Прикладная математика и механика. Том XXV, 1961
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ИССЛЕДОВАНИЕ КВАЗИИНВАРИАНТОВ СТАТИКО-ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ АНАЛОГИИ ДЛЯ ТОНКИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

В. Висарион, Кр. Стэнеску

(Бухарест)

Уравнения теории тонких упругих оболочек обладают характерной симметрией, на основании которой удалось установить внутреннюю аналогию между упругими константами и статическими и геометрическими элементами, входящими в формулировку теории. В этом заключается так называемая статико-геометрическая аналогия. Она была сформулирована А. Л. Гольденвейзером для изотропных оболочек [1]. Нами в дальнейшем статико-геометрическая аналогия была обобщена на случай ортотропных [2] и анизотропных оболочек [3].

Статико-геометрическая аналогия позволяет записать уравнения теории оболочек в комплексном виде. В этом отношении известны результаты, полученные В. В. Новожиловым [4].

В случае цилиндрических изотропных оболочек произвольного сечения система уравнений теории оболочек сведена В. В. Новожиловым к одному уравнению [4].

Аналогичный результат получен А. Л. Гольденвейзером для тонкой сферической оболочки [5]. Им же получена для изотропной оболочки система уравнений в комплексных перемещениях.

В работе [7] на основании статико-геометрической аналогии общая система уравнений сводится для случая тонких изотропных оболочек к одному комплексному уравнению четвертого порядка.

Преследуя цель применить эти методы в случае ортотропных оболочек, авторы нашли множитель

$$\frac{2h^2 \sqrt{E_\alpha E_\beta}}{\sqrt{3(1-\mu_\alpha \mu_\beta)}}$$

при помощи которого системы уравнений равновесия и уравнений неразрывности можно объединить в одну комплексную систему, а уравнения Гука свести к системе трех линейных недифференциальных уравнений между комплексными усилиями [8].

Как известно, статико-геометрическая аналогия дает возможность дублировать каждое найденное соотношение. Эти результаты наводят на мысль сформулировать единую теорию тонких оболочек в комплексной области, сократив этим число неизвестных и порядок уравнений наполовину.

1. Квазиинварианты. Статико-геометрическая аналогия показывает, что усилия, моменты, функции напряжений, перемещения и компоненты деформации, входящие в однородные уравнения теории тонких оболочек, могут быть разделены на две группы (см. приложение): так что каждому элементу первой группы, содержащей усилия, моменты и функции напряжений, соответствует элемент второй группы, содержащей перемещения и деформации.

Дробь, составленная из аналогичных элементов, в которой числитель принадлежит к первой группе, а знаменатель — ко второй, имеет размерность силы.

Соотношение, связывающее элементы только одной группы, будет рассматриваться как относящееся к данной группе, так что, например, уравнения равновесия в усилиях можно отнести к первой группе, а уравнения неразрывности деформации, выраженные в деформациях, — ко второй и т. д. Существуют соотношения, не относящиеся ни к первой, ни ко второй группам. К ним можно отнести, например, соотношение закона Гука.

Пусть e — элемент, входящий в первую группу (усилие, функция напряжений или же любое однородное соотношение между элементами первой группы) и e^* — аналогичный ему элемент из второй группы.

Назовем комплексными элементами элементы вида

$$S_e = e + i\xi(e)\,e^* \tag{1.1}$$

В статико-геометрической аналогии величину, которая соответствует сама себе, можно называть инвариантом. Так, например, инвариантом является $\frac{1}{3}h^2(1-\mu^2)$. Понятие инварианта весьма стесняющее, вводим, имея в виду исследование однородной системой уравнений теории оболочек, следующее более общее понятие.

Назовем квазиинвариантом комплексный элемент вида (1.1), которому в статико-геометрической аналогии соответствует тот же самый элемент, умноженный на постоянный коэффициент. Найдем условия, при которых комплексный элемент S_e является квазиинвариантом.

Пусть в статико-геометрической аналогии $\xi^*(e)$ является величиной, соответствующей $\xi(e)$, S_e^* — величиной, соответствующей S_e. Применив для соотношения (1.1) статико-геометрическую аналогию, получаем

$$S_e^* = e^* + i\xi^*(e)\,e \tag{1.2}$$

Условие квазиинвариантности для элемента S_e запишется

$$S_e = KS_e^* \tag{1.3}$$

или еще

$$e + i\xi(e)\,e^* = K\,[e^* + i\xi^*(e)\,e]$$

Отсюда, отождествив коэффициенты элементов e и e^*, имеем

$$1 = Ki\xi^*(e), \qquad i\xi(e) = K \tag{1.4}$$

и, следовательно, исключив K, получаем

$$\xi^*(e) = -\frac{1}{\xi(e)} \tag{1.5}$$

Так как комплексный элемент S_e должен быть однородным в смысле размерности, согласно примечанию, сделанному в начале этого параграфа, следует, что $\xi(e)$ имеет размерность силы. Таким образом

$$|\xi(e)| = |F| \tag{1.6}$$

Наиболее общее выражение для $\xi(e)$, составленное из всех констант, входящих в статико-геометрическую аналогию [3], имеет вид

$$\xi(e) = F_1^{\,m}F_2^{\,m'}D_1^{\,p}D_2^{\,p'}\left(\frac{A_{12}}{A_{22}}\right)^q\left(\frac{A_{21}}{A_{22}}\right)^{q'}\left(2\,\frac{A_{13}}{A_{22}}\right)^r\left(2\,\frac{A_{23}}{A_{22}}\right)^{r'}\left(2\,\frac{A_{31}}{A_{22}}\right)^s\left(2\,\frac{A_{32}}{A_{22}}\right)^{s'}\times$$
$$\times\left(4\,\frac{A_{33}}{A_{22}}\right)^t\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}\right)^u\left(\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)^{u'}\left(-\frac{a_{13}}{a_{11}}\right)^v\left(-\frac{a_{23}}{a_{11}}\right)^{v'}\left(-\frac{a_{31}}{a_{11}}\right)^z\left(-\frac{a_{32}}{a_{11}}\right)^{z'}\left(\frac{a_{33}}{a_{11}}\right)^w \tag{1.7}$$

Соотношения (1.5), (1.6) и (1.7) показывают, что можно наложить дополнительное требование независимости $\xi(e)$ от выбранного элемента e. Для этого необходимо, чтобы

$$m=m',\ p=p',\ q=q',\ r=r',\ s=s',\ u=u',\ v=v',\ z=z'$$

Отсюда

$$\xi=(F_1F_2)^m(D_1D_2)^p\left(\frac{A_{12}A_{21}}{A_{22}^2}\right)^q\left(4\,\frac{A_{13}A_{23}}{A_{22}^2}\right)^r\left(4\,\frac{A_{31}A_{32}}{A_{22}^2}\right)^s\left(4\,\frac{A_{33}}{A_{22}}\right)^t\times$$
$$\times\left(\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}^2}\right)^u\left(\frac{a_{13}a_{23}}{a_{11}^2}\right)^v\left(\frac{a_{31}a_{32}}{a_{11}^2}\right)^z\left(\frac{a_{33}}{a_{11}}\right)^w \tag{1.8}$$

В дальнейшем будем писать ξ вместо $\xi(e)$.

Поставим условие (1.6); замечая, что

$$[F_1]=[F_2]=[F][L]^{-1},\quad [D_1]=[D_2]=[F]^{-1}[L[^{-1}\qquad \left(\begin{array}{l}[F]\text{ — размерность силы,}\\ [L]\text{ — размерность длины}\end{array}\right)$$

и что другие скобки в выражении (1.8) — безразмерные величины, имеем

$$m=\frac{1}{4},\qquad p=-\frac{1}{4}$$

причем остальные показатели остаются пока неопределенными.

Наложение условия (1.5) на основе группы соответствий, выведенных в работе [3], приводит к

$$q=-u,\qquad r=-v,\qquad s=-z,\qquad t=-w$$

таким образом

$$\xi=\left(\frac{F_1F_2}{D_1D_2}\right)^{1/4}\left(\frac{A_{12}A_{21}}{a_{12}a_{21}}\,\frac{a_{11}^2}{A_{22}^2}\right)^q\left(4\,\frac{A_{13}A_{23}}{a_{13}a_{23}}\,\frac{a_{11}^2}{A_{22}^2}\right)^r\left(4\,\frac{A_{31}A_{32}}{a_{31}a_{32}}\,\frac{a_{11}^2}{A_{22}^2}\right)^s\left(4\,\frac{A_{33}}{a_{33}}\,\frac{a_{11}}{A_{22}}\right)^t \tag{1.9}$$

Как можно заметить, q, r, s, t остаются произвольными.

Замечание. Если коэффициент ξ определен таким образом, что

$$S_e=e+i\xi e^*$$

является квазиинвариантом, то и

$$S_e'=e+i\xi\lambda e^*$$

является квазиинвариантом, если λ — безразмерно, и удовлетворяет в статико-геометрической аналогии условию

$$\lambda\longleftrightarrow\frac{1}{\lambda} \tag{1.10}$$

Доказательство этого факта очевидно.

В связи с этим в выражении (1.9) можно отбросить неопределенные факторы, которые, как нетрудно проверить, удовлетворяют условию (1.10). Следовательно, можно взять

$$\xi=\left(\frac{F_1F_2}{D_1D_2}\right)^{1/4} \tag{1.11}$$

Используя обозначения, указанные в приложении, мы получим для общего случая

$$\xi=2h^2\sqrt[4]{\frac{1}{9}\,\frac{A_{11}A_{22}}{a_{11}a_{22}}} \tag{1.12}$$

или, если воспользоваться техническими постоянными,

$$\xi=2h^2\sqrt{\frac{E_\alpha E_\beta}{3\Delta_1}}\sqrt[4]{(1-\eta_\alpha\nu_\alpha)(1-\eta_\beta\nu_\beta)} \tag{1.13}$$

где

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -\mu_\alpha & \eta_\alpha \\ -\mu_\beta & 1 & \eta_\beta \\ \nu_\alpha & \nu_\beta & 1 \end{vmatrix} \tag{1.14}$$

В частности, отсюда для изотропной и ортотропной оболочек соответственно имеем

$$\xi = \frac{2h^2E}{\sqrt{3(1-\mu^2)}}, \qquad \xi = \frac{2h^2\sqrt{E_\alpha E_\beta}}{\sqrt{3(1-\mu_\alpha\mu_\beta)}}$$

2. Формулировка уравнений теории тонких упругих однородных оболочек в комплексных величинах. Из приведенного выше вытекает, что группы соотношений, соответствующих между собой в статико-геометрической аналогии, могут быть объединены в квазиинвариантные комплексные системы, причем нововведенные функции являются квазиинвариантами.

Так, например, системы уравнений равновесия в усилиях и уравнений неразрывности деформаций объединяются указанным образом в одну систему, причем новые неизвестные являются комплексными величинами, следовательно [1],

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial\alpha}(B\boldsymbol{T}_1) + \frac{\partial A}{\partial\beta}\boldsymbol{S}_1 - \frac{\partial}{\partial\beta}(A\boldsymbol{S}_2) - \frac{\partial B}{\partial\alpha}\boldsymbol{T}_2 - AB\left(\frac{\boldsymbol{N}_1}{R_1'} - \frac{\boldsymbol{N}_2}{R_{12}}\right) + ABX = 0 \\
\frac{\partial}{\partial\alpha}(B\boldsymbol{S}_1) - \frac{\partial A}{\partial\beta}\boldsymbol{T}_1 + \frac{\partial}{\partial\beta}(A\boldsymbol{T}_2) - \frac{\partial B}{\partial\alpha}\boldsymbol{S}_2 - AB\left(\frac{\boldsymbol{N}_2}{R_2'} - \frac{\boldsymbol{N}_1}{R_{12}}\right) + ABY = 0 \\
AB\left(\frac{\boldsymbol{T}_1}{R_1'} + \frac{\boldsymbol{T}_2}{R_2'} + \frac{\boldsymbol{S}_2 - \boldsymbol{S}_1}{R_{12}}\right) + \frac{\partial}{\partial\alpha}(B\boldsymbol{N}_1) + \frac{\partial}{\partial\beta}(A\boldsymbol{N}_2) + ABZ = 0 \\
\frac{\partial}{\partial\alpha}(B\boldsymbol{H}_1) + \frac{\partial A}{\partial\beta}\boldsymbol{G}_1 - \frac{\partial}{\partial\beta}(A\boldsymbol{G}_2) - \frac{\partial B}{\partial\alpha}\boldsymbol{H}_2 + AB\boldsymbol{N}_2 = 0 \\
\frac{\partial}{\partial\alpha}(B\boldsymbol{G}_1) - \frac{\partial A}{\partial\beta}\boldsymbol{H}_1 + \frac{\partial}{\partial\beta}(A\boldsymbol{H}_2) - \frac{\partial B}{\partial\alpha}\boldsymbol{G}_2 - AB\boldsymbol{N}_1 = 0 \\
\boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2 + \frac{\boldsymbol{H}_1}{R_1'} + \frac{\boldsymbol{H}_2}{R_2'} + \frac{\boldsymbol{G}_2 - \boldsymbol{G}_1}{R_{12}} = 0
\end{gathered} \tag{2.1}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{T}_1 = T_1 + i\xi\varkappa_2, && \boldsymbol{S}_1 = S_1 + i\xi\tau^{(2)}, && \boldsymbol{N}_1 = N_1 - i\xi\zeta_2 \\
&\boldsymbol{T}_2 = T_2 + i\xi\varkappa_1, && \boldsymbol{S}_2 = S_2 + i\xi\tau^{(1)}, && \boldsymbol{N}_2 = N_2 + i\xi\zeta_1 \\
&\boldsymbol{G}_1 = G_1 + i\xi\varepsilon_2, && \boldsymbol{H}_1 = H_1 - i\xi\omega^{(2)} \\
&\boldsymbol{G}_2 = G_2 + i\xi\varepsilon_1, && \boldsymbol{H}_2 = H_2 - i\xi\omega^{(1)}
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Надо заметить, что к системе (2.1) присоединяется и дополнительное уравнение

$$\boldsymbol{H}_1 + \boldsymbol{H}_2 = 0 \tag{2.3}$$

Система (2.1) по виду аналогична системе уравнений равновесия в изотропном случае.

Соотношения между усилиями и функциями напряжений, с одной стороны, и соотношения между деформациями и перемещениями, с другой, могут быть также объединены в единую систему соотношений между

[1] Для простоты записи использована ортогональная система координат, однако результаты верны и в общем случае.

комплексными усилиями и комплексными функциями напряжений следующим образом: (2.4)

$$\boldsymbol{T}_1 = \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial \boldsymbol{c}}{\partial\beta} + \frac{\boldsymbol{b}}{R_2'} - \frac{\boldsymbol{a}}{R_{12}}\right) + \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial \boldsymbol{c}}{\partial\alpha} + \frac{\boldsymbol{a}}{R_1'} - \frac{\boldsymbol{b}}{R_{12}}\right) - \frac{\boldsymbol{n}}{R_{12}}$$

$$\boldsymbol{T}_2 = \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial \boldsymbol{c}}{\partial\alpha} + \frac{\boldsymbol{a}}{R_1'} - \frac{\boldsymbol{b}}{R_{12}}\right) + \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial \boldsymbol{c}}{\partial\beta} + \frac{\boldsymbol{b}}{R_2'} - \frac{\boldsymbol{a}}{R_{12}}\right) + \frac{\boldsymbol{n}}{R_{12}}$$

$$\boldsymbol{S}_1 = -\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial \boldsymbol{c}}{\partial\alpha} + \frac{\boldsymbol{a}}{R_1'} - \frac{\boldsymbol{b}}{R_{12}}\right) + \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial \boldsymbol{c}}{\partial\beta} + \frac{\boldsymbol{b}}{R_2'} - \frac{\boldsymbol{a}}{R'_2}\right) + \frac{\boldsymbol{n}}{R_2}$$

$$\boldsymbol{S}_2 = \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial \boldsymbol{c}}{\partial\beta} + \frac{\boldsymbol{b}}{R_2'} - \frac{\boldsymbol{a}}{R_{12}}\right) - \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial \boldsymbol{c}}{\partial\alpha} + \frac{\boldsymbol{a}}{R_1'} - \frac{\boldsymbol{b}}{R_{12}}\right) + \frac{\boldsymbol{n}}{R_1'}$$

$$\boldsymbol{N}_1 = -\frac{1}{B}\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial\beta} - \frac{1}{R_2'}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial \boldsymbol{c}}{\partial\alpha} + \frac{\boldsymbol{a}}{R_1'} - \frac{\boldsymbol{b}}{R_{12}}\right) - \frac{1}{R_{12}}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial \boldsymbol{c}}{\partial\beta} + \frac{\boldsymbol{b}}{R_2'} - \frac{\boldsymbol{a}}{R_{12}}\right)$$

$$\boldsymbol{N}_2 = \frac{1}{A}\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial\alpha} - \frac{1}{R_1'}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial \boldsymbol{c}}{\partial\beta} + \frac{\boldsymbol{b}}{R_2'} - \frac{\boldsymbol{a}}{R_{12}}\right) - \frac{1}{R_{12}}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial \boldsymbol{c}}{\partial\alpha} + \frac{\boldsymbol{a}}{R_1'} - \frac{\boldsymbol{b}}{R_{12}}\right)$$

$$\boldsymbol{G}_1 = \frac{1}{B}\frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial\beta} + \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\boldsymbol{a} - \frac{\boldsymbol{c}}{R_2'}, \qquad \boldsymbol{H}_1 = \frac{1}{B}\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial\beta} - \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\boldsymbol{b} + \frac{\boldsymbol{c}}{R_{12}} - \boldsymbol{n}$$

$$\boldsymbol{G}_2 = \frac{1}{A}\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial\alpha} + \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\boldsymbol{b} - \frac{\boldsymbol{c}}{R_1'} \qquad \boldsymbol{H}_2 = -\frac{1}{A}\frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial\alpha} + \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\boldsymbol{a} - \frac{\boldsymbol{c}}{R_{12}} - \boldsymbol{n}$$

Здесь

$$\boldsymbol{a} = a + i\xi u, \quad \boldsymbol{b} = b + i\xi v, \quad \boldsymbol{c} = c + i\xi w \tag{2.5}$$

причем через $\boldsymbol{n}$ обозначается

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{2AB}\left[\frac{\partial}{\partial\beta}(A\boldsymbol{a}) - \frac{\partial}{\partial\alpha}(B\boldsymbol{b})\right] \tag{2.6}$$

Функции $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ удовлетворяют условию однородной комплексной системе (2.1), что оправдывает данное им название комплексных функций напряжения. Выражение (2.6) обеспечивает также идентичное удовлетворение дополнительного уравнения (2.3).

Перейдем к случаю уравнений, содержащих величины разнородные.

Два аналогичных уравнения могут быть объединены в квазиинвариантный комплекс под видом единого уравнения, выраженного в квазиинвариантных неизвестных.

Пусть

$$\Sigma L_j(e_j) + \Sigma f_k M_k(e_k^*) = 0 \tag{2.7}$$

— какое-нибудь однородное соотношение, в котором L_j и M_k являются линейными операторами, не содержащими геометрических или упругих констант, входящих в статико-геометрическую аналогию (они могут содержать коэффициенты первой или второй квадратичной формы поверхности), а e_j и e_k^* — соответственно элементы первой и второй групп, умноженные, быть может, на безразмерные константы.

На основании статико-геометрической аналогии существует однородное соотношение, дублирующее выражение (2.7)

$$\Sigma L_j(e_j^*) + \Sigma f_k^* M_k(e_k) = 0 \tag{2.8}$$

где f_k^* — величина, аналогичная f_k. Умножая уравнения (2.8) на $i\xi$ и складывая результат с равенством (2.7), получим

$$\Sigma L_j(e_j + i\xi e_j^*) + \Sigma M_k(f_k e_k^* + i\xi f_k^* e_k) = 0$$

или же

$$\Sigma L_j(e_j + i\xi e_j^*) + i\xi\Sigma f_k^* M_k \left(e_k - i\frac{f_k}{\xi f_k^*} e_k^*\right) = 0 \qquad (2.9)$$

Вполне очевидно, что величины $e_j + i\xi e_j^*$ являются квазиинвариантами и, согласно прежним обозначениям, можем написать: $S_j = e_j + i\xi e_j^*$.

Покажем, во-первых, что

$$e_k - i\frac{f_k}{\xi f_k^*} e_k^*$$

являются квазиинвариантами. Для этого заметим, что

$$\left|\frac{f_k}{\xi f_k^*}\right| = |F|, \qquad \frac{f_k}{\xi f_k^*} \leftarrow\rightarrow \frac{f_k^*}{-f_k/\xi} = -\frac{1}{f_k/\xi f_k^*}$$

и, следовательно,

$$-\frac{f_k}{\xi^2 f_k^*} = \lambda_k \qquad \left(\lambda_k \leftarrow\rightarrow \frac{1}{\lambda_k}\right) \qquad (2.10)$$

Здесь λ_k — безразмерная константа, удовлетворяющая условиям примечания п. 1. Таким образом,

$$e_k - i\frac{f_k}{\xi f_k^*} e_k^* = e_k + i\xi\lambda_k e_k^*$$

является квазиинвариантом. В соответствии с прежними обозначениями, имеем

$$e_k + i\xi\lambda_k e_k^* = \frac{1}{2}[(1+\lambda_k)S_k + (1-\lambda_k)\bar{S}_k]$$

Следовательно, уравнение (2.9) записывается в окончательном виде

$$\Sigma L_j(S_j) + \frac{1}{2} i\xi\Sigma f_k^* M_k[(1+\lambda_k)S_k + (1-\lambda_k)\bar{S}_k] = 0 \qquad (2.11)$$

где λ_k согласно (2.10).

Пример. Для пологой оболочки, отнесенной к линиям кривизны (α, β), получается первое уравнение вида

$$\frac{1}{R_2}\frac{\partial^2 c}{\partial\alpha^2} + \frac{1}{R_1}\frac{\partial^2 c}{\partial\beta^2} - \frac{2Eh^3}{3(1-\mu^2)}\Delta\Delta w = 0$$

причем c является третьей функцией напряжений, а w — нормальным к срединной поверхности смещением. Это уравнение может быть представлено в виде

$$L(c) + fM(w) = 0$$

где

$$L = \frac{1}{R_2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{1}{R_1}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}, \qquad M = \Delta\Delta, \qquad f = -\frac{2Eh^3}{3(1-\mu^2)}$$

По статико-геометрической аналогии $f^* = 1/2Eh$ и, следовательно, из (2.10) вытекает

$$\lambda = -\left[-\frac{2Eh^3}{3(1-\mu^2)} \Big/ \left(\frac{2Eh^2}{\sqrt{3(1-\mu^2)}}\right)^2 \frac{1}{2Eh}\right] = 1$$

Таким образом, на основании (2.10) получим

$$L(c) + \frac{ih}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} M(c) = 0$$

так как $c \leftarrow\rightarrow w$, т. к.

$$\frac{1}{R_2}\frac{\partial^2 c}{\partial\alpha^2} + \frac{1}{R_1}\frac{\partial^2 c}{\partial\beta^2} + \frac{ih}{\sqrt{3(1-\mu^2)}}\Delta\Delta c = 0$$

3. Дополнительные уравнения теории тонких анизотропных оболочек. Результат предыдущего параграфа позволяет написать уравнения Гука в виде трех недифференциальных линейных соотношений, связывающих комплексные моменты $\boldsymbol{G}_1$, $\boldsymbol{G}_2$, $\boldsymbol{H}_1$ и комплексные усилия $\boldsymbol{T}_1$, $\boldsymbol{T}_2$ и $\boldsymbol{S}_1$. Эти уравнения назовем дополнительными.

Воспользуемся соотношениями

$$G_1 = -\frac{2h^3}{3}A_{22}\left(\frac{A_{11}}{A_{22}}\varkappa_1 + \frac{A_{12}}{A_{22}}\varkappa_2 + 2\frac{A_{13}}{A_{22}}\tau\right)$$
$$G_2 = -\frac{2h^3}{3}A_{22}\left(\frac{A_{21}}{A_{22}}\varkappa_1 + \varkappa_2 + 2\frac{A_{23}}{A_{22}}\tau\right)$$
$$H_1 = -H_2 = \frac{2h^3}{3}A_{22}\left(\frac{A_{31}}{A_{22}}\varkappa_1 + \frac{A_{32}}{A_{22}}\varkappa_2 + 2\frac{A_{33}}{A_{22}}\tau\right)$$

При помощи изложенного выше способа отсюда дополнительные уравнения получим в виде (3.1)

$$\boldsymbol{G}_1 = \frac{ic_3}{2}\{a_{21}[(1+\lambda_1)\boldsymbol{T}_1 + (1-\lambda_1)\overline{\boldsymbol{T}}_1] + a_{22}[(1+\lambda_2)\boldsymbol{T}_2 + (1-\lambda_2)\overline{\boldsymbol{T}}_2] + $$
$$+ a_{23}[(1+\lambda_3)\boldsymbol{S}_1 + (1-\lambda_3)\overline{\boldsymbol{S}}_1]\}$$
$$\boldsymbol{G}_2 = \frac{ic_3}{2}\left\{a_{11}\left[\left(1+\frac{1}{\lambda_1}\right)\boldsymbol{T}_1 + \left(1-\frac{1}{\lambda_2}\right)\overline{\boldsymbol{T}}_1\right] + \right.$$
$$\left. + a_{12}[(1+\lambda_4)\boldsymbol{T}_2 + (1-\lambda_4)\overline{\boldsymbol{T}}_2] + a_{13}[(1+\lambda_5)\boldsymbol{S}_1 + (1-\lambda_5)\boldsymbol{S}_1]\right\}$$
$$\boldsymbol{H}_1 = \frac{ic_3}{4}\{a_{31}[(1+\lambda_6)\boldsymbol{T}_1 + (1-\lambda_6)\overline{\boldsymbol{T}}_1] + a_{32}[(1+\lambda_7)\boldsymbol{T}_2 + (1-\lambda_7)\overline{\boldsymbol{T}}_2] + $$
$$+ a_{33}[(1+\lambda_8)\boldsymbol{S}_1 + (1-\lambda_8)\overline{\boldsymbol{S}}_1]\}$$

где

$$c_3 = h\sqrt[4]{\frac{A_{11}A_{22}}{9a_{11}a_{22}}}, \quad \lambda_1 = \frac{A_{12}}{a_{21}}\sqrt{\frac{a_{11}a_{21}}{A_{11}A_{22}}}, \quad \lambda_2 = \sqrt{\frac{A_{11}a_{11}}{A_{22}a_{22}}}$$
$$\lambda_3 = -\frac{2A_{13}}{a_{13}}\sqrt{\frac{a_{11}a_{22}}{A_{11}A_{22}}}, \quad \lambda_4 = \frac{A_{21}}{a_{12}}\sqrt{\frac{a_{11}a_{22}}{A_{11}A_{22}}}, \quad \lambda_5 = -\frac{2A_{23}}{a_{13}}\sqrt{\frac{a_{11}a_{22}}{A_{11}A_{22}}}$$
$$\lambda_6 = -\frac{2A_{32}}{a_{31}}\sqrt{\frac{a_{11}a_{22}}{A_{11}A_{22}}}, \quad \lambda_7 = -\frac{2A_{31}}{a_{32}}\sqrt{\frac{a_{11}a_{22}}{A_{11}A_{22}}}, \quad \lambda_8 = \frac{4A_{33}}{a_{33}}\sqrt{\frac{a_{11}a_{22}}{A_{11}A_{22}}}$$

Таким образом, системы (2.1), (2.4) и (3.1) объединяют все основные уравнения теории тонких однородных оболочек.

Приложение. Используя обозначения в книге А. Л. Гольденвейзера [1], приводим выражения закона Гука [3]:
тангенциальные усилия

$$T_1 = 2hA_{22}\left(\frac{A_{11}}{A_{22}}\varepsilon_1 + \frac{A_{12}}{A_{22}}\varepsilon_2 + \frac{A_{13}}{A_{22}}\omega\right)$$
$$T_2 = 2hA_{22}\left(\frac{A_{21}}{A_{22}}\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \frac{A_{23}}{A_{22}}\omega\right)$$
$$S_1 = -S_2 = 2hA_{22}\left(\frac{A_{31}}{A_{22}}\varepsilon_1 + \frac{A_{32}}{A_{22}}\varepsilon_2 + \frac{A_{33}}{A_{22}}\omega\right)$$

моменты

$$G_1 = -\frac{2h^3}{3}A_{22}\left(\frac{A_{11}}{A_{22}}\varkappa_1 + \frac{A_{12}}{A_{22}}\varkappa_2 + 2\frac{A_{13}}{A_{22}}\tau\right)$$
$$G_2 = -\frac{2h^3}{3}A_{22}\left(\frac{A_{21}}{A_{22}}\varkappa_1 + \varkappa_2 + 2\frac{A_{23}}{A_{22}}\tau\right)$$
$$H_1 = -H_2 = \frac{2h^3}{3}A_{22}\left(\frac{A_{31}}{A_{22}}\varkappa_1 + \frac{A_{32}}{A_{22}}\varkappa_2 + 2\frac{A_{33}}{A_{22}}\tau\right)$$

По отношению к компонентам деформации закон Гука записывается в виде

$$\varepsilon_1 = \frac{a_{11}}{2h}\left(T_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} T_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}} S_1\right)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{11}}{2h}\left(\frac{a_{21}}{a_{11}} T_1 + \frac{a_{22}}{a_{11}} T_2 + \frac{a_{23}}{a_{11}} S_1\right)$$

$$\omega = \frac{a_{11}}{2h}\left(\frac{a_{31}}{a_{11}} T_1 + \frac{a_{32}}{a_{11}} T_2 + \frac{a_{33}}{a_{11}} S_1\right)$$

$$\varkappa_1 = -\frac{3}{2h^3} a_{11}\left(G_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} G_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}} H_1\right), \qquad \varkappa_2 = -\frac{3}{2h^3} a_{11}\left(\frac{a_{21}}{a_{11}} G_1 + \frac{a_{22}}{a_{11}} G_2 - \frac{a_{23}}{a_{11}} H_1\right)$$

$$\tau = -\frac{3}{2h^3} a_{11}\left(\frac{a_{31}}{2a_{11}} G_1 + \frac{a_{32}}{2a_{11}} G_2 - \frac{a_{33}}{2a_{11}} H_1\right)$$

Закон Гука выражает наличие плоскости упругой симметрии, касательной в каждой точке трехмерной среды, занимаемой данной оболочкой, к поверхности, равноотстоящей от срединной поверхности [3, 9, 10].

Упругие константы A_{ij} и коэффициенты деформации a_{ij} определяются формулами

$$A_{i} = \frac{(-1)^{i+j} a_{ij}}{D}, \qquad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$a_{11} = \frac{1}{E_\alpha}, \quad a_{12} = -\frac{\mu_\mu}{E_\alpha}, \quad a_{13} = \frac{\eta_\alpha}{E_\alpha}$$

$$a_{21} = -\frac{\mu_\beta}{E_\beta}, \quad a_{22} = \frac{1}{E_\beta}, \quad a_{23} = \frac{\eta_\beta}{E_\beta}$$

$$a_{31} = \frac{\nu_\alpha}{G}, \quad a_{32} = \frac{\nu_\beta}{C}, \quad a_{33} = \frac{1}{G}$$

где $(-1)^{i+j} a_{ij}$ — алгебраическое дополнение элемента a_{ij}.

Физический смысл этих констант [9] очевиден.

Приводим соотношения статико-геометрической аналогии для анизотропного случая [3]

$$F_1 = 2hA_{11}, \quad D_1 = \frac{3}{2h^3} a_{11}, \quad F_2 = 2hA_{22}, \quad D_2 = \frac{3}{2h^3} a_{22}, \quad F_1 \leftarrow\rightarrow -D_2, \quad F_2 \leftarrow\rightarrow -D_1$$

$$\frac{A_{12}}{A_{22}} \leftarrow\rightarrow \frac{a_{21}}{a_{11}}, \quad \frac{A_{21}}{A_{22}} \leftarrow\rightarrow \frac{a_{12}}{a_{11}}, \quad 2\frac{A_{13}}{A_{22}} \leftarrow\rightarrow -\frac{a_{23}}{a_{11}}, \quad 2\frac{A_{23}}{A_{22}} \leftarrow\rightarrow -\frac{a_{13}}{a_{11}}$$

$$2\frac{A_{31}}{A_{22}} \leftarrow\rightarrow -\frac{a_{32}}{a_{11}}, \quad 2\frac{A_{32}}{A_{22}} \leftarrow\rightarrow -\frac{a_{31}}{a_{11}}, \quad 4\frac{A_{33}}{A_{22}} \leftarrow\rightarrow \frac{a_{33}}{a_{11}}$$

Поступила 28 III 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. Гостехиздат, М., 1953.
2. Visarion V., Stănescu C. Extinderea analogiei staticogeometrice pentru invelitorile elastice subtiri cu ortotropie de material. Comun. Acad. RPR 1957, t. VII, N 3.
3. Stănescu C., Visarion V. Extinderea analogiei statico geometrice pentru invelitorile elastice subtiri cu anizotropie de material. Studii si Cercetări mec apl. Acad. RPR, 1959, t. X, № 3.
4. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Судпромгиз, М.— Л. 1951.,
5. Гольденвейзер А. Л. Исследование напряженного состояния сферической оболочки. ПММ, 1944, т. VIII, вып. 6.
6. Гольденвейзер А. Л. Уравнения теории оболочек в перемещениях и функциях напряжений. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 6.
7. Visarion V. On a method for solving the problem of thin shells. Rev. Méc. Appl. 1957, т. II, № 2
8. Стэнеску К., Висарион В. Статико-геометрическая аналогия для тонких упругих оболочек с ортотропией материала и ее применения к расчету пологих оболочек и цилиндрических оболочек круглого сечения. Revue de mécanique appliquée, 1958, т. III, № 1, Bucarest.
9. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М.— Л., Гостехиздат, 1950.
10. Sokolnikoff I. L. Mathematical Theory of Elasticity. Mc. Graw-Hill, 1956.
11. Черных К. Ф. О вариационном принципе комплексной теории оболочек. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 2.