Прикладная математика и механика. Том XXV, 1961
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

УСЛОВИЯ НА ПОВЕРХНОСТЯХ СИЛЬНОГО РАЗРЫВА В МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СМЕСЯХ

Г. А. Тирский

(Москва)

Дифференциальные уравнения движения многокомпонентной сжимаемой вязкой теплопроводящей смеси выводятся в предположении, что гидродинамические и физико-химические характеристики в потоке непрерывно дифференцируемы [1-4].

В работе выводятся соотношения для многокомпонентных вязких теплопроводящих смесей с учетом эффектов термодиффузии и бародиффузии. Получены также соотношения на поверхностях разрыва (плотности, давления, скорости частиц, температуры, состава), в приближении теории пограничного слоя. Для однородной жидкости соотношения на сильных разрывах в приближении теории пограничного слоя были получены в работе [5]. В качестве примеров рассматриваются обтекание плоской пластины при просачивании жидкости сквозь ее поверхность с учетом испарения жидкой пленки и обтекание сублимирующей стенки в равномерном потоке газа.

§ 1. Вывод условий на поверхностях сильного разрыва в многокомпонентных вязких теплопроводящих смесях. При выводе условий на поверхностях разрыва будем исходить из уравнений движения многокомпонентной смеси, записанных в интегральной форме.

1. Уравнение сохранения массы i-й компоненты смеси

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V_i^*}\rho_i\,d\tau=\frac{dM_i}{dt}\qquad (i=1,\ldots,N)\tag{1.1}$$

где V_i^* — некоторый жидкий объем, движущийся с полем скоростей $\mathbf{v}_i$ (под $\mathbf{v}_i$ понимается статистически среднее значение скорости частицы i-й компоненты смеси относительно некоторой фиксированной системы координат), $\rho_i=n_i m_i$ — плотность i-й компоненты, n_i — число молей в единице объема, m_i — молярная масса i-й компоненты, N — число компонент в системе. Справа в уравнениях (1.1) стоит член, обусловленный возникновением массы i-й компоненты за счет химических реакций.

2. Если просуммировать уравнения (1.1) по индексу i и воспользоваться законом сохранения массы при химических реакциях, то получим уравнение сохранения массы смеси

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V^*}\rho\,d\tau=0\tag{1.2}$$

Здесь V^* — жидкий объем, совпадающий в рассматриваемый момент времени с объемами V_i^*, но движущийся с полем скорости

$$\mathbf{v}=\sum_{k=1}^{N}c_k\mathbf{v}_k\qquad\left(c_i=\frac{\rho_i}{\rho},\ \rho=\sum_{k=1}^{N}\rho_k\right)$$

где c_i — массовая концентрация i-й компоненты.

3. Уравнение сохранения количества движения

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V^*} \rho\mathbf{v}\,d\tau = \int\limits_{S} \mathbf{p}_n\,d\sigma \tag{1.3}$$

где $\mathbf{p}_n$—вектор напряжения на площадке, n—направление нормали к площадке, S — поверхность, ограничивающая подвижный объем V^*. Уравнение (1.3) написано в предположении, что внешние массовые силы отсутствуют.

4. Уравнение сохранения энергии

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V^*} \rho\left(e+\frac{v^2}{2}\right)d\tau = \int\limits_{S} \mathbf{p}_n\mathbf{v}\,d\sigma - \int\limits_{S} \mathbf{J}_q\mathbf{n}\,d\sigma \quad \left(e=\sum_{k=1}^{N} c_\text{к} e_\text{к}\right) \tag{1.4}$$

где e —внутренняя энергия единицы массы смеси, e_i — парциальная удельная внутренняя энергия i-й компоненты, $\mathbf{J}_q$ — вектор плотности потока тепловой энергии.

Если подынтегральные функции непрерывны, то из (1.1) — (1.4) получаются дифференциальные уравнения движения многокомпонентной смеси. Пусть Σ — изолированная кусочно-гладкая поверхность разрыва, движущаяся с нормальной скоростью D и целиком лежащая внутри объема V, совпадающего в рассматриваемый момент времени с объемом V^*, но движущегося вместе с поверхностью Σ. Тогда для любой интегрируемой функции $A(x, y, z, t)$ имеет место равенство

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V} A\,d\tau = \frac{d}{dt}\int\limits_{V^*} A\,d\tau + \int\limits_{S} A\,(D-v_n)\,d\sigma \tag{1.5}$$

Замечая, что при стягивании объема V к поверхности Σ левая часть формулы (1.5) стремится к нулю равномерно [6] относительно времени t получим, применяя формулу (1.5) к уравнениям (1.1)—(1.4),

$$\rho_1 c_{i1}(D-v_{in,1}) = \rho_2 c_{i2}(D-v_{in,2}) \qquad (i=1,\ldots,N) \tag{1.6}$$

$$\rho_1(D-v_{n1}) = \rho_2(D-v_{n2}) \tag{1.7}$$

$$\rho_1(D-v_{n1})\mathbf{v}_1 + \mathbf{p}_{n1} = \rho_2(D-v_{n2})\mathbf{v}_2 + \mathbf{p}_{n2} \tag{1.8}$$

$$\rho_1(D-v_{n1})\left(e_1+\tfrac{1}{2}v_1^2\right) + (\mathbf{p}_{n1}\mathbf{v}_1) - (\mathbf{J}_q\mathbf{n})_1 = \tag{1.9}$$
$$=\rho_2(D-v_{n2})\left(e_2+\tfrac{1}{2}v_2^2\right) + (\mathbf{p}_{n2}\mathbf{v}_2) - (\mathbf{J}_q\mathbf{n})_2$$

Если в уравнения (1.6) ввести плотности массовых потоков

$$J_i = \rho_i(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}) = \rho_i\mathbf{V}_i, \qquad \mathbf{V}_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}$$

то уравнения (1.6) перепишутся в виде

$$\rho_1 c_{i1}(D-v_{n1}) - \mathbf{J}_{in,1} = \rho_2 c_{i2}(D-v_{n2}) - \mathbf{J}_{in,2} \qquad (i=1,\ldots,N) \tag{1.10}$$

Соотношение (1.7) является следствием (1.10); заметим, что при выводе не делалось предположений о свойствах конкретной среды.

В отличие от соотношений на сильных разрывах в однородной среде [6] соотношения (1.7) — (1.10) содержат $N-1$ добавочных уравнений, выражающих закон сохранения массы каждой компоненты. Кроме того, вектор плотности теплового потока здесь зависит не только от градиента температуры, но и, вообще говоря, от локальных градиентов концентраций и давления [3,4]. Выражения для векторов $\mathbf{J}_i$ ($i=1,\ldots,N$) и $\mathbf{J}_q$

через макроскопические величины и физико-химические параметры смеси могут быть получены или из термодинамики необратимых процессов [3,4] для произвольных смесей или из кинетической теории неоднородных газов, находящихся в неравновесном состоянии [3]. Оба вывода дают одинаковые результаты:

$$J_i = \frac{n^2}{\rho}\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} m_i m_k D_{ik}\left[\nabla c_i^* + c_i(\rho v_i - 1)\nabla \ln p\right] - D_i^T \nabla \ln T \qquad (i=1,\ldots,N) \tag{1.11}$$

$$\mathbf{J}_q = -\lambda\nabla T + \frac{p}{n^2}\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{n_i D_k^T}{m_k \mathcal{D}_{ki}}(\mathbf{V}_k - \mathbf{V}_i) + \sum_{k=1}^{N} h_k \mathbf{J}_k \tag{1.12}$$

$$\left(n = \sum_{k=1}^{N} n_k,\ c_i^* = \frac{n_i}{n} = \frac{m}{m_i}c_i,\ m = \frac{\rho}{n} = \sum_{k=1}^{N} c_k^* m_k = \left(\sum_{k=1}^{N}\frac{c_k}{m_k}\right)^{-1},\ \sum_{k=1}^{N} D_k^T = 0\right)$$

Здесь c_i^* — молярная концентрация; m — средняя молярная масса смеси; D_{ik} — многокомпонентные коэффициенты диффузии, которые на основании кинетической теории в первом приближении выражаются через $^1/_2 N(N-1)$ бинарных диффузионных коэффициентов $\mathcal{D}_{ik}$ различных пар компонентов и состав смеси; λ — коэффициент теплопроводности смеси; D_i^T — многокомпонентные термодиффузионные коэффициенты, h_i и v_i — парциальные удельная энтальпия и объем i-й компоненты.

Для жидкой смеси (растворы, смеси газов) выражение для вектора напряжения $\mathbf{p}_n$ в (1.8) совпадает с выражением, получаемым в гидродинамике однородной жидкости, если не учитывать влияние химических реакций на тензор напряжения. Коэффициенты D_{ik}, D_i^T, λ и μ зависят от давления, температуры и состава смеси, в дальнейшем они считаются известными функциями характеристик смеси.

Для бинарной совершенной смеси, содержащей компоненты i и j, выражения (1.11) и (1.12) приобретают особенно простой вид

$$\mathbf{J}_i = -\mathbf{J}_j = -\rho\mathcal{D}_{ij}\left(\nabla c_i + \alpha_p c_i c_j \nabla \ln p + \frac{m_i m_j}{m^2}\alpha_T c_i c_j \nabla \ln T\right) \tag{1.13}$$

$$\mathbf{J}_q = -\lambda\nabla T + \alpha_T\frac{p}{\rho}\mathbf{J}_i + (h_i - h_j)\mathbf{J}_i \qquad \alpha_p = (m_j - m_i)\left(\frac{c_i}{m_i} + \frac{c_j}{m_j}\right), \tag{1.14}$$

$$c_i + c_j = 1$$

Здесь α_T — термодиффузионная постоянная;

Если не делать никаких ограничений о порядке величин градиентов макроскопических физических величин (температура, состав), то при числе Рейнольдса, стремящемся к бесконечности, соотношения (1.7)—(1.10) перейдут в соотношения на ударных волнах в идеальной (невязкой нетеплопроводящей) смеси, состоящей из N компонент

$$\rho_1 c_{i1}(D - v_{n1}) = \rho_2 c_{i2}(D - v_{n2}) \qquad (i = 1,\ldots,N) \tag{1.15}$$

$$\rho_1(D - v_{n1}) = \rho_2(D - v_{n2}) \tag{1.16}$$

$$\rho_1(D - v_{n1})\mathbf{v}_1 - p_1\mathbf{n} = \rho_2(D - v_{n2})\mathbf{v}_2 - p_2\mathbf{n} \tag{1.17}$$

$$\rho_1(D - v_{n1})\left(e_1 + \frac{1}{2}v_1^2\right) - p_1 v_{n1} = \rho_2(D - v_{n2})\left(e_2 + \frac{1}{2}v_2^2\right) - p_2 v_{n2} \tag{1.18}$$

Получим в приближении теории пограничного слоя ($R \to \infty$) соотношения на поверхностях сильного разрыва.

Пусть $S(x, y, z) = 0$ — уравнение поверхности обтекаемого тела. Относительно функции S будем предполагать, что она — аналитическая регулярная функция такая, что поверхность $S = 0$ в каждой своей точке имеет не нулевые главные радиусы кривизны. Если в качестве координатной сети x, z на поверхности $S = 0$ взять линии кривизны, то система параллельных поверхностей к поверхности $S = 0$ и семейство развертывающихся поверхностей, образованных нормалями к поверхности $S = 0$ вдоль координатных линий x и z, образуют триортогональную систему поверхностей [7]. Линейную координату вдоль нормали будем обозначать через y. В этой триортогональной криволинейной системе координат получим соотношения (1.7) — (1.10) при $R \sim O(l/\delta)^2$, где l — характерная длина, δ — толщина пограничного слоя. Опуская выкладки, приведем результаты

$$[\rho c_i (D + u \operatorname{tg} \beta + w \operatorname{tg} \gamma - v) - J_{iy}] = O\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right) \qquad (i = 1, \ldots, N) \tag{1.19}$$

$$[\rho (D + u \operatorname{tg} \beta + w \operatorname{tg} \gamma - v)] = O\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right) \tag{1.20}$$

$$[p] = O\left(\frac{1}{R}\right) \tag{1.21}$$

$$\left[\rho (D + u \operatorname{tg} \beta + w \operatorname{tg} \gamma - v) u + \mu \frac{\partial u}{\partial y}\right] = O\left(\frac{1}{R}\right) \tag{1.22}$$

$$\left[\rho (D + u \operatorname{tg} \beta + w \operatorname{tg} \gamma - v) w + \mu \frac{\partial w}{\partial y}\right] = O\left(\frac{1}{R}\right) \tag{1.23}$$

$$\left[\rho (D + u \operatorname{tg} \beta + w \operatorname{tg} \gamma - v)\left(e + \frac{u^2 + w^2}{2}\right) + p (u \operatorname{tg} \beta + w \operatorname{tg} \gamma - v) + \right.$$
$$\left. + \mu \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u^2 + w^2}{2}\right) - J_{qy}\right] = O\left(\frac{1}{R}\right) \tag{1.24}$$

или, если ввести энтальпию смеси $h = e + p / \rho$, (1.25)

$$\left[\rho (D + u \operatorname{tg} \beta + w \operatorname{tg} \gamma - v)\left(h + \frac{u^2 + w^2}{2}\right) + \mu \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u^2 + w^2}{2}\right) - J_{qy}\right] = O\left(\frac{1}{R}\right)$$

Здесь и в дальнейшем квадратные скобки обозначают разрыв заключенных в них величин; β — угол в плоскости $z = \mathrm{const}$ между касательной к поверхности разрыва в некоторой ее точке и касательной к контуру тела в точке с тем же значением координаты x; γ — угол в плоскости $x = \mathrm{const}$ между касательной к поверхности разрыва в некоторой ее точке и касательной к контуру в точке с той же координатой z

$$J_{iy} = \frac{n^2}{\rho} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{N} m_i m_k D_{ik} \frac{\partial c_i^*}{\partial y} - D_i^T \frac{\partial \ln T}{\partial y} \tag{1.26}$$

$$J_{qy} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{p}{n^2} \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{n_i D_k^T}{m_k \mathscr{D}_{ki}} (V_{ky} - V_{iy}) + \sum_{k=1}^{N} h_k J_{ky} \tag{1.27}$$

Следует отметить, что в приближении теории пограничного слоя эффект бародиффузии выпадает из выражений (1.26) и (1.27). Для бинарной совершенной смеси выражения для J_{iy} и J_{qy}, входящие в (1.19) (1.24) и (1.25), приобретают особенно простой вид

$$J_{iy} = -J_{jy} = -\rho \mathscr{D}_{ij} \left(\frac{\partial c_i}{\partial y} + \frac{m_i m_j}{m^2} \alpha_T c_i c_j \frac{\partial \ln T}{\partial y}\right) \tag{1.28}$$

$$J_{qy} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} + \alpha_T \frac{p}{\rho} J_{jy} + (h_i - h_j) J_{iy} \tag{1.29}$$

Для однородной жидкости соотношения (1.19) — (1.25) переходят в известные соотношения для плоскопараллельного движения [5].

Для неоднородной вязкой и теплопроводной жидкости одних соотношений (1.19) — (1.25) недостаточно для однозначного перехода через поверхность разрыва. Этот факт для однородной жидкости отмечался в работе [5]. Для однозначного перехода через поверхность разрыва нужно налагать дополнительные условия.

Для достаточно плотной вязкой теплопроводящей смеси естественно предположить равенство тангенциальных составляющих к поверхности разрыва скорости частиц смеси и равенство температур по обе стороны поверхности разрыва. При $R \to \infty$ эти условия принимают вид

$$u_1 = u_2, \qquad w_1 = w_2, \qquad T_1 = T_2 \tag{1.30}$$

Что касается дополнительных соотношений для состава на поверхности разрыва, то они могут быть различными и определяются физической природой поверхности разрыва. Из теоретических исследований [8] и многочисленных экспериментальных результатов (см., например, [9]) следует, что процесс испарения в потоке газа протекает по диффузионной кинетике, т. е. парциальное давление паров на поверхности испарения равно давлению насыщения при температуре поверхности. Следовательно, дополнительной связью при испарении будет кривая упругости паров в зависимости от температуры

$$p_i = f(T) \tag{1.31}$$

где p_i — парциальное давление паров на испаряющейся поверхности и T — температура поверхности. Если приближенно считать скрытую теплоту испарения l не зависящей от температуры, то [10]

$$p_i = \exp\left(-\frac{l}{RT} + a\right) \tag{1.32}$$

где a — константа для данного материала. Вместо (1.31) удобно иметь связь между массовой концентрацией c_i и T на поверхности испарения. Используя равенство $c_i^* = p_i / p$, получим

$$c_i = m_i \left[\frac{p}{f(T)} - 1\right]^{-1} \sum_{k \neq i}^{N} \frac{c_k}{m_k} \tag{1.33}$$

где p — статическое давление смеси на поверхности испарения (в приближении теории пограничного слоя $\partial p / \partial y = 0$ и $p = p_\infty$ — давление вне пограничного слоя).

При некоторых условиях, которые можно определить только после решения задачи с испарением, упругость паров в некоторых участках на поверхности испарения может достигнуть внешнего давления p_∞. Тогда на этих участках начнется кипение и дополнительным условием на поверхности разрыва на этих участках будет

$$p_i = p_\infty \tag{1.34}$$

Так как внешнее давление переменно вдоль поверхности разрыва, то в силу (1.31) и (1.34) вдоль кипящей поверхности температура будет также переменной.

При сублимации некоторых материалов, например графита, интенсивное испарение начинается при некоторой характерной для данного материала температуре T_* (при температуре поверхности, меньшей чем T_*, испарением можно пренебречь). В этом случае в качестве дополнительного условия наряду с (1.30) следует выставить условие $T_1 = T_2 = T_*$. Состав на поверхности сублимации в этом случае определится в процессе решения.

При резком изменении внешнего давления вдоль контура тела в тех точках тела, где давление больше, чем давление в тройной точке фазовой диаграммы, но меньше, чем давление в критической точке, тело при достаточно больших тепловых потоках, со стороны газа будет плавиться с испарением (или даже с кипением) жидкой пленки; при малых тепловых потоках — сублимировать. В тех же точках, где давление меньше, чем давление в тройной точке, тело будет только сублимировать. Следовательно, в общем случае на поверхности тела будут образовываться линии, разграничивающие области плавления с испарением и области сублимации. Положение этих линий заранее неизвестно и должно находиться в процессе решения задачи. Из-за предположений (1.30) соотношения (1.22)—(1.25) значительно упрощаются

$$\left[\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right] = O\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right), \qquad \left[\mu \frac{\partial w}{\partial y}\right] = O\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right) \tag{1.35}$$

$$[\rho (D + u \operatorname{tg} \beta + w \operatorname{tg} \gamma - v) e - pv - J_{qy}] = O\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right) \tag{1.36}$$

или

$$[\rho (D + u \operatorname{tg} \beta + w \operatorname{tg} \gamma - v) h - J_{qy}] = O\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right) \tag{1.37}$$

Выпишем в качестве примера совокупность окончательных условий, определяющих однозначный переход через поверхность испарения жидкой фазы, обтекаемой смесью газов. Комбинируя условия (1.19), (1.20) и (1.37), получим

$$\begin{gathered}
\rho (D + u \operatorname{tg} \beta + w \operatorname{tg} \gamma - v)(1 - c_i) + J_{iy} = 0 \\
\rho c_k (D + u \operatorname{tg} \beta + w \operatorname{tg} \gamma - v) - J_{ky} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, N) \\
\rho (D + u \operatorname{tg} \beta + w \operatorname{tg} \gamma - v) = \rho_1 (D + u_1 \operatorname{tg} \beta + w_1 \operatorname{tg} \gamma - v_1) \\
p = p_1, \qquad \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial y}, \qquad \mu \frac{\partial w}{\partial y} = \mu_1 \frac{\partial w_1}{\partial y} \\
\rho (D + u \operatorname{tg} \beta + w \operatorname{tg} \gamma - v) l - \frac{p}{n^2} \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} \frac{n_l D_k^T}{m_k \mathcal{D}_{kl}} (V_{ky} - V_{ly}) = \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} - \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \\
u = u_1, \qquad w = w_1, \qquad T = T_1, \qquad c_i = m_i \left(\frac{p}{f(T)} - 1\right)^{-1} \sum_{k \neq i}^{N} \frac{c_k}{m_k}
\end{gathered} \tag{1.38}$$

Здесь величины без индекса относятся к газовой смеси на поверхности испарения, величины с индексом 1 — к жидкой фазе на поверхности испарения, индекс i — к компоненте пара. Непосредственный подсчет числа условий (1.38) убеждает, что их достаточно для однозначного перехода через поверхность испарения.

Из условий (1.7)—(1.10) могут также быть получены условия совместности на поверхности горения в многокомпонентных смесях при дополнительных предположениях о кинетике на фронте горения.

§ 2. **Пример 1.** Рассмотрим обтекание плоской пластины при просачивании жидкости сквозь ее поверхность с учетом испарения пленки.

Пусть через поверхность пластины, обтекаемой равномерным плоскопараллельным потоком газа, подается жидкость, образующая вдоль пластины тонкую пленку, увлекаемую внешним потоком. Если внешний поток представляет нагретый газ, то жидкая пленка будет интенсивно испаряться и тем самым уменьшать тепловой поток, идущий к стенке (заградительное охлаждение). Решение этой задачи сводится к решению системы уравнений пограничного слоя для бинарной смеси газ - пар во внешнем потоке

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho_1 u_1) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_1 v_1) = 0, \qquad \rho_1\left(u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)$$

$$\rho_1\left(u_1 \frac{\partial c}{\partial x} + v_1 \frac{\partial c}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_1 \mathscr{D}_{12} \frac{\partial c}{\partial y}\right) \tag{2.1}$$

$$\rho_1\left(u_1 \frac{\partial H_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial H_1}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\mu}{P}\left[\frac{\partial H_1}{\partial y} + (P_1 - 1)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u_1^2}{2}\right) + \left(\frac{1}{L} - 1\right)\left(h^{(1)} - h^{(2)} \frac{\partial c}{\partial y}\right)\right]\right\}$$

$$H_1 = h_1 + \frac{u_1^2}{2}, \qquad p_\infty = R\rho_1 T_1\left(\frac{c}{m_1} + \frac{1-c}{m_2}\right)$$

$$\left(P_1 = \frac{\mu c_p}{\lambda} \text{ — число Прандтля, } L = \frac{\lambda}{\rho c_p D_{12}} \text{ — число Льюиса}\right)$$

уравнений пограничного слоя для жидкой пленки

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho_2 u_2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_2 v_2) = 0, \qquad \rho_2\left(u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + v_2 \frac{\partial u_2}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial y}\right), \qquad p_2 = p_2(\rho_2, T_2) \tag{2.2}$$

$$\rho_2\left(u_2 \frac{\partial H_2}{\partial x} + v_2 \frac{\partial H_2}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\mu_2}{P_2}\left[\frac{\partial H_2}{\partial y} + (P_2 - 1)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u^2}{2}\right)\right]\right\}, H_2 = h_2 + \frac{u_2^2}{2}$$

Эти системы уравнений должны быть решены при следующих краевых условиях:

1) на бесконечности в потоке

$$u_1 = u_\infty, \qquad c = c_\infty, \qquad h_1 = h_\infty \tag{2.3}$$

2) на поверхности испарения ($D = 0$)

$$\rho_1 (u_1 \operatorname{tg}\beta - v_1)(1 - c_0) - \rho_1 \mathscr{D}_{12} \frac{\partial c}{\partial y} = 0, \qquad \mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} = \mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial y}$$

$$\rho_1 (u_1 \operatorname{tg}\beta - v_1) = \rho_2 (u_2 \operatorname{tg}\beta - v_2), \qquad u = u_1, \qquad T_1 = T_2 = T_0 \tag{2.4}$$

$$\rho_1 l(T_0)(u_1 \operatorname{tg}\beta - v_1) = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} - \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial y}, \quad c_0 = \left[1 + \left(\frac{p_\infty}{f(T_0)} - 1\right)\frac{m_2}{m_1}\right]^{-1}$$

3) на пористой пластине

$$u_2 = 0, \qquad v_2 = \frac{\rho_\infty}{2\rho_2}\left(\frac{\nu_\infty u_\infty}{x}\right)^{1/2} B, \qquad H_2 = h_w \tag{2.5}$$

Здесь индекс ∞ относится к значениям параметров вне пограничного слоя, индекс 1 — к бинарному потоку в пограничном слое, индекс 2 — к пленке, индекс 0 — к неизвестным до решения задачи значениям концентрации и температуры на поверхности испарения, индекс w — к значениям величин на стенке, u и v — компоненты скорости, по осям x и y соответственно вдоль пластины и по нормали к ней, c — концентрация пара, $h^{(1)}$ и $h^{(2)}$ — парциальные удельные энтальпии соответственно пара и газа, m_1 и m_2 — молярные массы, соответственно пара и газа, B — заданная безразмерная постоянная, связанная с массовым расходом Q_c жидкости сквозь поверхность пластины длиной l по формуле

$$B = \frac{Q_c}{\rho_\infty u_\infty l}\sqrt{R}, \qquad R = \frac{u_\infty l \rho_\infty}{\mu_\infty} \tag{2.6}$$

При постановке этой задачи сделаны следующие предположения: движение пленки и бинарной смеси над пленкой ламинарно; внешние массовые силы отсутствуют; эффект термодиффузии мал и может быть опущен по сравнению с обычной диффузией в уравнении диффузии и по сравнению с теплопроводностью в уравнении энергии. Подача жидкости сквозь пластину происходит по специальному закону

$$v_2(x, 0) \sim x^{-1/2}$$

Если, кроме того, сделать предположение, что $P_1 = P_2 = L = 1$, то легко заметить, что уравнение диффузии и уравнение энергии допускают следующие интегралы

$$c = \alpha + \beta u_1, \quad h_1 \equiv ch^{(1)} + (1 - c)\, h^{(2)} = \alpha_1 + \beta_1 u_1 - \tfrac{1}{2} u_1^2, \quad h_2 = \alpha_2 + \beta_2 u_2 - \tfrac{1}{2} u_2^2 \qquad (2.7)$$

где α, β — постоянные интегрирования. Первые два интеграла являются прямым обобщением интеграла Крокко на бинарный поток.

Рассматривая далее для простоты вычислений этот случай, будем искать решение систем уравнений (2.1), (2.2) в виде

$$\rho_i u_i = \varphi_i'(\eta), \qquad \rho_i v_i = {}^1/_2 \left(\frac{\nu_\infty}{u_\infty x}\right)^{1/2} [\eta\varphi_i'(\eta) - \varphi_i(\eta)], \qquad h_i = \alpha_i + \beta_i u_i - \frac{u_i^2}{2} \quad (i = 1, 2)$$

$$c = \alpha + \beta u_1(\eta), \qquad \eta = \left(\frac{u_\infty}{\nu_\infty x}\right)^{1/2} y \qquad (2.8)$$

Здесь плотность и компоненты скорости u и v отнесены, соответственно, к ρ_∞ и u_∞, энтальпии h_i $(i = 1, 2)$ отнесены к u_∞^2. Подставляя выражения (2.8) в уравнения (2.1), (2.2) и краевые условия (2.3)—(2.5), придем к следующей краевой задаче:

$$\frac{d}{d\eta}\left(\mu_i \frac{du_i}{d\eta}\right) + \frac{\varphi_i}{2} \frac{du_i}{d\eta} = 0, \qquad \rho_i u_i = \varphi_i'(\eta) \qquad (i = 1, 2) \qquad (2.9)$$

$$u_1(\infty) = 1, \qquad \varphi_1(\eta^*) = \varphi_2(\eta^*), \qquad u_1 = u_2 = u^*, \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{2}\left(\frac{\nu_\infty}{u_\infty x}\right)^{1/2} \eta^*$$

$$\left(\mu \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)_1 = \left(\mu \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)_2, \qquad u_2(0) = 0, \qquad \varphi_2(0) = -B$$

$$\frac{\varphi_1(\eta^*)}{2} (1 - c_0)(1 - u^*) = \left(\mu \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)_1 (c_\infty - c_0), \qquad c_0 = \psi(T_0) \qquad (2.10)$$

$$l(T_0) \frac{\varphi_1(\eta^*)}{2} = \left(\mu \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)_1 \left[\frac{h_{20} - h_w - {}^1/_2 u^{*2}}{u^*} - \frac{h_\infty - h_0^{(2)} + {}^1/_2(1 - u^*)^2 + c_\infty(h_0^{(2)} - h_0^{(1)})}{1 - u^*}\right]$$

Здесь скрытая теплота испарения $l(T_0)$ измеряется в величинах u_∞^2, μ — в величинах μ_∞, $c_0 = \psi(T_0)$ — краткая запись кривой упругости пара.

Каждое из уравнений (2.9) имеет третий порядок (так как $\rho_i u_i = \varphi_i'$) и, кроме того, неизвестными являются четыре величины: η^*, u^*, c_0 и T_0. Соотношения (2.10) и дают как раз десять условий. После того как эта краевая задача будет решена, поля концентрации и энтальпий будут определяться из формул

$$c = \frac{c_0 - c_\infty u^*}{1 - u^*} + \frac{c_\infty - c_0}{1 - u^*} u \qquad (2.11)$$

$$h_1 = \frac{h_{10} - u^* h_\infty - {}^1/_2 u^* (1 - u^*)}{1 - u^*} + \frac{h_\infty - h_{10} + {}^1/_2 (1 - u^{*2})}{1 - u^*} u_1 - \frac{u_1^2}{2} \qquad (2.12)$$

$$h_2 = h_w + \frac{h_{20} - h_w + {}^1/_2 u^{*2}}{u^*} u_2 - \frac{u_2^2}{2} \qquad (2.13)$$

Для решения задачи (2.9)—(2.10) введем новую искомую функцию $\omega = \mu \partial u / \partial \eta$, а в качестве независимой переменной [11,12] возьмем u. Тогда в новых переменных будем иметь следующую краевую задачу:

$$\frac{d^2\omega_i}{du_i^2} + \rho_i \mu_i \frac{u_i}{2\omega_i} = 0 \qquad (i = 1, 2) \qquad (2.14)$$

$$\omega_1(1) = 0, \qquad \omega_1(u^*) = \omega_2(u^*), \qquad \omega_2'(u^*) = \omega_2'(u^*), \qquad \omega_2'(0) = {}^1/_2 B$$

$$\omega_1'(u^*)(1 = c_0)(1 - u^*) = \omega_1(u^*)(c_0 - c_\infty), \qquad c_0 = \psi(T_0)$$

$$\omega_1'(u^*)\, l(T_0) = \omega_1(u^*)\, A(T_0, u^*) \qquad (2.15)$$

где

$$A(T_0, u^*) = \frac{h_\infty - h_0^{(2)} + {}^1/_2 (1 - u^{*2}) + c_\infty (h_0^{(2)} - h_0^{(1)})}{1 - u^*} - \frac{h_{20} - h_w - {}^1/_2 u^{*2}}{u^*}$$

Система двух уравнений второго порядка (2.14) с неизвестными тремя параметрами u^*, c_0 и T_0 в граничных условиях (2.15) должна решаться при семи условиях (2.15). Следовательно, можно ожидать, что решение задачи определится однозначно. Для упрощения решения примем, что величина $\rho_i\mu_i$ постоянна в каждой из областей. Не нарушая общности, можно положить

$$\rho_1\mu_1 = 1, \qquad \rho_2\mu_2 = K^2$$

Решение задачи будем искать в виде

$$\omega_1 = \omega^\circ{}_C(u), \qquad \omega_2 = K\alpha\omega_{\gamma_2}(\alpha^{-2/3}u)$$

Здесь $\omega^\circ{}_C(u)$ — однопараметрическое семейство решений уравнения $2\omega\omega''+u=0$, определенное при $u<1$ и удовлетворяющее условию $\omega_C{}^\circ(1)=0$, $\omega_{\gamma_2}(u)$ — решение задачи Коши:

$$2\omega\omega'' + u = 0, \qquad \omega_{\gamma_2}(0) = 1, \qquad \omega_{\gamma_2}{}'(0) = \operatorname{tg}\gamma_2$$

(оба семейства решений $\omega_C{}^\circ$ и ω_{γ_2} изучены в работе [5]); α — произвольный параметр, подлежащий дальнейшему определению. При таком выборе функции ω_1 краевое условие $\omega_1(1)=0$ удовлетворяется автоматически. Остальные условия (2.15) дают систему шести трансцендентных уравнений

$$\omega_C{}^\circ(u^*) = K\alpha\omega_{\gamma_2}(\alpha^{-2/3}u^*), \qquad \omega_C{}^{\circ\prime}(u^*) = K\alpha^{1/3}\omega_{\gamma_2}{}'(\alpha^{-2/3}u^*),\ K\alpha^{1/3}\operatorname{tg}\gamma_2 = \frac{1}{2}B \quad (2.16)$$

$$\frac{\omega_C{}^{\circ\prime}(u^*)}{\omega_C{}^\circ(u^*)} = \frac{c_0 - c_\infty}{(1-c_0)(1-u^*)}, \qquad \frac{\omega_C{}^{\circ\prime}(u^*)}{\omega_C{}^\circ(u^*)} = \frac{A(T_0, u^*)}{l(T_0)}, \qquad c_0 = \psi(T_0)$$

для определения шести неизвестных величин: C, u^*, α, γ_2, c_0 и T_0. Функции $\omega_C{}^\circ(u)$, не обращающиеся в нуль между 0 и 1, даются формулой

$$\omega_C{}^\circ(u) = u_0{}^{-3/2}\omega_{\gamma_1}(uu_0), \qquad \omega_C{}^{\circ\prime}(u) = u_0{}^{-1/2}\omega_{\gamma_1}{}'(uu_0)$$

где $u_0(\gamma_1)$ — нули функций $\omega_{\gamma_1}(u)$. Поэтому для этих функций параметром C служит угол γ_1 ($C=\gamma_1$) и

$$\frac{\omega_C{}^{\circ\prime}(u^*)}{\omega_C{}^\circ(u^*)} = u_0\frac{\omega_{\gamma_1}{}'(u^*u_0)}{\omega_{\gamma_1}(u^*u_0)}$$

Значения функций $\omega_{\gamma_1}(u)$ и $u_0(\gamma_1)$ заимствованы из работы [5] в виде таблицы, которая дополнена значениями производных $\omega_{\gamma_1}{}'(u)$.

Для больших значений $\operatorname{tg}\gamma_1$ можно воспользоваться [5] асимптотическим представлением $\omega_{\gamma_1}(u)$, тогда получим

$$\omega_C{}^\circ(u) = X^{-3/2}\omega_0(uX), \qquad \omega_C{}^{\circ\prime}(u) = X^{-1/2}\omega_0{}'(uX), \qquad X = 2.608 \quad (2.17)$$

где $\omega_0(u)$ — решение задачи Коши

$$2\omega\omega'' + u = 0, \qquad \omega(0) = 0, \qquad \omega'(0) = 1$$

Соответствующее отношение

$$\frac{\omega_C{}^{\circ\prime}(u^*)}{\omega_C{}^\circ(u^*)} = X\frac{\omega_0{}'(u^*X)}{\omega_0(u^*X)}$$

При больших $\operatorname{tg}\gamma_1$ не зависит от параметра γ_1. Функции $\omega_C{}^\circ(u)$, имеющие второй нуль в (0, 1), равны

$$\omega_C{}^\circ(u) = \omega_\xi{}^\circ(u) \qquad (C = \xi)$$

где функции $\omega_\xi{}^\circ$ — решения краевой задачи

$$2\omega\omega'' + u = 0, \qquad \omega(\xi) = 0, \qquad \omega(1) = 0, \qquad (0 \leqslant \xi \leqslant 1)$$

и таблицы этих функций приведены в работе [5]. Так как при $\gamma_1 = \pi/2$ и $\xi = 0$ интегральные кривые совпадают между собою, то вместо функций $\omega_0{}^\circ(u)$ и $\omega_0{}^{\circ\prime}(u)$ можно пользоваться функциями (2.17).

Непосредственное определение параметров C, u^*, α, γ_2, c_0 и T_0 из системы (2.16) для каждой совокупности заданных параметров связано со значительными вычислениями. Однако если к системе (2.16) применить полуобратный метод решения, то систему (2.16) можно без труда разрешить последовательно. Действительно, зададимся величиной u^* (примерное значение безразмерной скорости u^* на поверхности испарения можно взять равным значению u^* без учета испарения из работы [5]). Тогда из последних трех уравнений (2.16) сразу находим значения c_0, T_0 и C. Зная u^* и C, из первых двух уравнений (2.16) графическим способом находим α и γ_2. Третье соотношение даст значение параметра вдува B, соответствующее заданному значению u^* и заданным значениям параметров задачи. Две-три попытки в задании u^* приводят к нужному значению B.

Аналогично можно разрешить систему (2.16), если задавать c_0 (концентрацию на поверхности испарения). После того как система уравнений (2.16) будет разрешена, из формул (2.11)—(2.13) находятся поля концентраций и энтальпий, коэффициент трения

$$c_f\sqrt{R_x} = 2\omega_2(0) = 2K\alpha, \qquad R_x = \frac{u_\infty x\rho_\infty}{\mu_\infty}$$

и тепловой поток q_w к пластине

$$\frac{q_w\sqrt{R_x}}{\rho_\infty u_\infty} = K\alpha\,\frac{h_{20} - h_w + {}^1/_2 u^{*2}u_\infty^2}{u^*}$$

где $h_{20} - h_w$ — размерная разность энтальпий жидкости на поверхности испарения и на стенке.

§ 3. Пример 2. Рассмотрим сублимацию плоской стенки в равномерном потоке газа. Пусть вдоль теплопроводящей стенки движется равномерный поток газа со скоростью u_∞. Тогда если статическое давление p_∞ меньше, чем давление в тройной точке фазовой диаграммы материала стенки, то в зависимости от параметров набегающего потока и условий теплообмена на тыльной стороне стенки поверхность стенки, обращенная к газу, будет сублимировать (испаряться, минуя жидкое состояние) или, наоборот, пары материала стенки из потока (если таковые имеются) будут конденсироваться сразу в твердую фазу. Если координату x отсчитывать вдоль стенки, а координату y — по нормали к стенке, то эта задача сведется к решению системы уравнений нестационарного (ввиду изменения границы стенки) бинарного пограничного слоя и уравнения теплопроводности в стенке

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0, \qquad \rho\frac{du}{dt} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right), \qquad \rho\frac{dc}{dt} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho\mathcal{D}_{12}\frac{\partial c}{\partial y}\right) \tag{3.1}$$

$$\rho\frac{dH}{dt} = \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\mu}{P}\left[\frac{\partial H}{\partial y} + (P-1)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u^2}{2}\right) + \left(\frac{1}{L} - 1\right)\left(h^{(1)} - h^{(2)}\right)\frac{\partial c}{\partial y}\right]\right\}$$

$$\rho_1 c_1\frac{\partial T_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_1\frac{\partial T_1}{\partial y}\right) \tag{3.2}$$

со следующими условиями:

1) на бесконечности в потоке

$$u = u_\infty, \qquad h = h_\infty, \qquad c = c_\infty \tag{3.3}$$

2) на неизвестной заранее поверхности сублимации

$$\rho(D - v)(1 - c_0) = \rho\mathcal{D}_{12}\frac{\partial c}{\partial y}, \qquad \rho(D - v) = \rho_1 D, \qquad u = 0, \qquad T = T_1 = T_0$$

$$\rho(D - v)\,l(T_0) = \lambda_1\frac{\partial T_1}{\partial y} - \lambda\frac{\partial T}{\partial y}, \qquad c_0 = \psi(T_0) \tag{3.4}$$

3) на бесконечности в стенке

$$T_1 = T_{-\infty} \tag{3.5}$$

Здесь индекс 1 относится к параметрам стенки, индекс 0 — к параметрам на поверхности сублимации, которые до решения задачи неизвестны. Остальные обозначения совпадают с обозначениями § 2.

При написании уравнения теплопроводности в теле (3.2) сделано предположение, что толщина теплового пограничного слоя в теле достаточно мала по сравнению с характерной длиной стенки, так что в уравнении теплопроводности производными по координате x можно пренебречь по сравнению с производными по y.

Кроме условий (3.3) — (3.5) следует выписать начальные условия задачи.

Если ограничиться частным случаем $P = L = 1$ и интересоваться температурой поверхности сублимации, то решение подобной задачи может быть получено при некоторых предположениях в замкнутом виде. Сделаем основное предположение: скорость перемещения поверхности сублимации D зависит только от координаты x и не зависит от времени, т. е. в каждой точке поверхности устанавливается свой стационарный режим сублимации, зависящий от x. Ниже будет показано, при каких условиях это предположение выполняется. Тогда решение уравнений диффузии энергии и уравнения теплопроводности с учетом краевых условий (3.3)—(3.5) будет

$$c = c_0 + (c_\infty - c_0)\frac{u(\eta)}{u_\infty}, \qquad h = h_0 + (H_\infty - h_0)\frac{u(\eta)}{u_\infty} - \frac{1}{2}u^2(\eta) \tag{3.6}$$

$$T_1 = T_{-\infty}\theta_1(\eta_1), \quad \eta = \sqrt{\frac{u_\infty}{v_\infty x}}(y - Dt), \quad \eta_1 = \frac{D}{\chi_1}(y - Dt), \quad \chi_1 = \frac{\lambda_1(T_{-\infty})}{\rho_1(T_{-\infty})c_1(T_{-\infty})}$$

где функция $\theta_1(\eta_1)$ есть решение краевой задачи

$$\frac{d}{d\eta_1}\left[L_1(\theta_1)\frac{d\theta_1}{d\eta_1}\right] + N(\theta_1)\frac{d\theta_1}{d\eta_1} = 0, \qquad \theta_1(0) = \frac{T_0}{T_{-\infty}} = n, \qquad \theta_1(\infty) = 1 \qquad (D < 0) \tag{3.7}$$

которая двумя квадратурами интегрируется до конца [13]

$$\eta_1 = \int\limits_{\theta_1}^{n} \frac{L(\theta_1)\,d\theta_1}{M(\theta_1) - M(1)}, \qquad \frac{d\theta_1}{d\eta_1} = \frac{M(1) - M(\theta_1)}{L(\theta_1)} \tag{3.8}$$

где

$$\lambda_1(T_1) = \lambda_1(T_{-\infty})L(\theta_1), \qquad \rho_1(T_1)c_1(T_1) = \rho_1(T_{-\infty})c_1(T_{-\infty})N(\theta_1)$$

$$M(\theta_1) = \int N(\theta_1 d\theta_1)$$

В решении (3.6) величины с индексом 0 неизвестны и должны определяться из условий (3.4), которые дают два трансцендентных уравнения

$$\frac{c_0 - c_\infty}{1 - c_0} = \frac{H_\infty - h_0^{(2)} + c_\infty(h_0^{(2)} - h_0^{(1)})}{l(T_0) + c_1(T_{-\infty})T_{-\infty}[M(n) - M(1)]}, \qquad c_0 = \psi(T_0) \tag{3.9}$$

для определения концентрации c_0 и температуры T_0 на поверхности сублимации. Из системы (3.9) следует, что температура испаряющейся поверхности приближается к температуре кипения только при $H_\infty \to \infty$, т. е. при бесконечно больших тепловых потоках со стороны газа.

Покажем теперь, при каких условиях полученное выше решение справедливо. Будем искать решение задачи (3.1)—(3.5) в виде (нормальная скорость перемещения поверхности сублимации не зависит от времени)

$$\rho u = \varphi_\eta'(\eta, t), \qquad \rho v = \frac{1}{2}\left(\frac{\nu_\infty}{u_\infty x}\right)^{1/2}\left[\eta\varphi_\eta' - \varphi(\eta, t) + \frac{\rho}{\rho_1}\varphi(0, t)\right]$$

$$\rho_1 D = \frac{1}{2}\left(\frac{\nu_\infty u_\infty}{x}\right)^{1/2}\varphi(0, t) \tag{3.10}$$

Здесь скорости u и v и плотности ρ и ρ_1 измерены соответственно в величинах u_∞ и ρ_∞. Подстановка выражений (3.10) в уравнение движения дает

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\mu}{\mu_\infty}\frac{\partial u}{\partial\eta}\right) + \frac{\varphi}{2}\frac{\partial u}{\partial\eta} = \frac{\rho}{2\rho_1}\varphi(0,\tau)\frac{\partial u}{\partial\eta} + \rho x'\frac{\partial u}{\partial\tau} + \frac{\tau}{4x'\rho_1}\varphi(0, \tau)\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} \tag{3.11}$$

где $\tau = u_\infty t / l$. Первым членом справа в этом уравнении можно пренебречь, так как для всех конденсированных сред $\rho / \rho_1 \sim 10^{-5} \div 10^{-4}$. Второй член справа также мал, так как характерное время l / u_∞ для не очень малых скоростей мало. Это приближение соответствует физически очевидному факту: локальное ускорение, обусловленное перемещением поверхности сублимации, мало по сравнению с конвективным ускорением.

Последний член в уравнении (3.11) мал только для достаточно малых начальных моментов времени. Однако ввиду того, что он содержит множителем малое число $1 / \rho_1 \sim 10^{-5} \div 10^{-4}$, эти начальные моменты времени, при которых последний член справа в (3.11) может быть опущен, практически могут достигать нескольких десятков секунд. В силу этих приближений из (3.11) получается уравнение Блазиуса

$$\frac{d}{d\eta}\left(\mu' \frac{du}{d\eta}\right) + \frac{\varphi}{2} \frac{du}{d\eta} = 0 \qquad \left(\mu' = \frac{\mu}{\mu_\infty}\right) \tag{3.12}$$

Легко показать, что уравнение неразрывности удовлетворяется с тем же приближением, если в него подставить выражения (3.10). Краевые условия (3.3)—(3.4) удовлетворяются точно и дают

$$u(\infty) = 1, \qquad u(0) = 0, \qquad \frac{\varphi(0)}{2}(1 - c_0) = (c_\infty - c_0)\,\mu' \frac{du}{d\eta}$$

$$\frac{\varphi(0)}{2}\left\{l(T_0) + c_1(T_{-\infty})\,T_{-\infty}[M(n) - M(1)]\right\} = -\mu' \frac{du}{d\eta}[H_\infty - h_0^{(2)} + c_\infty(h_0^{(2)} - h_0^{(1)})] \tag{3.13}$$

$$c_0 = \psi(T_0)$$

Следовательно, при выполнении перечисленных выше предположений, при которых можно пренебречь правой частью в уравнении (3.11), существует решение задачи о сублимации стенки с постоянной скоростью перемещения поверхности сублимации, зависящей только от координаты x $(D \sim 1/\sqrt{x})$.

u	$\omega_{15°}$	$\omega'_{15°}$	u	$\omega_{45°}$	$\omega'_{45°}$	u	ω_0	ω'_0
0	1.00	0.2679	0.8	1.768	0.8941	0	0	1.00
0.1	1.027	0.2655	1.0	1.942	0.8457	0.1	0.098	0.949
0.2	1.053	0.2583	1.2	2.106	0.7915	0.2	0.190	0.897
0.3	1.078	0.2466	1.4	2.258	0.7320	0.3	0.277	0.844
0.4	1.102	0.2305	1.6	2.398	0.6676	0.4	0.359	0.789
0.5	1.124	0.2103	1.8	2.525	0.5986	0.5	0.435	0.732
0.6	1.144	0.1861	2.0	2.637	0.5251	0.6	0.505	0.674
0.7	1.161	0.1580	2.2	2.735	0.4469	0.7	0.570	0.614
0.8	1.175	0.1259	2.4	3.816	0.3641	0.8	0.629	0.551
0.9	1.183	0.0899	2.6	2.880	0.2764	0.9	0.680	0.487
1.0	1.193	0.0500	2.8	2.925	0.1833	1.0	0.725	0.420
1.1	1.196	0.0060	3.0	2.952	0.0847	1.1	0.763	0.350
1.11	1.197	0.00	3.16	2.950	0.00	1.2	0.794	0.276

u	$\omega_{30°}$	$\omega'_{30°}$	u	$\omega_{60°}$	$\omega'_{60°}$
0	1.00	0.5774	0	1.00	1.732
0.2	1.115	0.5684	0.5	1.858	1.698
0.4	1.226	0.5431	1.0	2.685	1.618
0.6	1.332	0.5043	1.5	3.466	1.517
0.8	1.429	0.4538	2.0	4.192	1.404
1.0	1.506	0.3936	2.5	4.860	1.280
1.2	1.581	0.3238	3.0	5.462	1.147
1.4	1.640	0.2431	3.5	5.997	1.005
1.6	1.683	0.1529	4.0	6.458	0.855
1.8	1.707	0.0526	4.5	6.842	0.695
1.88	1.708	0.00	5.0	7.143	0.525

u	ω_0	ω'_0
1.3	0.818	0.199
1.4	0.834	0.117
1.5	0.842	0.031
1.55	0.843	0.00

$\gamma°$	$u_0(\gamma)$	$u^{-3/2}(\gamma)$
—90	0	∞
—75	0.25	8.51
—60	0.52	2.67
—45	0.83	1.32
—30	1.20	0.762
—15	1.60	0.494
0	2.08	0.334
15	2.73	0.222
30	3.80	0.135
45	5.75	0.0725
60	11.0	0.0274
$\gamma \to \frac{\pi}{2}$	$u_0 = 2.608\,\mathrm{tg}^2\gamma$	0.00

u	$\omega_{45°}$	$\omega'_{45°}$	u	$\omega_{60°}$	$\omega'_{60°}$
0	1.00	1.00	5.5	7.357	0.344
0.2	1.198	0.9917	6.0	7.477	0.150
0.4	1.395	0.9690	6.38	7.50	0.00
0.6	1.585	0.9357	—	—	—

Для решения этой задачи введем новую переменную $\omega = \mu' du / d\eta$ и в качестве независимой переменной возьмем безразмерную скорость u, тогда из (3.12) и (3.13) получим

$$\frac{d^2\omega}{du^2} + \rho\mu \frac{u}{2\omega} = 0, \qquad \omega(1) = 0, \qquad \omega'(0)(1 - c_0) = (c_0 - c_\infty)\,\omega(0) \tag{3.14}$$

$$\omega'(0)\{l(T_0) + c_1(T_{-\infty})\,T_{-\infty}[M(n) - M(1)]\} = \omega(0)\,[H_\infty - h_0^{(2)} + c_\infty(h_0^{(2)} - h_0^{(1)})]$$

$$c_0 = \psi(T_0)$$

Решение этой задачи будет ($\rho\mu = 1$)

$$\omega(u) = u_0^{-3/2}\omega_\gamma(uu_0), \qquad \eta = \int_0^u \frac{\mu}{\omega(u)}\,du$$

$$u_0 \operatorname{tg}\gamma = \frac{c_0 - c_\infty}{1 - c_0}, \qquad u_0 \operatorname{tg}\gamma = \frac{H_\infty - h_0^{(2)} + c_\infty(h_0^{(2)} - h_0^{(1)})}{l(T_0) + c_1(T_{-\infty})\,T_{-\infty}[M(n) - M(1)]}, \quad c_0 = \psi(T_0) \tag{3.15}$$

где функция $u_0(\gamma)$ вычислена в работе [5] и приведена в таблице. Из трех последних уравнений для каждой совокупности заданных параметров легко определяются c_0, T_0 и угол γ. Зная γ по таблицам, находим u_0 и затем профиль скорости $u(\eta)$.

Поля концентраций и температур как в газе, так и в теле будут определяться тогда по формулам (3.6). Коэффициент трения находится из формулы

$$c_f \sqrt{R_x} = 2\omega(0) = 2u_0^{-3/2}(\gamma) \tag{3.16}$$

Значения функции $u_0^{-3/2}(\gamma)$ приведены в таблице. При больших тепловых потоках со стороны газа $\operatorname{tg}\gamma \to \infty$. Используя тогда асимптотическое представление функции $u_0(\gamma) = 2.608 \operatorname{tg}^2\gamma$, получим для коэффициента трения сильно сублимирующей стенки простую формулу

$$c_f \sqrt{R_x} = 0.475 (\operatorname{tg}\gamma)^{-3} = 1.238 \frac{1 - c_0}{c_0 - c_\infty}$$

Из этой формулы видно, что при приближении к кипению коэффициент трения стремится к нулю. Этот эффект уменьшения коэффициента трения от увеличения интенсивности испарения аналогичен эффекту уменьшения коэффициента сопротивления трения при вдуве в пограничный слой газа [14].

Поступила
22 VI 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Об общем виде уравнений кинетики химических реакций в газах. ДАН СССР, 1948, т. 60, № 1.
2. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. ГИТТЛ, М., 1954.
3. Hirschfelder J. O., Curtiss C. F., and Bird R. B. Molecular theory of gases and liquids. John Wiley and Sons Inc., New York, 1954.
4. Де Гроот С. Р. Термодинамика необратимых процессов. ГИТТЛ, М., 1956.
5. Черный Г. Г. Ламинарные движения газа и жидкости в пограничном слое с поверхностью разрыва. Изв. АН СССР, ОТН, 1954, № 12.
6. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. ГИТТЛ, М., 1950.
7. Гурса Э. Курс математического анализа, ОНТИ—НКТП СССР, М.— Л., 1936, т. 1.
8. Bauer E., and Zlotnick M. Evaporation into a Boundary layer. The physics of fluids, 1958, Vol. 1, num. 4.
9. Зубков В. И. Об испарении шариков твердых тел в потоке газа. ДАН СССР, 1958, т. 123, № 5.
10. Эпштейн П. С. Курс термодинамики. Гостехиздат, 1948.
11. Crocco. Atti di Guidonia. 1939, XVII, 7.
12. Дородницын А. А. Пограничный слой в сжимаемом газе. ПММ, 1942, т. VI, вып. 6.
13. Тирский Г. А. Два точных решения нелинейной задачи Стефана. ДАН СССР, 1959, т. 125, № 2.
14. Schlichting H., Buseman K. Exakte Lösungen für die laminare Reibungsschicht mit Absaugung und Ausblasen. Schriften d. dt. Ak. d. Luftfahrtforschung, 1943, Bd. 713, H. 2.