Прикладная математика и механика. Том XXV, 1961
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ РЕШЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Г. Я. Попов

(Новосибирск)

В работе Б. Г. Коренева [1] задача о вдавливании круглого в плане штампа в упругое основание общего типа сведена к парным интегральным уравнениям для некоторой вспомогательной функции.

В настоящей работе эта задача сводится к некоторому интегральному уравнению Фредгольма первого рода непосредственно для контактного напряжения. При этом для некоторых типов упругих оснований, в частности для однородного упругого полупространства, названное интегральное уравнение простым преобразованием переводится в уравнение типа Винера-Хопфа, допускающего точное решение.

Показывается, что предлагаемый способ позволяет в некоторых случаях получить точное решение осесимметричной контактной задачи с учетом поверхностной структуры контактируемых тел [2].

§ 1. Полученные здесь результаты основаны на формуле, позволяющей вычислить осадки $w(r)$ поверхностных точек упругого основания, загруженного вертикальной нагрузкой, сосредоточенной по линии окружности. Эту формулу нетрудно вывести для основания весьма общего типа. Требуется только выполнение соотношения

$$w_0(r) = \int_0^\infty f_0(t) J_0(rt)\, dt \qquad (1.1)$$

Здесь $J_0(x)$ — функция Бесселя первого рода, $w_0(r)$ — осадка поверхностной точки основания, расположенной на расстоянии $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ от точки приложения единичной силы.

Можно убедиться, например, что для упругого однородного полупространства

$$f_0(t) = (1 - \mu_0^2)(\pi E)^{-1}$$

Для полупространства с модулем упругости, меняющимся по степенному закону $E = E_\nu z^\nu$

$$f_0(t) = \frac{\Gamma(1/2 - \nu/2)}{\pi D_\nu \Gamma(1/2 + \nu/2)} \left(\frac{t}{2}\right)^\nu \left(D_\nu = \frac{\alpha_0}{E_\nu}\right) \qquad (1.2)$$

Для коэффициента α_0 Г. К. Клейном [3] составлены таблицы. Можно убедиться, что и для упругого слоя $(0 \leqslant z \leqslant h)$ также справедливо соотношение (1.1). Оно справедливо и для полупространства с модулем упругости, меняющимся по закону [4].

$$E = E_0 \exp(\gamma z)$$

Если основание загружено нагрузкой $p(x, y)$, то осадки будут определяться по формуле

$$w(x, y) = \int_0^\infty f_0(t)\, dt \iint_{-\infty}^{\infty} J_0\left(\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\right) p(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \qquad (1.3)$$

Нагрузку единичной интенсивности, сосредоточенную на линии окружности радиуса ρ, можно представить в виде

$$p(x, y) = \delta(r-\rho) = \delta\left(\sqrt{x^2+y^2}-\rho\right) \qquad (1.4)$$

где $\delta(x)$ — импульсная функция.

Обозначим осадки основания от нагрузки (1.4) через $w(r, \rho)$.

Подставив (1.4) в (1.3), в результате замены

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad \xi = \rho\cos\theta, \quad \eta = \rho\sin\theta$$

и использования известных свойств δ-функции получим

$$w(r, \rho) = \rho \int_0^\infty f_0(t)\, dt \int_0^{2\pi} J_0\left(t\sqrt{r^2-2\rho r\cos(\varphi+\theta)+\rho^2}\right) d\theta$$

И, наконец, разложив во втором интеграле подынтегральное выражение в ряд по бесселевым функциям и выполнив интегрирование, найдем

$$w(r, \rho) = 2\pi\rho \int_0^\infty f_0(t)\, J_0(rt)\, J_0(\rho t)\, dt \qquad (1.5)$$

Для случая однородного упругого полупространства эта формула совпадает с формулой, выведенной К. Е. Егоровым [5] иным путем.

Полученная формула позволяет осесимметричную контактную задачу как в случае контакта по кругу, так и по кольцу свести к следующему интегральному уравнению (касательные взаимодействия по площадке контакта не учитываются)

$$\int_{a_0}^{a} w(r, \rho)\, p(\rho)\, d\rho = w(r) \qquad (a_0 \leqslant r \leqslant a) \qquad (1.6)$$

В случае круговой области контакта ($a_0 = 0$) для некоторых типов упругих оснований посредством простого преобразования уравнение (1.6) переходит в уравнение типа Винера-Хопфа, для которого нетрудно найти точное решение.

Однако, как нам кажется, и для приближенного решения проблемы сведение ее к решению одного уравнения (1.6) непосредственно для искомого контактного напряжения имеет свое преимущество. Заметим также, что полученное соотношение (1.6) удобно для вычисления осадок под гибкими круглыми или кольцевыми в плане фундаментами.

§ 2. Покажем, что контактная задача для круговой области в случае однородного полупространства и полупространства, для которого справедливо (1.2), может быть сведена к решению интегрального уравнения типа Винера—Хопфа. При этом задачу поставим несколько шире, чем в предыдущем параграфе.

Будем считать, что контактируются два упругих тела с различными упругими свойствами и близкие к полупространствам. Тогда, следуя И. Я. Штаерману ([2], стр. 175), можем записать

$$\alpha = w_1(r) + z_1(r) + z_2(r) - w_2(r) \tag{2.1}$$

где α — сближение упругих тел при сжатии, $z = z_1(r)$ и $z = -z_2(r)$ — уравнения поверхностей, ограничивающих сжимаемые тела (первым телом считается то, внутри которого проходит положительная полуось z), $w_1(r)$ и $w_2(r)$ — вертикальные упругие смещения контактируемых точек. Как и обычно, будем приближенно считать, что указанные смещения w_1 и w_2 такие, как если бы давление, возникающее по площадке контакта, действовало бы на верхнее и нижнее упругое полупространство с теми же упругими свойствами, что и сжимаемые тела.

Тогда для вычисления w_1 и w_2, предполагая, что тела абсолютно гладкие, можем воспользоваться формулой (1.5), которую применительно к упругому основанию типа (1.2), можно представить в виде

$$w(r, \rho) = c\rho^{-\nu} k_\nu (r/\rho), \qquad k_\nu(z) = \int_0^\infty J_0(s) J_0(sz) s^\nu \, ds \tag{2.2}$$

где

$$c = \frac{2^{1-\nu}}{D_\nu} \frac{\Gamma(1/2 - \nu/2)}{\Gamma(1/2 + \nu/2)}$$

В случае однородного упругого полупространства в формуле (2.2) следует положить

$$\nu = 0, \qquad c = \frac{2(1-\mu_0^2)}{E} \tag{2.3}$$

Оставив за контактным напряжением прежнее обозначение $p(r)$ и приняв во внимание (2.2), можно записать

$$w_{1,2} = \pm c_{1,2} \int_0^a k_\nu (r/\rho) \rho^{-\nu} p(\rho) \, d\rho$$

Подставив полученные выражения для w_1 и w_2 в (2.1), придем к интегральному уравнению

$$\int_0^a k_\nu (r/\rho) \rho^{-\nu} p(\rho) \, d\rho = f(r), \qquad 0 \leqslant r \leqslant a \tag{2.4}$$

где

$$f(r) = \frac{\alpha - z_1(r) - z_2(r)}{c_1 + c_2} \tag{2.5}$$

Интегральное уравнение (2.4) в результате замены

$$r = ae^{-x}, \qquad \rho = ae^{-\xi}, \qquad \chi(\xi) = ae^{-\xi} p(ae^{-\xi}) \tag{2.6}$$

переходит в интегральное уравнение типа Винера-Хопфа первого рода

$$\int_0^\infty l(x - \xi) \chi(\xi) = g(x), \qquad 0 \leqslant x < \infty \tag{2.7}$$

В разбираемом случае

$$l(z) = e^{-\nu z} k_\nu (e^{-z}), \qquad g(x) = e^{-\nu x} a^\nu f(ae^{-x}) \tag{2.8}$$

Решение уравнения (2.7) легко построить приемом, который нами уже применялся [6, 7] и был доложен на Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике.

Согласно этому приему, следует сперва найти решение уравнения со специальной правой частью

$$\int_0^\infty l(x-\xi)\,\chi_\zeta(\xi)\,d\xi = e^{i\zeta x}, \qquad \operatorname{Im}\zeta \geqslant 0 \tag{2.9}$$

а затем, разложив $g(x)$ в обобщенный интеграл Фурье ([8], стр. 11)

$$g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_\gamma G(w)\,e^{iwx}\,dw, \qquad G(w) = \int_0^\infty g(x)\,e^{-iwx}\,dx \tag{2.10}$$

можно будет получить решение уравнения (2.7) по формуле

$$\chi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_\gamma G(\zeta)\,\chi_\zeta(x)\,d\zeta \tag{2.11}$$

Решение же ключевого уравнения (2.9) строится по формуле

$$\chi_\zeta(x) = \frac{i}{2\pi}\int_\gamma \frac{\psi_+(w)\,\psi_-(-\zeta)}{w+\zeta}\,e^{-iwx}\,dw \tag{2.12}$$

При этом функции $\psi_\pm(w)$ должны быть регулярны и отличны от нуля соответственно в верхней и нижней полуплоскостях (без точки ∞) и удовлетворять соотношению

$$\left[L(u) = \int_{-\infty}^{\infty} l(t)\,e^{iut}\,dt\right]^{-1} = \psi_+(u)\,\psi_-(u) \qquad (-\infty < u < \infty) \tag{2.13}$$

На бесконечности функции $\psi_\pm(w)$ должны вести себя следующим образом

$$\psi_\pm(w) = O(w^\mu), \qquad \operatorname{Im} w \gtrless 0, \qquad \mu < 1 \tag{2.14}$$

Под контуром интегрирования γ следует понимать прямую $(\infty, -\infty)$, параллельную вещественной оси и удаленную от нее в нижнюю полуплоскость на достаточно малое расстояние, точнее, на такое, чтобы все особые точки подынтегральной функции лежали ниже этой прямой.

Проблема отыскания функций по заданной функции носит название проблемы факторизации и имеет решение для достаточно широкого класса непрерывных во всем промежутке $(\infty, -\infty)$ функций [9].

Непосредственно подстановкой (ср. [6,10]) можно проверить, что функция (2.12) удовлетворяет уравнению (см. также [9], стр. 109).

§ 3. Преобразование Фурье ядра интегрального уравнения (2.7) для разбираемого случая (2.8) вычисляется в конечном виде

$$L(u) = \frac{\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\nu - \tfrac{1}{2}iu\right)}{2^{1-\nu}\Gamma\left(1+\tfrac{1}{2}iu-\tfrac{1}{2}\nu\right)}\,\frac{\Gamma\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}iu\right)}{\Gamma\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}iu\right)} \tag{3.1}$$

При этом следует воспользоваться двукратно известной ([11], стр. 259) формулой

$$\int_0^\infty \frac{J_p(ax)\,dx}{x^{p-q}} = \frac{\Gamma\left(\tfrac{1}{2}q+\tfrac{1}{2}\right)}{2^{p-q}a^{q-p+1}\Gamma\left(p-\tfrac{1}{2}q+\tfrac{1}{2}\right)} \tag{3.2}$$

Принимая во внимание аналитические свойства гамма-функции Эйлера [12], легко обнаружим, что в данном случае

$$\psi_+(u) = \frac{\Gamma(^1/_2 - ^1/_2 iu)}{\Gamma(^1/_2\nu - ^1/_2 iu)}, \qquad \psi_-(u) = \frac{2^{1-\nu}\Gamma(1 + ^1/_2 iu - ^1/_2\nu)}{\Gamma(^1/_2 + ^1/_2 iu)} \tag{3.3}$$

Используя известное асимптотическое представление $\Gamma(z)$ на бесконечности [12], можно убедиться, что условия (2.14) здесь выполняются.

Таким образом, функция $\chi_\zeta(z)$ найдена. Подставив ее в формулу (2.11), получим решение интегрального уравнения контактной задачи для общего случая правой части. Полученное решение путем ряда преобразований можно привести к одному из известных решений [1,13].

В конце работы будет найдена более простая форма решения разбираемого уравнения для произвольной правой части. Однако можно рассмотреть большинство представляющих практический интерес случаев контактной задачи, имея только решение $\chi_\zeta(x)$ для специальной правой части.

Соответствующую этому решению правую часть уравнения (2.7) обозначим через $f_\zeta(r)$. При этом на основании (2.8) будет иметь место равенство

$$f_\zeta(r) = a^{i\zeta} r^{-\nu - i\zeta} \tag{3.4}$$

Контактное напряжение в этом случае обозначим через $p_\zeta(r)$. Оно будет связано с решением уравнения (2.9) зависимостью

$$\chi_\zeta(x) = ae^{-x} p_\zeta(ae^{-x}), \qquad ae^{-x} = r \tag{3.5}$$

Предлагаемый способ решения контактной задачи позволяет находить величину сил P, прижимающих контактируемые тела, без предварительного получения формулы для контактного напряжения и ее интегрирования в промежутке $(0, a)$.

Хотя это справедливо и для общего случая, мы при доказательстве ограничимся случаем (3.4), для которого

$$P_\zeta = 2\pi \int_0^a r p_\zeta(r)\, dr \tag{3.6}$$

Обобщенное преобразование Фурье [8] функции $\chi_\zeta(x)$,

$$X_\zeta(u) = \int_0^\infty \chi_\zeta(x) e^{iux}\, dx$$

на основании (2.12) будет иметь вид

$$X_\zeta(u) = i\,\frac{\psi_+(u)\,\psi_-(-\zeta)}{u + \zeta} \tag{3.7}$$

Величина прижимающих сил P_ζ очень просто выражается через эту функцию

$$P_\zeta = 2\pi a X_\zeta(i) \tag{3.8}$$

Чтобы убедиться в этом, следует рассмотреть соотношение

$$aX_\zeta(u + i) = a\int_0^\infty \chi_\zeta(x)\, e^{i(u+i)x}\, dx$$

подставить туда (3.5) и сделать там очевидную замену переменной интегрирования; в результате получим

$$aX_\zeta(u+i) = \int_0^a r p_\zeta (a/r)^{iu}\, dr$$

Отсюда, учитывая (3.6), и следует (3.8). Приняв во внимание (3.7) и (3.8), найдем

$$P_\zeta = \frac{i\pi a}{i+\zeta} \frac{\Gamma(1 - {}^1/_2 i\zeta + {}^1/_2 \nu)}{\Gamma({}^1/_2 + {}^1/_2\nu)\,\Gamma({}^1/_2 - {}^1/_2 i\zeta)} \tag{3.9}$$

Чтобы получить удобную в дальнейшем формулу для $p_\zeta(r)$, преобразуем правую часть (2.12). С этой целью представим ее, учитывая (3.3), в виде

$$\chi_\zeta(x) = \psi_-(-\zeta)\,[S_1(x) + S_2(x)] \tag{3.10}$$

где

$$S_1(x) = \frac{i}{2\pi} \int_\gamma \frac{\Gamma({}^1/_2 - {}^1/_2 iu)}{2i\Gamma(1 + {}^1/_2\nu - {}^1/_2 iu)} e^{-iux}\, du \tag{3.11}$$

$$S_2(x) = \frac{i(\nu + i\zeta)}{2\pi} \int_\gamma \frac{\Gamma({}^1/_2 - {}^1/_2 iu)\, e^{-iux} du}{2(u+\zeta)\,\Gamma(1 + {}^1/_2\nu - {}^1/_2 iu)} \tag{3.12}$$

Здесь использовано тождество

$$\frac{1}{u+\zeta} = \frac{1}{u+i\nu} + \frac{\nu + i\zeta}{(\nu - iu)(u+\zeta)}$$

и известное соотношение для гамма-функции [12]

$$\Gamma(1+z) = z\Gamma(z) \tag{3.13}$$

Интеграл (3.11) представляет собой сумму вычетов

$$S_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-(2n+1)x}}{n!\,\Gamma({}^1/_2 + {}^1/_2\nu - n)} \tag{3.14}$$

На основании известного соотношения

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \pi \operatorname{cosec} z \tag{3.15}$$

справедливо следующее равенство

$$\pi\Gamma^{-1}({}^1/_2 + {}^1/_2\nu - n) = (-1)^n \sin({}^1/_2 - {}^1/_2\nu)\,\pi\Gamma({}^1/_2 - {}^1/_2\nu + n)$$

Учитывая последнее, а также представление гипергеометрической функции $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ в виде ряда [12], можно записать

$$S_1(x) = \pi^{-1} \sin({}^1/_2 - {}^1/_2\nu)\,\pi\Gamma({}^1/_2 - {}^1/_2\nu)\, e^{-x} F({}^1/_2 - {}^1/_2\nu,\ \beta,\ \beta,\ e^{-2x})$$

откуда ([12], стр. 329)

$$S_1(x) = \pi^{-1} \sin({}^1/_2 - {}^1/_2\nu)\,\pi\Gamma({}^1/_2 - {}^1/_2\nu)\, e^{-x} (1 - e^{-2x})^{{}^1/_2\nu - {}^1/_2} \tag{3.16}$$

Если воспользоваться тождеством

$$(u+\zeta)^{-1} = -i \int_0^1 \eta^{-iu - i\zeta - 1}\, d\eta$$

то после изменения порядка интегрирования выражение (3.12) примет вид

$$S_2(x) = (\nu + i\zeta) \int_0^1 \eta^{-i\zeta - 1}\, d\eta\, \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\Gamma({}^1/_2 - {}^1/_2 iu)}{2\Gamma(1 + {}^1/_2\nu - {}^1/_2 iu)} \left(\frac{e^{-x}}{\eta}\right)^{iu} i\, du$$

Изменив во внутреннем интеграле переменную интегрирования $-iu = s$ и воспользовавшись соотношением ([14], стр. 88)

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty}\frac{\Gamma(\beta+{}^1\!/_2 s)}{\Gamma(\alpha+\beta+s/2)}x^{-s}ds=\begin{cases}2^{2\beta}\Gamma^{-1}(\alpha)(1-x^2)^{\alpha-1} & (0\leqslant x\leqslant 1)\\ 0 & (x>1)\end{cases}$$

найдем

$$S_2(x)=e^{-x}\frac{\nu+i\zeta}{\Gamma({}^1\!/_2+{}^1\!/_2\nu)}\int\limits_{e^{-x}}^{1}\eta^{-i\zeta-2}\left(1-\frac{e^{-2x}}{\eta^2}\right)^{{}^1\!/_2\nu-{}^1\!/_2} \tag{3.17}$$

Контактное напряжение $p_\zeta(r)$ получим, приняв во внимание (3.5), (3.10), (3.16), (3.17),

$$p_\zeta(r)=\frac{\psi_-(-\zeta)}{\Gamma({}^1\!/_2+{}^1\!/_2\nu)}\left[a^{-\nu}(a^2-r^2)^{{}^1\!/_2\nu-{}^1\!/_2}+(\nu+i\zeta)a^{i\zeta}\int\limits_r^a\frac{(t^2-r^2)^{{}^1\!/_2\nu-{}^1\!/_2}}{t^{1+\nu+i\zeta}}dt\right] \tag{3.18}$$

§ 4. Чтобы охватить большинство примеров осесимметричной контактной задачи, рассмотренных в монографии И. Я. Штаермана для случая однородных тел, достаточно ограничиться случаем, когда

$$z_1(r)+z_2(r)=Ar^\sigma$$

причем σ — любое положительное число. В этом случае

$$f(r)=(c_1+c_2)^{-1}(\alpha-Ar^\sigma)$$

и, следовательно, на основании (3.4)

$$f(r)=\frac{a^\nu}{c_1+c_2}[f_\zeta(r)]_{\zeta=i\nu}-\frac{Aa^{\nu+\sigma}}{c_1+c_2}[f_\zeta(r)]_{\zeta=j\nu+i\sigma}$$

а потому

$$p(r),\ P=\frac{a^\nu}{c_1+c_2}[p_\zeta(r),\ P_\zeta]_{\zeta=i\nu}-\frac{Aa^{\nu+\sigma}}{c_1+c_2}[p_\zeta(r),\ P_\zeta]_{\zeta=i\nu+i\sigma} \tag{4.1}$$

Откуда, используя полученные формулы (3.18) и (3.19), найдем

$$p(r)=\frac{2^{1-\nu}\Gamma^{-1}({}^1\!/_2+{}^1\!/_2\nu)}{c_1+c_2}\left[\frac{\alpha}{\Gamma({}^1\!/_2+{}^1\!/_2\nu)}-A\frac{\Gamma(1+{}^1\!/_2\sigma)a^\sigma}{\Gamma({}^1\!/_2+{}^1\!/_2\nu+{}^1\!/_2\sigma)}\right](a^2-r^2)^{{}^1\!/_2\nu-{}^1\!/_2}+$$

$$+\frac{A}{c_1+c_2}\frac{2^{1-\nu}\Gamma(1+{}^1\!/_2\sigma)\sigma}{\Gamma({}^1\!/_2+{}^1\!/_2\nu)\Gamma({}^1\!/_2+{}^1\!/_2\nu+{}^1\!/_2\sigma)}\int\limits_r^a(t^2-r^2)^{{}^1\!/_2\nu-{}^1\!/_2}t^{\sigma-1}dt \tag{4.2}$$

$$P=\frac{\pi 2^{2-\nu}a^{1+\nu}}{(c_1+c_2)\Gamma({}^1\!/_2+{}^1\!/_2\nu)}\left[\frac{\alpha}{(1+\nu)\Gamma({}^1\!/_2+{}^1\!/_2\nu)}-\frac{A\Gamma(1+\sigma/2)a^\sigma}{(1+\nu+\sigma)\Gamma({}^1\!/_2+{}^1\!/_2\nu+{}^1\!/_2\sigma)}\right] \tag{4.3}$$

Из условия конечности контактного напряжения при $r=a$ получим

$$\alpha=A\frac{\Gamma({}^1\!/_2+{}^1\!/_2\nu)\Gamma(1+{}^1\!/_2\sigma)}{\Gamma({}^1\!/_2+{}^1\!/_2\nu+{}^1\!/_2\sigma)}a^\sigma \tag{4.4}$$

Подставив (4.4) и (4.3), найдем радиус площадки контакта

$$a^{1+\nu+\sigma}=\frac{P}{A}\frac{c_1+c_2}{2^{2-\nu}\pi}\frac{(1+\nu)(1+\nu+\sigma)}{\Gamma(1+{}^1\!/_2\sigma)}\Gamma({}^1\!/_2+{}^1\!/_2\nu)\Gamma({}^1\!/_2+{}^1\!/_2\nu+{}^1\!/_2\sigma) \tag{4.5}$$

Приняв во внимание (4.5) и (4.2), в этом случае формулу для контактного напряжения можно преобразовать к виду

$$p(r)=\frac{P(1+\nu)(1+\nu+\sigma)}{2\pi a^2}\int\limits_{r/a}^{1}\left(t^2-\frac{r^2}{a^2}\right)^{{}^1\!/_2\nu-{}^1\!/_2}t^{\sigma-1}ds \tag{4.6}$$

Рассмотрим теперь отдельные частные случаи. К случаю вдавливания штампа с плоским основанием придем, положив в полученных формулах $A=0$, $\sigma=0$, $c_2=0$, $c_1=c$. При этом формула (4.2) перейдет в формулу, полученную В. И. Моссаковским [12], а формула (4.6) примет вид

$$p(r)=\frac{P}{2\pi}\frac{\nu+1}{a^{\nu+1}}(a^2-r^2)^{{}^1\!/_2\nu-{}^1\!/_2}.$$

При $\nu=0$ получаем формулу Буссинеска.

Далее рассмотрим вдавливание конуса в упругое тело, близкое к полупространству. Если образующая конуса составляет с осью симметрии z угол γ, то ([2], стр. 43)

$$z_1(r)+z_2(r)=r\operatorname{ctg}\gamma$$

Следовательно, полагая в формулах (4.4—4.6) $\sigma=1$, $A=\operatorname{ctg}\gamma$, найдем

$$p(r)=\frac{P(1+\nu)(2+\nu)}{2\pi a^2}\int\limits_{r/a}^{1}\left(t^2-\frac{r^2}{a^2}\right)^{{}^1\!/_2\nu-{}^1\!/_2}dt$$

$$\alpha=\frac{\sqrt{\pi}}{2\operatorname{tg}\gamma}\frac{\Gamma({}^1\!/_2+{}^1\!/_2\nu)}{\Gamma(1+{}^1\!/_2\nu)}a,\qquad a^2=\frac{P(c_1+c_2)(1+\nu)(2+\nu)}{2^{1-\nu}\operatorname{ctg}\gamma\pi^{3/2}}\Gamma({}^1\!/_2+{}^1\!/_2\nu)\Gamma(1+{}^1\!/_2\nu)$$

Заметим, что в отличие от случая однородных тел ($\nu=0$), здесь контактное напряжение уже не имеет особенности в нуле.

Как и в случае однородных тел при $z_1(r)+z_2(r)=Ar^{2n}$, т. е. при $\sigma=2n$, контактное напряжение и здесь выражается через элементарные функции. Действительно, поступая в данном случае так же, как и в работе [2], получим

$$p(r)=\frac{(1+\nu)(1+\nu+2n)P}{2\pi a^2}\left[\frac{1}{\nu+2n-1}+\frac{2n-2}{(\nu+2n-1)(\nu+2n-3)}\left(\frac{r}{a}\right)^2+\dots\right.$$
$$\left.\dots+\frac{(2n-2)(2n-4)\dots 6\cdot 4\cdot 2}{(\nu+2n-1)(\nu+2n-3)\dots(\nu+3)(\nu+1)}\left(\frac{r}{a}\right)^{2n-2}\right]\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)^{{}^1\!/_2+{}^1\!/_2\nu}$$

Формулы (4.4) и (4.5) примут соответственно вид

$$\alpha=A\cdot n!\frac{\Gamma({}^1\!/_2+{}^1\!/_2\nu)}{\Gamma({}^1\!/_2+{}^1\!/_2\nu+n)}a^{2n}$$

$$a^{2n+1}=\frac{P}{A}\frac{c_1+c_2}{2^{2-\nu}\pi}\frac{(1+\nu)(1+\nu+2n)}{n!}\Gamma({}^1\!/_2+{}^1\!/_2\nu)\Gamma({}^1\!/_2+{}^1\!/_2\nu+n)$$

Дадим теперь другую, отличную от (2.11), формулу для решения интегрального уравнения осесимметричной контактной задачи. При этом будем исходить из следующего результата М. Г. Крейна. Им показано [15], что решение интегрального уравнения типа

$$\int\limits_0^a k(r,s)\varphi(s)\,ds-\mu\varphi(r)=f(r)\qquad(0\leqslant r\leqslant a)\tag{4.7}$$

можно получить по формуле

$$\varphi(r)=\frac{1}{M'(a)}\left[\frac{d}{da}\int\limits_0^a q^*(s;a)f(s)\,ds\right]q(r;a)-$$
$$-\int\limits_r^a q(r;u)\frac{d}{du}\left[\frac{1}{M'(u)}\frac{d}{du}\int\limits_0^u q^*(s;u)f(s)\,ds\right]du\tag{4.8}$$

где $q(r;\ a)$ — решение интегрального уравнения (4.7) при $f(r) \equiv 1$, а $q^*(r;\ a)$ — решение союзного ему уравнения. При этом

$$M(a) = \int_0^a q(r;\ a)\, dr$$

Применим[1] формулу (4.8) к решению интегрального уравнения (2.4). С этой целью представим его в следующем виде

$$\int_0^a K(r,\ \rho)\, \rho p(\rho)\, d\rho = f(r) \tag{4.9}$$

где

$$K(r,\ \rho) = \rho^{-1-\nu} k_\nu (r/\rho) = \int_0^\infty J_0(s\rho)\, J_0(sr)\, s^\nu\, ds$$

Считая в качестве искомой функции

$$\varphi(r) = r p(r) \tag{4.10}$$

легко убеждаемся, что $K(r,\ \rho) = K(\rho,\ r)$ и, следовательно,

$$q^*(r;\ a) = q(r;\ a).$$

Решение $q(r;\ a)$ уравнения (4.9) при $f(r) \equiv 1$ нетрудно **найти**, используя полученные выше результаты. В самом деле, приняв во внимание (2.8), (3.5), (3.18) и (4.10), можно убедиться, что

$$q(r;\ a) = a^\nu r\, [p_\zeta(r)]_{\zeta=i\nu} = 2^{1-\nu}\Gamma^{-2}(1/2 + 1/2\nu)\, r\, (a^2 - r^2)^{1/2\nu - 1/2} \tag{4.11}$$

Отсюда

$$M(a) = \frac{2^{1-\nu} a^{\nu+1}}{(\nu+1)\,\Gamma^2(1/2 + 1/2\,\nu)}, \qquad M'(a) = \frac{2^{1-\nu} a^\nu}{\Gamma^2(1/2 + 1/2\,\nu)} \tag{4.12}$$

Кроме того, нетрудно проверить, что

$$\frac{d}{da}\left[\int_0^a \frac{s f(s)\, ds}{(a^2 - s^2)^{1/2 - 1/2\nu}}\right] = \frac{a^\nu}{\nu + 1}\left[f(0) + a\int_0^1 \frac{f'(at)\,(1 + \nu t^2)}{(1 - t^2)^{1/2 - 1/2\nu}}\, dt\right] \tag{4.13}$$

Подставив (4.10), (4.11) и (4.12) в формулу (4.8) и приняв во внимание (4.13), после очевидных преобразований найдем

$$p(r) = \frac{2^{1-\nu}}{\Gamma^2\left(\frac{1+\nu}{2}\right)}\left[\frac{\gamma}{(a^2 - r^2)^{1/2 - 1/2\nu}} - \int_r^a \frac{u^{-\nu}\, du}{(a^2 - r^2)^{1/2 - 1/2\nu}} \int_0^u \frac{f'(s) + s f''(s)}{(u^2 - s^2)^{1/2 - 1/2\nu}}\left(1 + \nu\frac{s^2}{u^2}\right) ds\right] \tag{4.14}$$

где

$$\gamma = f(0) + a^{1-\nu}\int_0^a \frac{f'(s)}{(a^2 - s^2)^{1/2 - 1/2\nu}}\left(1 + \nu\frac{s^2}{a^2}\right) ds$$

В заключение покажем, что изложенный здесь способ позволяет построить точное решение осесимметричной контактной задачи с учетом

[1] Идея применить формулу (4.8) к контактной задаче теории упругости принадлежит М. Г. Крейну, применившему ее к плоской контактной задаче теории упругости для однородной полуплоскости. Эти материалы им не опубликованы.

поверхностной структуры контактируемых тел. Действительно, в этом случае интегральное уравнение (1.6), если предполагать контакт по кругу, будет иметь вид

$$kp(r) + \int_0^a w(r, \rho)\, p(\rho)\, d\rho = w(r) \qquad (0 < r \leqslant a) \tag{4.15}$$

Если ограничиться случаем однородного полупространства и считать, что коэффициент k, зависящий от поверхностной структуры контактируемых тел, имеет вид $k = \varkappa r$, $\varkappa = \mathrm{const}$, то уравнение (4.15) в результате замены (2.6) с учетом (2.2) и (2.3) можно преобразовать в следующее интегральное уравнение типа Винера-Хопфа второго рода

$$\chi(x) + \lambda \int_0^\infty k_0 (e^{-(x-\xi)})\, \chi(\xi)\, d\xi = f(x), \qquad (0 \leqslant x < \infty) \tag{4.16}$$

где

$$\chi(x) = ae^{-x} p(ae^{-x}), \qquad \lambda = 2(1 - \mu_0^2)(\varkappa E)^{-1}, \qquad f(x) = \varkappa^{-1} w(ae^{-x})$$

Как известно, для интегральных уравнений типа (4.16) можно построить точное решение [9] и, следовательно, точно решить сформулированную задачу.

Поступила 14 XI 1960

Новосибирский инженерно-строительный институт

ЛИТЕРАТУРА

1. Коренев В. Г. Штамп, лежащий на упругом полупространстве, модуль упругости которого является степенной функцией глубины. ДАН, 1957, т. 112, № 5.
2. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. Гостехтеоретиздат, М.— Л., 1949.
3. Клейн Г. К. Учет неоднородности, разрывности деформаций и других свойств грунта, Сб. тр. Моск. инж.-строит. ин-т., 1956, № 14.
4. Попов Г. Я. К теории изгиба плит на упругом неоднородном полупространстве. Изв. вузов, Стр-во и арх., 1959, № 11.
5. Егоров К. Е. К вопросу расчета основания под фундаментом с подошвой кольцевой формы. Механика грунтов, 1958, № 34, Сб. тр. НИИОПС, М.
6. Попов Г. Я. Вдавливание полубесконечного штампа в упругое полупространство. Теор. и прикл. математика, 1958, № 1, Львов.
7. Попов Г. Я. Изгиб полубесконечной плиты на упругом полупространстве. Научн. докл. высш. школы, Стр.-во, 1958, № 4.
8. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. Гостехиздат, М.— Л., 1948.
9. Крейн М. Г. Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов. Успехи матем. наук, 1958, т. XIII, вып. 5.
10. Попов Г. Я. Об одном интегро-дифференциальном уравнении. Укр. матем. ж., 1960, № 1.
11. Рыжик И. М. и Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Гостехтеоретиздат, М.— Л., 1951.
12. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. Гостехтеоретиздат, М., 1953.
13. Моссаковский В. И. Давление круглого штампа на упругое полупространство, модуль упругости которого является степенной функцией глубины. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 1.
14. Снеддон И. Преобразования Фурье. ИИЛ, М., 1955.
15. Крейн М. Г. Об одном новом методе решения линейных интегральных уравнений первого и второго рода. ДАН, 1955, т. 100, № 3.