \left(1 + \frac{u}{r}\right)^{1-\nu} \quad (3)$$

Подставляя равенства (3) в условие сохранения импульса (2), найдем уравнение для функции $u(r, t)$

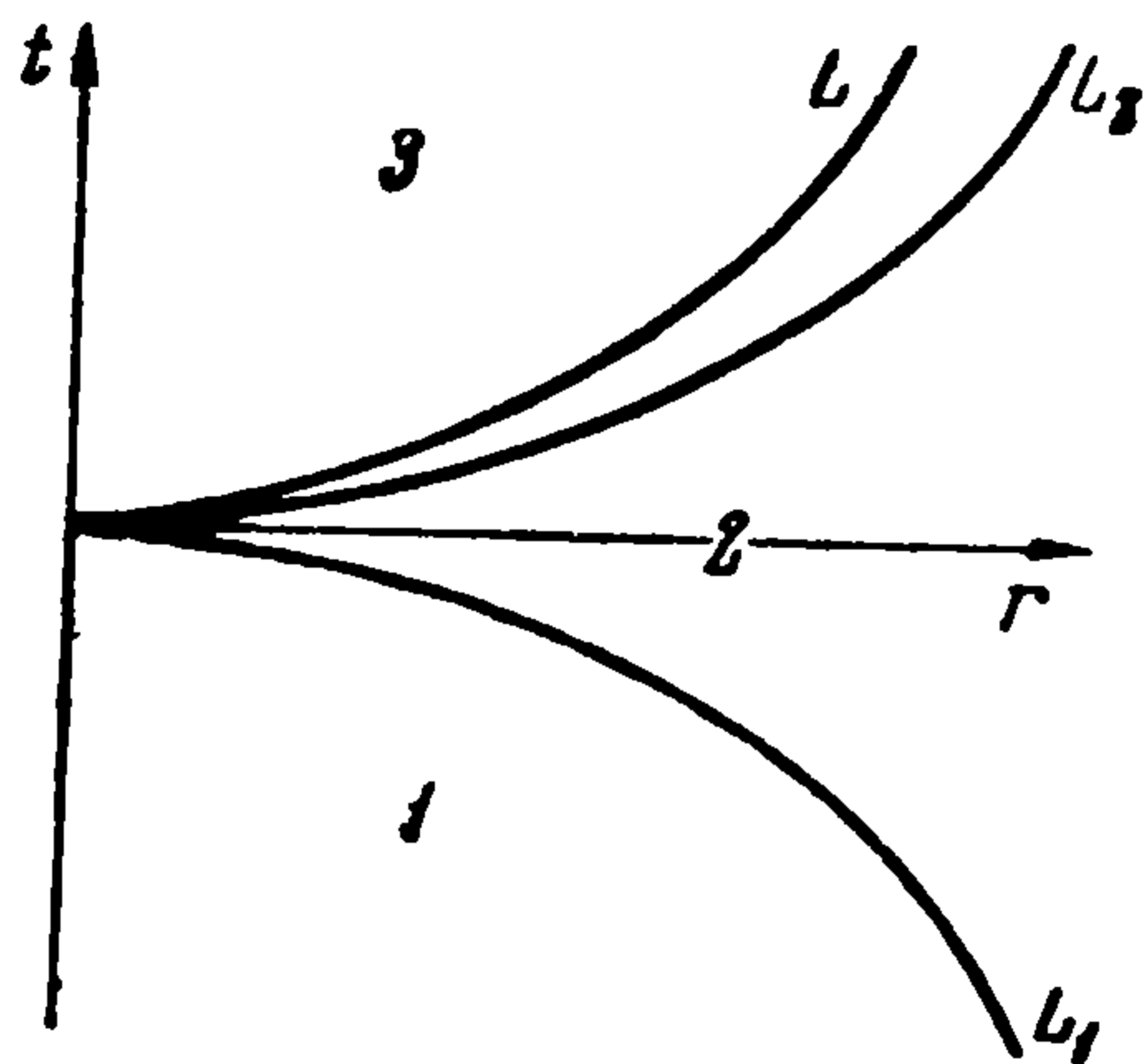
$$\frac{\omega r^s}{\gamma p_0} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r}\right)^{\gamma+1} \left(1 + \frac{u}{r}\right)^{(\gamma-1)(\nu-1)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\nu-1}{r+u} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r}\right) \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}\right) \quad (4)$$

Характеристики этого нелинейного гиперболического уравнения второго порядка определяются равенством

$$\frac{dt}{dr} = \pm \sqrt{\frac{\omega r^s}{\gamma p_0} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r}\right)^{(\gamma+1)/2} \left(1 + \frac{u}{r}\right)^{[(\gamma-1)(\nu-1)]/2}} \quad (5)$$

Если же линеаризовать уравнение (4), считая $u \ll r$ и $\partial u / \partial r \ll 1$, то его характеристиками, проходящими через $r = 0, t = 0$, будут, как следует из (5), параболы

$$t = \mp \frac{2}{2+s} \sqrt{\frac{\omega}{\gamma p_0}} r^{(2+s)/2}$$



Фиг. 1

Они изображены на фиг. 1 кривыми L_1 и L_2 в плоскости rt и представляют собой фронты сходящейся и отраженной волн в линейном приближении. Введем вместо t новую безразмерную переменную x

$$x = \frac{1}{2} \left[\frac{(2+s) \sqrt{\gamma p_0}}{2 \sqrt{\omega}} t r^{-(2+s)/2} + 1 \right] \quad (6)$$

Очевидно, что $x = 0$ на кривой L_1 и $x = 1$ на кривой L_2 . Будем считать u функцией от x и r и обозначим $\partial u(x, r) / \partial x = z(x, r)$. Переходя к новым переменным, получим вместо уравнения (4) систему двух уравнений для функций $u(x, r)$ и $z(x, r)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} - z = 0 \quad (7)$$

$$\left\{ x(1-x) + \frac{1}{4} \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2+s}{4} \frac{1-2x}{r} z\right)^{\gamma+1} \left(1 + \frac{u}{r}\right)^{(\gamma-1)(\nu-1)} - 1 \right] \right\} \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{4r^2}{(2+s)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{2(1-2x)}{2+s} r \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{6+s-2\nu}{2(2+s)} (1-2x) z - \frac{4(\nu-1)}{(2+s)^2} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} - u \right) - \frac{\nu-1}{r+u} \left[\frac{2}{2+s} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} - u \right) + \frac{1-2x}{2} z \right]^2 = 0$$

Для решения системы (7) формально разлагаем искомые функции и одну из независимых переменных в ряд по степеням другой незави-

симой переменной, т. е. полагаем

$$\begin{aligned} u &= C\eta^{1+k}w^{(0)}(\xi) + C^2\eta^{1+2k}w^{(1)}(\xi) + \dots \\ z &= C\eta^{1+k}q^{(0)}(\xi) + C^2\eta^{1+2k}q^{(1)}(\xi) + \dots \\ x &= \xi + C\eta^k\varphi^{(1)}(\xi) + \dots \\ r &= \eta \end{aligned} \quad (8)$$

В разложениях (8) C — произвольная постоянная размерности $[см^{-k}]$, а все $w^{(n)}$, $q^{(n)}$, $\varphi^{(n)}$ — безразмерные функции нового безразмерного аргумента ξ . В дальнейшем будем опускать индексы у функций $w^{(0)}$, $q^{(0)}$ и $\varphi^{(1)}$, т. е. $w^{(0)} = w$, $q^{(0)} = q$, $\varphi^{(1)} = \varphi$.

Дифференцируя по x и r разложение x , найдем производные

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 1 - C\eta^k\varphi'(\xi) - \dots, \quad \frac{\partial \xi}{\partial r} = -Ck\eta^{k-1}\varphi(\xi) - \dots$$

При помощи этих равенств выразим производные по аргументам x, r через производные по новым аргументам ξ, η . Получим (штрих означает дифференцирование по ξ)

$$\frac{\partial}{\partial x} = (1 - C\eta^k\varphi' - \dots) \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial \eta} - (Ck\eta^{k-1}\varphi + \dots) \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (9)$$

Если преобразовать систему (7), пользуясь (8) и (9), т. е. перейти к новым переменным и произвести разложения по степеням η , то левые части уравнений (7) будут степенными рядами от η вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^{(n)}(\xi) \eta^{1+(n+1)k}$$

Приравнивая нулю коэффициенты при последовательных степенях η , получим обыкновенные дифференциальные уравнения для функций $w^{(n)}$, $q^{(n)}$. Система уравнений n -го приближения имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dw^{(n)}}{d\xi} - q^{(n)} &= f^{(n)} \\ \xi(1 - \xi) \frac{dq^{(n)}}{d\xi} + (1 - 2\xi) \left[\frac{1}{2} - \frac{2(n+1)k + \nu}{2+s} \right] q^{(n)} - \\ &\quad - \frac{4k(n+1)[(n+1)k + \nu]}{(2+s)^2} w^{(n)} = g^{(n)} \end{aligned} \quad (10)$$

Эта система линейна относительно функций $w^{(n)}$ и $q^{(n)}$, правая часть первого уравнения $f^{(n)}$ зависит только от $w^{(i)'}$, $\varphi^{(j)'}$, а $g^{(n)}$ — еще от $w^{(i)}$, $\varphi^{(j)}$, $q^{(i)}$, $q^{(i)'}$ ($0 \leq i \leq n-1$, $1 \leq j \leq n$) и непосредственно от ξ . Функции $\varphi^{(n)}(\xi)$ можно выбирать произвольно.

Для нулевого приближения $f^{(0)} = g^{(0)} \equiv 0$, и, следовательно, $q = w'$. Для системы первого приближения ($n = 1$), выполняя указанное разложение по η , найдем

$$f^{(1)} = w'\varphi', \quad g^{(1)} = P + Q\varphi + R\varphi' \quad (11)$$

Здесь P , Q и R — определенные функции от ξ , w , w' и w'' (при этом $q = w'$); они равны

$$\begin{aligned} P &= \frac{\gamma+1}{4} \frac{2+s}{4} (2\xi-1) w'w'' - \frac{1}{4} [(\gamma-1)(\nu-1) + (\gamma+1)(1+k)] ww'' + \\ &\quad + (\nu-1) \left[\frac{2k}{2+s} w + \frac{1-2\xi}{2} w' \right]^2 \end{aligned} \quad (12)$$

$$Q = \left(1 + \frac{2k}{2+s} \right) \left[(2\xi-1) w'' + \left(1 - \frac{6k+2\nu}{2+s} \right) w' \right], \quad R = \xi \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) w''$$

Очевидно, нулевое приближение для решений нелинейных уравнений, в котором принимается

$$u = C\eta^{1+k}w(\xi), \quad z = C\eta^{1+k}q(\xi), \quad x = \xi, \quad r = \eta$$

является точным решением линеаризованных уравнений. Такое линейное решение, описывающее отражение сходящейся волны, построено в [1]. Функция $w(\xi)$ удовлетворяет гипергеометрическому уравнению, получающемуся из системы (10) при $n = 0$.

До прихода возмущений ($\xi \leq 0$), в области 1 на фиг. 1, имеем, очевидно, $w = q \equiv 0$. Решение в области 2 ($0 \leq \xi \leq 1$) удовлетворяет начальным условиям $w(0) = 0$, $w'(0) = 1$, означающим, что на фронте сходящейся волны смещение непрерывно, а давление и скорость испытывают конечный скачок. Выполнение этих условий возможно лишь при

$$k = \frac{2+s}{4} - \frac{v}{2} > 0 \quad (s > 2(v-1)) \quad (13)$$

чем фиксируется величина k .

В области 3 ($1 \leq \xi \leq \infty$) решение должно удовлетворять граничным условиям, выражающим отсутствие источника или стока при $r = 0$ ($v(0, t) = 0$) и непрерывность смещения на отраженном фронте.

При указанных условиях решение нулевого приближения имеет вид (индекс внизу означает номер области)

$$\begin{aligned} w_2 &= \xi F(1-\varepsilon, \varepsilon; 2; \xi), & q_2 &= F(1-\varepsilon, \varepsilon; 1; \xi) \\ w_3 &= \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1+\varepsilon)\Gamma(2-2\varepsilon)} \xi^\varepsilon F(-\varepsilon, 1-\varepsilon; 2-2\varepsilon; \xi^{-1}) \\ q_3 &= \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon)\Gamma(2-2\varepsilon)} \xi^{\varepsilon-1} F(1-\varepsilon, 1-\varepsilon; 2-2\varepsilon; \xi^{-1}) \\ \varepsilon &= \frac{1}{2} - \frac{v}{2+s} > 0 \end{aligned} \quad (14)$$

где F — гипергеометрический ряд.

В рассматриваемом приближении смещение, скорость и давление как следует из (3), (6) и (8), выражаются через $w(\xi)$ следующим образом

$$\begin{aligned} u &= C\eta^{1+k}w, & v &= \frac{\partial u(r, t)}{\partial t} = C \frac{2+s}{4} \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\omega}} \eta^{k-s/2} w' \\ p - p_0 &= -\gamma p_0 C \frac{2+s}{4} \eta^k \left[(1-2\xi) w' + \left(1 + \frac{2v}{2+s}\right) w \right] \end{aligned} \quad (15)$$

Вычислим скачок давления $(\Delta p)_0$ на фронте сходящейся волны (при $\xi = 0$). Учитывая, что $w(0) = 0$, $w'(0) = 1$, из (15) найдем ¹

$$(\Delta p)_0 = -\gamma p_0 C \frac{2+s}{4} \eta^k \quad (16)$$

Так как в ударной волне происходит сжатие и $(\Delta p)_0 > 0$, то нужно считать $C < 0$.

Найдем разложение решений (14) в окрестности точки $\xi = 1$ (фронт отраженной волны). Для этого воспользуемся формулой [5] аналитического продолжения гипергеометрического ряда при специальном соот-

¹ К такому же закону изменения давления на фронте сходящейся волны (при том же k) приводит формула геометрической акустики: $\Delta p = \text{const} (\rho c r^{1-v})^{1/2}$, где c — скорость звука [4].

ношении между его параметрами

$$F(\alpha, \beta; \alpha + \beta + m; z) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(\alpha + \beta + m)}{\Gamma(\alpha + m)\Gamma(\beta + m)} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(1-m)_n n!} (1-z)^n +$$

$$+ \frac{(z-1)^m \Gamma(\alpha + \beta + m)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha + m)_n (\beta + m)_n}{(n+m)! n!} [h_n - \ln(1-z)] (1-z)^n \quad (17)$$

$(-\pi < \arg(1-z) < \pi; \alpha, \beta \neq 0, -1, \dots; m = 0, 1, 2, \dots)$

В формуле (17) приняты обозначения

$$h_n = \psi(n+1) + \psi(n+m+1) - \psi(\alpha+n+m) - \psi(\beta+n+m)$$

$$\psi(x) = d \ln \Gamma(x) / dx, \quad (\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1), \quad (\alpha)_0 = 1$$

и при $m = 0$ первое слагаемое в правой части (17) нужно считать равным нулю.

Представляя гипергеометрические ряды (14), согласно формуле (17), найдем искомые разложения:

$$w_{2,3} = AB^{-1} + A(1-\xi) \ln|1-\xi| + O(1-\xi) \quad (18)$$

$$w_{2,3}' = q_{2,3} = -A \ln|1-\xi| - AD_{2,3} + O[(1-\xi) \ln|1-\xi|]$$

$$w_{2,3}'' = A(1-\xi)^{-1} + AB \ln|1-\xi| + O(1)$$

В соотношениях (18) в области 2 нужно брать коэффициент D_2 , в области 3 — D_3 , а A и B одинаковы в обеих областях и равны

$$A = \frac{1}{\pi} \cos \frac{\pi v}{2+s} > 0, \quad B = \frac{1}{4} - \left(\frac{v}{2+s}\right)^2 > 0 \quad (19)$$

$$D_2 = 2E + \psi\left(\frac{1}{2} - \frac{v}{2+s}\right) + \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{v}{2+s}\right), \quad D_3 = 2E + 2\psi\left(\frac{1}{2} + \frac{v}{2+s}\right)$$

Здесь $E = 0.577\dots$ — постоянная Эйлера. На основании известного тождества [6] для логарифмической производной гамма-функции Эйлера $\psi(x)$ получим

$$D_3 - D_2 = \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{v}{2+s}\right) - \psi\left(\frac{1}{2} - \frac{v}{2+s}\right) = \pi \operatorname{tg} \frac{\pi v}{2+s} \quad (20)$$

Подставляя разложения (18) в формулы (12), найдем разложения функций P, Q, R вблизи точки $\xi = 1$

$$P = -\frac{(\gamma+1)(2+s)}{16} A^2 \frac{\ln|1-\xi|}{1-\xi} + \frac{G}{1-\xi} + O(\ln^2|1-\xi|) \quad (21)$$

$$Q = \left(\frac{3}{2} - \frac{v}{2+s}\right) \frac{A}{1-\xi} + O(\ln|1-\xi|), \quad R = A + O[(1-\xi) \ln|1-\xi|]$$

$$G_{2,3} = -\frac{(\gamma+1)(s+2)}{16} A^2 D_{2,3} - \left[(\gamma-1)(v-1) + (\gamma+1) \frac{6+s-2v}{4}\right] \frac{A^2}{4B}$$

Коэффициент G , как видно из последнего равенства, имеет различные значения в областях 2 и 3.

Построенное линейное решение имеет при $\xi = 1$ особенность, которой не должно быть у точного решения нелинейных уравнений и которая приводит к неограниченности скорости и давления на отраженном фронте. Как видно из уравнений (10), функции $w^{(n)}, q^{(n)}$ ($n = 1, 2, \dots$), вообще говоря, также имеют особенности в точке $\xi = 1$, и поэтому

высшие приближения могут ухудшить решение нулевого приближения. Идея метода Пуанкаре — Лайтхилла — Го заключается в понижении этих особенностей за счет выбора функций $\varphi^{(n)}$.

Правая часть $g^{(1)}$ уравнений первого приближения ($n=1$) при $\varphi(\xi) \equiv 0$ имеет в точке $\xi=1$ особенность, характер которой определяется разложением P из формул (21). Ее можно понизить, как следует из (11), (12) и (21), принимая функцию φ в областях 2 и 3 равной

$$\begin{aligned} \varphi_{2,3}(\xi) &= -\Phi A^{-1} w'_{2,3} + BA^{-1}(T_{2,3} - \Phi D_{2,3}) w_{2,3} = \\ &= \Phi \ln|1-\xi| + T_{2,3} + O[(1-\xi)\ln|1-\xi|] \end{aligned} \quad (22)$$

Постоянные Φ , T_2 и T_3 определяются из условия равенства нулю коэффициентов при первых двух членах разложения $g^{(1)}$, т. е. при членах порядка $(1-\xi)^{-1} \ln|1-\xi|$ и $(1-\xi)^{-1}$. Таким образом, получим

$$\Phi = \frac{(\gamma+1)(s+2)^2 A}{8(6+3s-2\nu)} > 0, \quad T_{2,3} = \frac{(\gamma+1)(s+2)^3 A}{4(6+3s-2\nu)^2} - \frac{2(2+s)G_{2,3}}{(6+3s-2\nu)A} \quad (23)$$

Если φ задано формулами (22), (23), то функции $f^{(1)}$ и $g^{(1)}$ будут порядка $f^{(1)} = O[(1-\xi)^{-1} \ln|1-\xi|]$, $g^{(1)} = O(\ln^2|1-\xi|)$, а решения уравнений первого приближения $w^{(1)}$ и $q^{(1)}$ имеют порядки $w^{(1)} = O(\ln^2|1-\xi|)$, $q^{(1)} = O(\ln^2|1-\xi|)$. Следовательно, отношение решений первого и нулевого приближений в разложении (8) равно

$$\frac{C^2 \eta^{1+2k} w^{(1)}}{C \eta^{1+k} w} = \eta^k O(\ln^2|1-\xi|), \quad \frac{C^2 \eta^{1+2k} q^{(1)}}{C \eta^{1+k} q} = \eta^k O(\ln|1-\xi|)$$

Ниже будет показано, что решения имеют физический смысл не при всех ξ , а лишь при $|1-\xi| > a\eta^k$ (a — положительная постоянная), и поэтому написанные отношения даже на отраженном фронте стремятся к 0 при $\eta \rightarrow 0$.

Поэтому в дальнейшем ограничимся в разложениях (8) для u и z одним первым членом, а для x — двумя первыми членами. В этом приближении решение построено, так как функции w , q и φ найдены. Когда разность $(1-\xi)$ не близка к нулю, то это решение мало отличается от линейного при $\eta \rightarrow 0$, так как x близко к ξ , а функции w и q непрерывны при $\xi \neq 1$.

Связь между x и ξ при ξ , близком к 1, как следует из (8) и (22), дается формулой

$$1-x = 1-\xi - C\eta^k (\Phi \ln|1-\xi| + T_{2,3}) \quad (24)$$

Здесь при $\xi < 1$ нужно брать T_2 , а при $\xi > 1$ — величину T_3 . Зависимость $(1-x)$ от $(1-\xi)$ при малом фиксированном η изображена на фиг. 2; здесь принято $C < 0$, а при $C > 0$ на фиг. 2 нужно изменить направление координатных осей. Величина $(1-x)$ имеет максимум при $1-\xi = C\Phi\eta^k < 0$ и стремится к $-\infty$ при $\xi \rightarrow 1$.

В решении, имеющем физический смысл, ξ должно быть однозначной функцией x и η (т. е. r и t). В противном случае w и q , зависящие от ξ , также будут неоднозначными функциями от x и r , что приведет вследствие формул (15) к неоднозначности смещения, скорости и давления как функций координат и времени.

Чтобы однозначная зависимость ξ от x имела место, нужно перейти с одной ветви кривой (24) на другую, как показано на фиг. 2. Тогда $1 - \xi$ будет монотонно возрастающей разрывной функцией от $1 - x$; при $x = x_*$ она испытывает скачок от $1 - \xi_3 < 0$ до $1 - \xi_2 > 0$, а значений между $1 - \xi_3$ и $1 - \xi_2$ она вообще не принимает. Очевидно, для однозначной зависимости $1 - \xi$ от $1 - x$ должно выполняться условие

$$1 - \xi_3 < C\Phi\eta^k$$

Положение скачка полностью определяется величинами ξ_2 и ξ_3 ; они, как и вся кривая на фиг. 2, зависят от η . Одно (алгебраическое) уравнение, связывающее ξ_2 и ξ_3 , найдем из условия, что $1 - x$ имеет одно и то же значение, равное $1 - x_*$, при $\xi = \xi_2$ и при $\xi = \xi_3$. Из (24) получим

$$(1 - \xi_2) - (1 - \xi_3) - C\eta^k \left[\Phi \ln \left| \frac{1 - \xi_2}{1 - \xi_3} \right| + (T_2 - T_3) \right] = 0 \quad (25)$$

Для нахождения второго уравнения заметим, что разрыв у функции $\xi(x, \eta)$ означает разрыв (скачок) физических величин на отраженном фронте. Подставляя разложения (18) в формулы (15), можно убедиться, что условия непрерывности смещения и сохранения импульса на фронте отраженной волны, т. е.

$$u_2 = u_3, \quad p_2 - p_3 = \sqrt{\gamma p_0 \omega r^s} (v_2 - v_3)$$

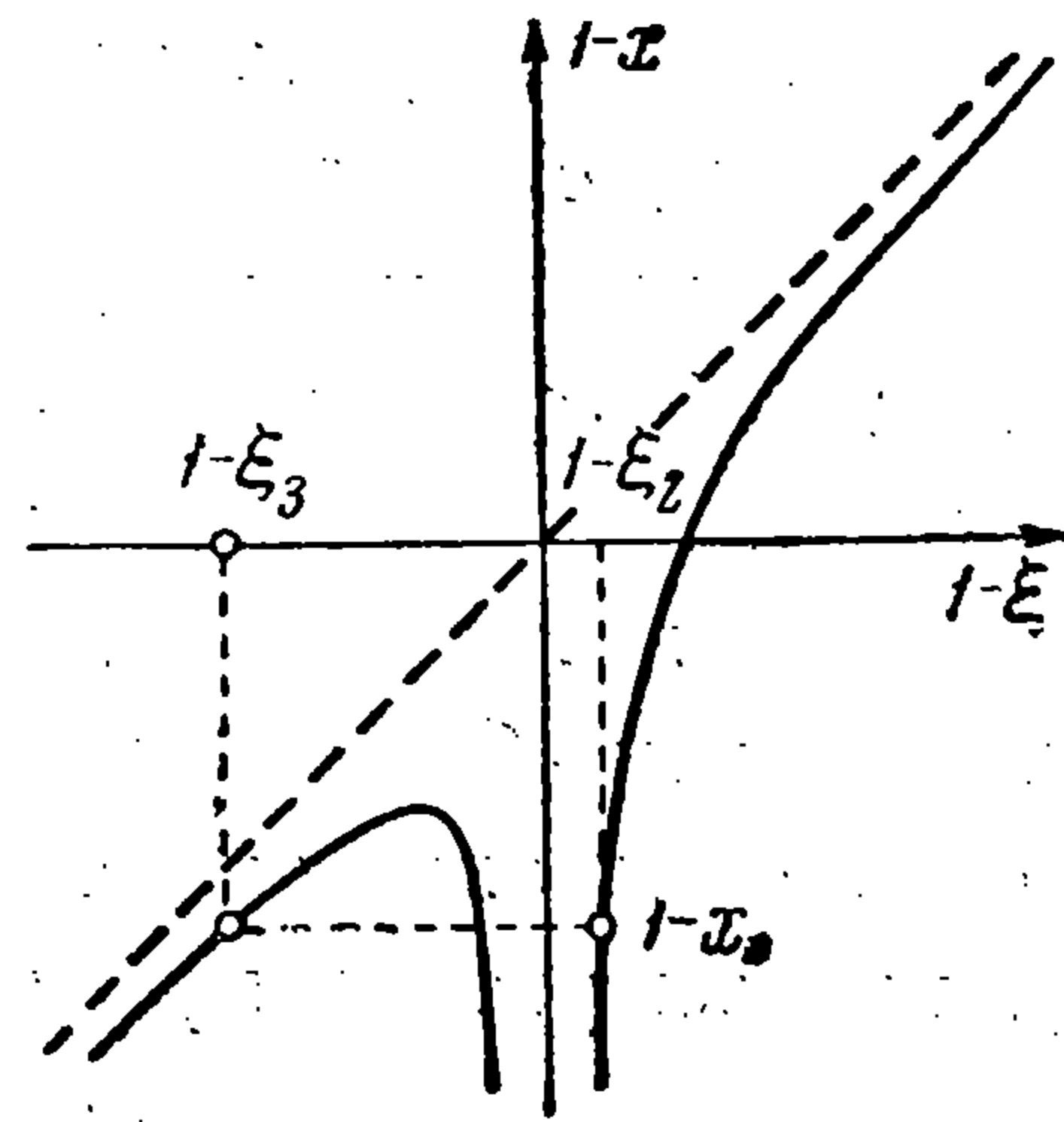
в нашем приближении выполняются автоматически.

На ударной волне должно еще быть выполнено условие, которое можно сформулировать (для слабого скачка) так: углы, образуемые траекторией волны в плоскости rt с характеристиками, равны по обе стороны волны [7]. Если $t_*(r)$ — траектория отраженного фронта, то из (5) приближенно получим

$$\begin{aligned} \frac{dt_*}{dr} = & \sqrt{\frac{\omega r^s}{\gamma p_0}} \left\{ 1 + \frac{\gamma + 1}{4} \left[\frac{\partial u_2(r, t)}{\partial r} + \frac{\partial u_3(r, t)}{\partial r} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{(\gamma - 1)(\nu - 1)}{4r} [u_2(r, t) + u_3(r, t)] \right\} \end{aligned}$$

В этом равенстве перейдем к переменным x, r и выразим t_* через x_* согласно (6). Затем подставим сюда разложения (8), ограничиваясь в них принятым приближением. Функции w и w' от аргументов ξ_2 и ξ_3 представим в виде (18), удерживая лишь главные члены, а x_* выразим через η и $\xi_2(\eta)$ по формуле (24). Получится дифференциальное уравнение, связывающее $\xi_2(\eta)$ и $\xi_3(\eta)$

$$\begin{aligned} & -2(1 - \xi_2) + 2 \left(1 + \frac{2k}{2 + s} \right) (\Phi \ln |1 - \xi_2| + T_2) C\eta^k + \\ & + \frac{4\eta}{2 + s} \left(\frac{C\Phi\eta^k}{1 - \xi_3} - 1 \right) \frac{d(1 - \xi_2)}{d\eta} = \left[(\gamma - 1)(\nu - 1) + \frac{\gamma + 1}{4} (6 + s - 2\nu) \right] \frac{A}{2B} C\eta^k + \\ & + \frac{(\gamma + 1)(s + 2)}{16} C\eta^k A [\ln |1 - \xi_2| + \ln |1 - \xi_3| + D_2 + D_3] \quad (26) \end{aligned}$$



Фиг. 2

Решение системы (25), (26) будем искать в форме

$$1 - \xi_2 = -\lambda C \Phi \eta^k, \quad 1 - \xi_3 = \mu C \Phi \eta^k, \quad \lambda > 0, \quad \mu > 0 \quad (C < 0) \quad (27)$$

где λ, μ — постоянные; при этом удовлетворяется естественное начальное условие $x_* = 1$ при $\eta = 0$, т. е. скачок в плоскости rt касается характеристики линейного уравнения.

Если выполнить подстановку (27), то члены вида $\eta^k \ln \eta$ в уравнении (26) взаимно уничтожатся, и после сокращения на η^k соотношения (25) и (26) дадут систему двух трансцендентных уравнений для чисел λ и μ (при преобразованиях используем значения констант из формул (19), (20), (21) и (23))

$$\lambda + \mu + \ln \frac{\lambda}{\mu} - \pi \operatorname{tg} \frac{\pi \nu}{2+s} = 0, \quad 2\lambda + 2 + \ln \frac{\lambda}{\mu} - \pi \operatorname{tg} \frac{\pi \nu}{2+s} = 0$$

Отсюда $\lambda = \mu - 2$, а для μ получим уравнение

$$2\mu - 2 + \ln \frac{\mu - 2}{\mu} - \pi \operatorname{tg} \frac{\pi \nu}{2+s} = 0 \quad (28)$$

Левая часть равенства (28) при $\mu > 2$ есть монотонно возрастающая функция μ , стремящаяся к $-\infty$ при $\mu \rightarrow 2 + 0$ и к $+\infty$ при $\mu \rightarrow +\infty$. Следовательно, уравнение (28) имеет единственный корень $\mu > 2$. При этом $1 - \xi_3 < C \Phi \eta^k$, $1 - \xi_2 > 0$, как и должно быть. Число μ легко найти численно при данных ν и s .

Итак, все решение, включая фронт отраженной волны, в рассматриваемом приближении полностью построено. Положение отраженного фронта определяется формулами (27); подставляя их в равенства (24) и (6), найдем уточненную траекторию скачка в плоскости rt

$$t_* = \frac{2\sqrt{\omega}}{(2+s)\sqrt{\gamma p_0}} r^{(2+s)/2} [1 + 2Ck\Phi r^k \ln r + O(r^k)]$$

Она изображена кривой L на фиг. 1.

Из равенства (27) и (15) получим смещение, скорость и давление вблизи отраженного фронта

$$u = CAB^{-1}r^{1+k} + O(r^{1+2k} \ln r)$$

$$v = -C \frac{2+s}{4} \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\omega}} Akr^{k-s/2} \ln r + O(r^{k-s/2})$$

$$p - p_0 = -\gamma p_0 C \frac{2+s}{4} Akr^k \ln r + O(r^k)$$

При помощи имеющихся формул можно найти и следующие (первые невыписанные) члены разложений t_* , v и p , в которые войдет число μ .

Скачок давления на фронте отраженной волны, согласно (15), в первом приближении равен

$$\Delta p = p_3 - p_2 = -\gamma p_0 C \frac{2+s}{4} r^k [w'(\xi_2) - w'(\xi_3)]$$

Разность в квадратных скобках вычислим, используя равенства (18) и (27), а также определенные выше значения констант, входящих в решение. Окончательно, сравнивая скачок давления в отраженной волне со скачком давления в сходящейся волне, определенным формулой (16),

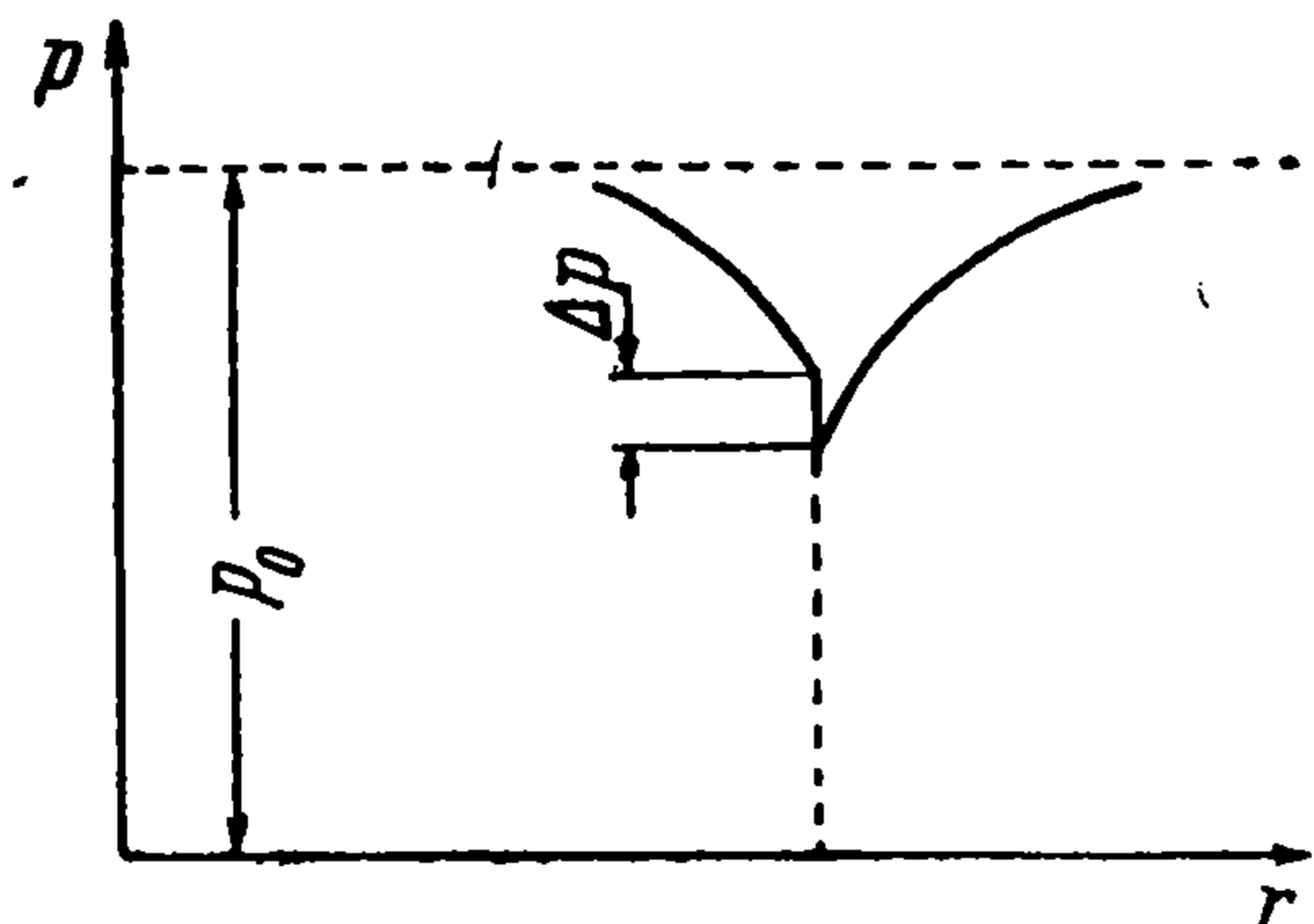
для их отношения при одном и том же r найдем

$$\sigma = \frac{\Delta p}{(\Delta p)_0} = \frac{2}{\pi} (\mu - 1) \cos \frac{\pi v}{2+s} > 0 \quad (29)$$

Отношение скачков скорости имеет такую же величину.

Из формулы (29) видно, что отраженная волна, как и сходящаяся, есть волна сжатая, и их интенсивности имеют одинаковый порядок малости по r , который выше порядка избыточного давления $p - p_0$ на отраженном фронте. Поведение p вблизи отраженного фронта в момент t , близкий к 0, изображено на фиг. 3.

Отметим, что если в построенном решении считать $C > 0$, и, следовательно, $\lambda < 0$, $\mu < 0$, то формально получится случай, когда сходящаяся волна является скачком разрежения. Решение уравнения (28) при $\mu < 0$ также существует и единственно, а $\sigma < 0$ (волна разрежения отражается как волна сжатия). Исключая μ из равенств (28) и (29), можно получить уравнение относительно σ



Фиг. 3

$$\frac{\pi}{2} \sec \frac{\pi v}{2+s} \sigma \operatorname{th} \left[\frac{\pi}{2} \sec \frac{\pi v}{2+s} \left(\sigma - \sin \frac{\pi v}{2+s} \right) \right] = 1$$

При любом $s > 2(v-1)$ это уравнение имеет два корня: положительный σ_+ (для $C < 0$) и отрицательный σ_- (для $C > 0$), причем оба корня монотонно возрастают с ростом $\pi v / (2+s)$ и $|\sigma_-| \leq \sigma_+ \leq 1$. Приводим значения σ_+ и σ_- для некоторых значений $v^* = [\pi v / (2+s)]^\circ$

$v^* = 0$	15	30	45	60	75	90
$\sigma_+ = 0.764$	0.837	0.896	0.941	0.974	0.993	1.0
$\sigma_- = -0.764$	-0.676	-0.574	-0.455	-0.319	-0.165	0.0

Итак, при отражении сходящихся волн в газе переменной плотности при $s > 2(v-1)$ движение вблизи $r = 0$, $t = 0$ представляет собой слабые возмущения. Однако, как показывает изложенное выше, некоторые важные количественные соотношения и качественные особенности явления можно установить лишь при учете нелинейных членов уравнений.

Пользуюсь случаем выразить глубокую благодарность С. С. Григоряну за ценные советы и указания.

Поступила 15.VII. 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Черноусько Ф. Л. Сходящиеся ударные волны в газе переменной плотности, ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 5.
2. Цянь Сюэ-сэнь. Метод Пуанкаре — Лайтхилла — Го. В сб. «Проблемы механики», ИИЛ, М., 1959, вып. 2.
3. Ландау Л. Д. Об ударных волнах на далеких расстояниях от места их возникновения. ПММ, 1945, т. IX, вып. 4.
4. Губкин К. Е. Распространение разрывов в звуковых волнах. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 4.
5. Higher Transcendental Functions, Vol. I, Mc Graw Hill Book Company, Inc., N. Y., Toronto, L., 1953.
6. Рыжик И. М., Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Гостехтеоретиздат, М.—Л., 1951.
7. Курант Р. и Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны. ИИЛ, М., 1950.