Прикладная математика и механика. Том XXV, 1961
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТОВ

В. В. Румянцев

(Москва)

Гиростатом называется [1] механическая система S, состоящая из твердого тела S_1 и связанных с ним не неизменно других тел S_2, изменяемых или твердых, движение которых относительно тела S_1 не меняет геометрию масс системы S.

Такими системами являются, например, твердое тело, с которым неизменно связаны оси нескольких (или одного) симметричных гироскопов, или твердое тело с полостью произвольной формы, полностью заполненной однородной жидкостью, и тому подобные системы.

Очевидно, что при заданном распределении масс гиростата в результате внутренних движений тел S_2 не изменяются ни положение центра тяжести, ни направления главных осей, ни моменты инерции гиростата по отношению к какой-либо точке твердого тела S_1.

В настоящей работе с помощью второго метода Ляпунова исследуется устойчивость некоторых движений тяжелых гиростатов с одной неподвижной точкой.

1. Пусть твердое тело S_1 имеет одну закрепленную точку O, которую примем за начало двух прямоугольных систем осей координат: неподвижной $O\xi\eta\zeta$ с вертикально вверх направленной осью $O\zeta$ и подвижной $Oxyz$, оси которой совмещены с главными осями инерции гиростата S для его неподвижной точки O.

По теореме о сложении скоростей вектор скорости какой-либо точки тела S_2 в его движении относительно системы координат $O\xi\eta\zeta$ равен геометрической сумме векторов переносной скорости этой точки (в ее движении вместе с телом S_1) и относительной скорости (в ее движении относительно тела S_1). Поэтому вектор момента количеств движения тела S_2 можно представить в виде геометрической суммы векторов момента количеств переносного движения и момента количеств относительного движения этого тела. В силу сказанного момент количеств движения гиростата относительно точки O представится в виде геометрической суммы $\mathbf{K}+\mathbf{k}$, где $\mathbf{K}$ — момент количеств движения всей системы S, рассматриваемой как одно твердое тело, и $\mathbf{k}$ — момент количеств относительного движения тела S_2. Проекции вектора $\mathbf{k}$ на оси x, y, z обозначим через k_1, k_2, k_3, а проекции вектора $\mathbf{K}$ на те же оси равны, соответственно,

$$K_1 = Ap, \qquad K_2 = Bq, \qquad K_3 = Cr$$

где A, B, C — главные моменты инерции гиростата S для его точки O, p, q, r — проекции на подвижные оси вектора $\boldsymbol{\omega}$ мгновенной угловой скорости тела S_1.

По теореме о моменте количеств движения получаем следующие уравнения движения тяжелого гиростата с одной неподвижной точкой

$$
\begin{aligned}
&A \frac{dp}{dt} + \frac{dk_1}{dt} + (C - B)\, qr + qk_3 - rk_2 = P\,(z_0\gamma_2 - y_0\gamma_3) \\
&B \frac{dq}{dt} + \frac{dk_2}{dt} + (A - C)\, rp + rk_1 - pk_3 = P\,(x_0\gamma_3 - z_0\gamma_1) \qquad (1.1) \\
&C \frac{dr}{dt} + \frac{dk_3}{dt} + (B - A)\, pq + pk_2 - qk_1 = P\,(y_0\gamma_1 - x_0\gamma_2)
\end{aligned}
$$

Здесь P обозначает вес гиростата, постоянные x_0, y_0, z_0 — координаты его центра тяжести; γ_1, γ_2, γ_3 — косинусы углов между вертикалью $O\zeta$ и подвижными осями x, y, z, удовлетворяющие уравнениям Пуассона:

$$
\frac{d\gamma_1}{dt} = r\gamma_2 - q\gamma_3, \qquad \frac{d\gamma_2}{dt} = p\gamma_3 - r\gamma_1, \qquad \frac{d\gamma_3}{dt} = q\gamma_1 - p\gamma_2 \qquad (1.2)
$$

Уравнений (1.1) и (1.2), вообще говоря, недостаточно для полного изучения движения тяжелого гиростата с одной неподвижной точкой. К ним должны быть присоединены еще уравнения относительного движения тела S_2, имеющие ту или иную форму в зависимости от вида тела S_2 и характера наложенных на него связей и действующих сил, внутренних для всей системы S. Например, если тело S_2 представляет собою однородную жидкость, полностью заполняющую полость твердого тела S_1, то уравнения относительного движения можно записать в форме гидродинамических уравнений Эйлера или уравнений Навье — Стокса и уравнения несжимаемости вместе с граничными условиями на стенках полости [6]; если тело S_2 представляет собою симметричный ротор с неподвижной относительно тела S_1 осью, то уравнение относительного движения будет иметь вид уравнения движения твердого тела с неподвижной осью, и т. д.

В случае, если вектор $\mathbf{k}$ заранее известен из условий задачи, т. е. k_i ($i = 1, 2, 3$) являются заданными функциями времени, или, в частности, постоянными, то уравнений (1.1) и (1.2) достаточно для изучения движения гиростата. Например, $k_i = \mathrm{const}$ в случае безвихревого движения идеальной жидкости, полностью заполняющей многосвязную полость тела S_1.

Возможно указать некоторые первые интегралы уравнений движения гиростата. Из теоремы живых сил в случае, если действующие на тело S_2 внутренние силы обладают силовой функцией U, а связи стационарны, можно получить интеграл живых сил

$$
\begin{aligned}
&Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2\,(pk_1 + qk_2 + rk_3) + \\
&+ 2\,(T_2 - U) + 2P\,(x_0\gamma_1 + y_0\gamma_2 + z_0\gamma_3) = \mathrm{const} \qquad (1.3)
\end{aligned}
$$

где T_2 обозначает кинетическую энергию тела S_2 в его относительном движении.

Если $k_i = \mathrm{const}$ ($i = 1, 2, 3$), то интеграл живых сил можно получить, пользуясь только уравнениями (1.1) и (1.2). В самом деле, умножим уравнения (1.1) на p, q, r, соответственно, и сложим их, тогда с учетом уравнений (1.2) немедленно получим первый интеграл

$$
Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2P\,(x_0\gamma_1 + y_0\gamma_2 + z_0\gamma_3) = \mathrm{const} \qquad (1.4)
$$

имеющий такой вид, как если бы гиростат S был одним твердым телом.

Умножим, далее, уравнения (1.1) на γ_1, γ_2, γ_3, соответственно, и сложим их, тогда с учетом уравнений (1.2) получим интеграл площадей

$$(Ap + k_1)\gamma_1 + (Bq + k_2)\gamma_2 + (Cr + k_3)\gamma_3 = \text{const} \tag{1.5}$$

В случае движения гиростата по инерции, когда $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, помимо интегралов вида (1.5) можно получить также интеграл постоянства момента количеств движения системы. С этой целью умножим уравнения (1.1), правые части которых теперь следует приравнять нулю, на $Ap + k_1$, $Bq + k_2$, $Cr + k_3$, соответственно, и сложим, после чего легко получим интеграл

$$(Ap + k_1)^2 + (Bq + k_2)^2 + (Cr + k_3)^2 = \text{const} \tag{1.6}$$

Попутно отметим, что в книге [1] на стр. 223 ошибочно утверждается, что интеграл постоянства момента количеств движения в случае, когда $K_i = \text{const}$, имеет вид

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = \text{const} \tag{1.7}$$

В этом легко убедиться, если взять производную по времени от левой части равенства (1.7) в силу уравнений (1.1) при $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, которая оказывается, вообще говоря, отличной от нуля.

Уравнения (1.2) допускают очевидный геометрический интеграл

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \tag{1.8}$$

2. Рассмотрим устойчивость перманентных вращений гиростата, движущегося по инерции ($x_0 = y_0 = z_0 = 0$), в случае, когда k_i ($i = 1, 2, 3$) — заданные постоянные.

Следует указать, что геометрическую интерпретацию движения гиростата в этом случае дал впервые Н. Е. Жуковский [2]. Подробное исследование перманентных вращений гиростата, движущегося по инерции, и изучение их устойчивости принадлежит Вольтерра [3]. Для исследования устойчивости мы применим прямой метод Ляпунова.

Пусть перманентная ось имеет неизменное положение в теле, определяемое ее направляющими косинусами α, β, γ в подвижных осях. Тогда проекции угловой скорости тела S_1 на подвижные оси будут равны

$$p_0 = \omega\alpha, \qquad q_0 = \omega\beta, \qquad r_0 = \omega\gamma \qquad (\omega = \text{const}) \tag{2.1}$$

При этом уравнения (1.1) принимают вид

$$\begin{aligned} &(C - B)\,\beta\gamma\omega^2 + \omega\,(\beta k_3 - \gamma k_2) = 0 \\ &(A - C)\,\gamma\alpha\omega^2 + \omega\,(\gamma k_1 - \alpha k_3) = 0 \\ &(B - A)\,\alpha\beta\omega^2 + \omega\,(\alpha k_2 - \beta k_1) = 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

и служат для определения соответствующей величины угловой скорости ω. Умножая их на k_1, k_2, k_3 соответственно и складывая, получим после сокращения на ω^2

$$(C - B)\,\beta\gamma k_1 + (A - C)\,\alpha\gamma k_2 + (B - A)\,\alpha\beta k_3 = 0 \tag{2.3}$$

В переменных α, β, γ это есть уравнение конуса второго порядка [1] с вершиной в неподвижной точке O. Уравнение (2.3) совпадает с уравнением конуса Штауде — Млодзеевского, если заменить k_i координатами центра тяжести x_0, y_0, z_0 тяжелого твердого тела [5].

Исследование устойчивости перманентных вращений гиростата можно выполнить путем построения функций Ляпунова, аналогично случаю одного твердого тела [4, 5]. Полагая в возмущенном движении

$$p = p_0 + \xi_1, \qquad q = q_0 + \xi_2, \qquad r = r_0 + \xi_3$$

легко видеть, что уравнения возмущенного движения допускают первые интегралы

$$\begin{aligned} V_1 &= A(\xi_1^2 + 2p_0\xi_1) + B(\xi_2^2 + 2q_0\xi_2) + C(\xi_3^2 + 2r_0\xi_3) = \text{const} \\ V_2 &= A^2(\xi_1^2 + 2p_0\xi_1) + B^2(\xi_2^2 + 2q_0\xi_2) + C^2(\xi_3^2 + 2r_0\xi_3) + \\ &\quad + 2(Ak_1\xi_1 + Bk_2\xi_2 + Ck_3\xi_3) = \text{const}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Функцию Ляпунова можно, например, построить в виде:

$$V = \lambda V_1 - V_2 = \frac{Ak_1}{p_0}\xi_1^2 + \frac{Bk_2}{q_0}\xi_2^2 + \frac{Ck_3}{r_0}\xi_3^2 \tag{2.5}$$

де в силу уравнений (2.2)

$$\lambda = \frac{Ap_0 + k_1}{p_0} = \frac{Bq_0 + k_2}{q_0} = \frac{Cr_0 + k_3}{r_0}$$

Очевидно, функция (2.5) будет знакоопределенной, если отношения k_1/p_0, k_2/q_0, k_3/r_0 имеют одинаковые знаки, что и доказывает устойчивость перманентных вращений (2.1) при этом условии.

Наибольший интерес представляют перманентные вращения гиростата с произвольной угловой скоростью ω вокруг его главных центральных осей инерции, возможные при условии коллинеарности вектора **k** перманентной оси вращения.

Пусть, например, $k_1 = k_2 = 0$, $k_3 = k = \text{const}$. Тогда уравнения (2.2) допускают решение

$$\alpha = \beta = 0, \qquad \gamma = 1 \qquad (p_0 = q_0 = 0,\ r_0 = \omega) \tag{2.6}$$

при произвольной величине ω. Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} V &= V_2 - \left(C + \frac{k}{\omega}\right)V_1 + \frac{1}{4\omega^2}\mu V_1^2 = \qquad \left(C_1 = C + \frac{k}{\omega}\right) \\ &= A(A - C_1)\xi_1^2 + B(B - C_1)\xi_2^2 + C\left(C\mu - \frac{k}{\omega}\right)\xi_3^2 + \cdots \end{aligned} \tag{2.7}$$

Здесь многоточия обозначают невыписанные члены третьего и четвертого порядков малости относительно ξ_1, ξ_2, ξ_3. Очевидно, если

$$A \gtrless C_1, \qquad B \gtrless C_1 \tag{2.8}$$

причем одновременно в обоих неравенствах имеют место только верхние или только нижние знаки, то всегда можно подобрать такое $\mu = \text{const}$, что функция (2.7) будет знакоопределенной. На основании теоремы Ляпунова движение (2.6) при условиях (2.8) будет устойчивым.

Рассмотрим теперь функцию

$$W = \xi_1\xi_2 \tag{2.9}$$

и производную по времени от нее, взятую в силу уравнений возмущенного движения

$$A\frac{d\xi_1}{dt}+(C-B)\,\xi_2(\omega+\xi_3)+\xi_2 k=0$$

$$B\frac{d\xi_2}{dt}+(A-C)\,\xi_1(\omega+\xi_3)-\xi_1 k=0$$

Будем иметь

$$W'=\left(\frac{C_1-A}{B}\xi_1^2+\frac{B-C_1}{A}\xi_2^2\right)\omega+\left(\frac{C-A}{B}\xi_1^2+\frac{B-C}{A}\xi_2^2\right)\xi_3 \qquad (2.10)$$

Допустим, что во все время движения переменная ξ_3 сохраняет порядок малости величин ξ_1 и ξ_2, — в противном случае будем иметь неустойчивость по этой переменной.

Тогда, если неравенства

$$C_1 \gtrless A, \qquad B \gtrless C_1 \qquad (2.11)$$

одновременно выполняется только с верхними знаками, или только с нижними, W' будет знакоопределенной функцией переменных ξ_1 и ξ_2. На основании теоремы Четаева [4] заключаем в этом случае о неустойчивости невозмущенного движения (2.6).

Величина C_1 имеет размерность момента инерции и при заданной угловой скорости ω ее можно трактовать как «приведенный» момент инерции гиростата для перманентной оси z, если только $C_1>0$. Вводя в рассмотрение эллипсоид

$$Ax^2+By^2+C_1z^2=1 \qquad (2.12)$$

полученные результаты можно, очевидно, сформулировать в форме известной теоремы [4] об устойчивости перманентных вращений твердого тела с эллипсоидом инерции (2.12).

Следует, однако, иметь в виду, что в случае противоположных знаков величин k и ω, величина C_1 может быть неположительной При этом будут выполняться условия (2.8) с верхними знаками, в силу чего невозмущенное движение (2.6) будет устойчивым.

Таким образом [3], если отношение k/ω заключено в пределах $(A-C)$ и $(B-C)$, то соответствующее перманентное движение (2.6) неустойчиво, в противном случае — устойчиво по отношению к переменным p, q, r.

При этом легко убедиться в устойчивости невозмущенного движения и по отношению к возмущениям величин $k_i=\text{const}$ [3], если оно устойчиво по отношению к p, q, r.

3. Рассмотрим случай, когда

$$A\geqslant B, \qquad x_0=y_0=0, \qquad z_0\neq 0, \qquad k_1=k_2=0, \qquad k_3=k=\text{const} \quad (3.1)$$

Уравнения движения (1.1) и (1.2) допускают при этом частное решение

$$p=q=0, \qquad r=\omega, \qquad \gamma_1=\gamma_2=0, \qquad \gamma_3=1 \qquad (3.2)$$

описывающее равномерное вращение гиростата с произвольной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси z. Это движение примем за невозмущенное и исследуем его устойчивость, полагая в возмущенном движении

$$r = \omega + \xi, \qquad \gamma_3 = 1 + \zeta$$

и сохраняя прежние обозначения для остальных переменных.

Уравнения возмущенного движения допускают первые интегралы:

$$\begin{aligned} V_1 &= Ap^2 + Bq^2 + C(\xi^2 + 2\omega\xi) + 2Pz_0\zeta = \text{const} \\ V_2 &= Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + C\xi + C(\omega + \xi)\zeta + k\zeta = \text{const} \\ V_3 &= \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \zeta^2 + 2\zeta = 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Построим функцию

$$\begin{aligned} V &= V_1 - 2\omega V_2 + (C\omega^2 + k\omega - Pz_0)V_3 + \tfrac{1}{4}\mu V_3^2 = \\ &= Ap^2 - 2A\omega p\gamma_1 + (C\omega^2 + k\omega - Pz_0)\gamma_1^2 + \\ &+ Bq^2 - 2B\omega q\gamma_2 + (C\omega^2 + k\omega - Pz_0)\gamma_2^2 + \\ &+ C\xi^2 - 2C\omega\xi\zeta + (C\omega^2 + k\omega - Pz_0 + \mu)\zeta^2 + \cdots \end{aligned} \tag{3.4}$$

где многоточия обозначают члены третьего и четвертого порядков малости, а постоянная $\mu > Pz_0 - k\omega$.

Согласно критерию Сильвестра условием определенной положительности функции (3.4) является неравенство

$$(C - A)\omega^2 + k\omega - Pz_0 > 0 \tag{3.5}$$

При выполнении условия (3.5) невозмущенное движение (3.2) несимметричного гиростата будет устойчивым по отношению к переменным $p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

4. Перейдем к рассмотрению устойчивости вращения симметричного гиростата, когда выполняются условия

$$A = B, \qquad x_0 = y_0 = 0, \qquad z_0 \neq 0, \qquad k_1 = k_2 = 0 \tag{4.1}$$

а проекция вектора $\mathbf{k}$ на ось z является некоторой ограниченной непрерывной функцией времени $k_3 = k(t)$, определяемой уравнением относительного движения тела S_2.

Уравнения (1.1) принимают в этом случае следующий вид:

$$\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} + (C - A)qr + qk(t) &= Pz_0\gamma_2 \\ A\frac{dq}{dt} + (A - C)rp - pk(t) &= -Pz_0\gamma_1 \\ C\frac{dr}{dt} + \frac{dk(t)}{dt} &= 0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Из третьего из этих уравнений немедленно следует интеграл

$$Cr + k(t) = \text{const} \tag{4.3}$$

Умножим первое из уравнений (4.2) на p, второе — на q и сложим их, тогда с учетом уравнений (1.2) получим первый интеграл

$$A(p^2 + q^2) + 2Pz_0\gamma_3 = \text{const} \tag{4.4}$$

Уравнения движения (4.2) и (1.2) допускают следующее частное решение

$$p = q = 0, \qquad \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \qquad Cr + k(t) = K, \qquad \gamma_3 = 1 \tag{4.5}$$

описывающее вращение гиростата с переменной угловой скоростью

$$r = \frac{K}{C} - \frac{1}{C} k(t)$$

вокруг вертикальной оси z. Это движение примем за невозмущенное и исследуем его устойчивость, полагая в возмущенном движении

$$Cr + k(t) = K + \xi; \qquad \gamma_3 = 1 + \zeta \tag{4.6}$$

и сохраняя прежние обозначения для остальных переменных.

Уравнения возмущенного движения, которые легко составить, учитывая (4.6), допускают следующие первые интегралы:

$$\begin{aligned} V_1 &= A(p^2 + q^2) + 2Pz_0\zeta = \text{const} \\ V_2 &= A(p\gamma_1 + q\gamma_2) + K\zeta + \xi + \xi\zeta = \text{const} \\ V_3 &= \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \zeta^2 + 2\zeta = 0 \\ V_4 &= \xi = \text{const} \end{aligned} \tag{4.7}$$

Построим функцию

$$\begin{aligned} V &= V_1 + 2\lambda V_2 - (Pz_0 + K\lambda) V_3 - 2\lambda V_4 + \frac{1}{A} V_4^2 = \\ &= Ap^2 + 2A\lambda p\gamma_1 - (Pz_0 + K\lambda)\gamma_1^2 + Aq^2 + 2A\lambda q\gamma_2 - (Pz_0 + K\lambda)\gamma_2^2 + \\ &+ \frac{1}{A}\xi^2 + 2\lambda\xi\zeta - (Pz_0 + K\lambda)\zeta^2 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Согласно критерию Сильвестра условием определенной положительности функции (4.8) будет неравенство

$$A\lambda^2 + K\lambda + Pz_0 < 0$$

которое выбором соответствующего значения постоянной λ можно удовлетворить, если выполняется условие

$$K^2 - 4APz_0 > 0 \tag{4.9}$$

являющееся обобщением известного [4] условия Майевского.

При выполнении условия (4.9) невозмущенное движение (4.5) будет устойчивым по отношению к величинам $p, q, Cr + k(t), \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

В случае заданной непрерывной ограниченной функции $k(t)$ отсюда в силу существования интеграла (4.3) будет следовать устойчивость и по отношению к величине r.

Легко видеть, что условие (4.9) является также необходимым для устойчивости невозмущенного движения (4.5). В самом деле, рассмотрим функцию

$$W = p\gamma_2 - q\gamma_1$$

и производную по времени от нее, взятую в силу уравнений возмущенного движения

$$W' = (p^2 + q^2)(1 + \zeta) - \frac{K + \xi}{A}(p\gamma_1 + q\gamma_2) + \frac{Pz_0}{A}(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)$$

Согласно критерию Сильвестра функция W' будет определенно-положительной по отношению к переменным p, q, γ_1, γ_2, если выполняется неравенство

$$K^2 - 4APz_0 < 0 \tag{4.10}$$

При этом предполагается, что переменная ζ сохраняет все время порядок малости переменных p, q, в противном случае была бы очевидной неустойчивость невозмущенного движения (4.5) по отношению к величине γ_3. Следовательно, при выполнении условия (4.10) невозмущенное движение неустойчиво, т. к. функция W при этом удовлетворяет условиям теоремы Четаева о неустойчивости.

Таким образом, неравенство (4.9) является необходимым и достаточным условием устойчивости невозмущенного движения (4.5).

В случае, если $k_3 = \text{const}$, интеграл (4.3) принимает вид

$$r = \text{const}$$

и вместо частного решения (4.5) будем иметь решение (3.2).

Условие устойчивости (4.9) для этого случая становится следующим

$$(C\omega + k_3)^2 - 4APz_0 > 0$$

Это неравенство может быть удовлетворено соответствующим выбором величины $k_3 = \text{const}$ и в случае $\omega = 0$, т. е. неустойчивое равновесие тяжелого гиростата может быть стабилизировано вращением тела S_2.

5. Отметим, что полученные выше результаты об устойчивости перманентных вращений гиростатов в случае $k_i = \text{const}$ $(i = 1, 2, 3)$ приложимы, в частности, к твердому телу с многосвязными полостями, полностью заполненными идеальными однородными жидкостями, совершающими безвихревые движения.

Жуковский [2] установил, что уравнения движения такого гиростата имеют вид уравнений (1.1), где A, B, C обозначают теперь главные моменты инерции преобразованного твердого тела (полученного присоединением к телу S_1 эквивалентных твердых тел, заменяющих жидкие массы), а $k_i = \text{const}$ — суммы проекций моментов количеств безвихревых движений жидкостей в многосвязных полостях неподвижного твердого тела. Последние представляются линейными функциями главных циркуляций. Например, в случае кольцевидной полости вращения [2] вокруг оси z

$$k_1 = k_2 = 0, \quad k_3 = \frac{m\chi}{2\pi}$$

где m — масса жидкости, χ — циркуляция скорости, определяемая начальным движением жидкости.

Если в начальный момент, когда тело неподвижно, жидкость покоится, то все $k_i = 0$ и мы приходим к случаю одного преобразованного твердого тела [5]. В случае вихревого движения жидкости в полости твердого тела устойчивость вращения гиростата вокруг вертикали исследуется в работе [6].

Поступила 14 XI 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Леви-Чивита и Амальди. Курс теоретической механики, т. II, ч. II. Изд-во ин. лит., 1951.
2. Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. Гостехтеоретиздат. Собр., соч., 1948, т. II.
3. Volterra V. Sur la théorie des variations des latitudes. Acta math., т. 22, 1899.
4. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Гостехтеоретиздат, 1955.
5. Румянцев ВВ. Устойчивость перманентных вращений тяжелого твердого тела, ПММ, 1956, т. XX, вып. 1.
6. Румянцев В. В. Об устойчивости вращения волчка с полостью, заполненной вязкой жидкостью. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 4.