

## О РАВНОВЕСИИ И РАСПРОСТРАНЕНИИ ТРЕЩИН В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

Г. И. Баренблатт, Г. П. Черепанов

(Москва)

На основе представлений, изложенных в работах [1,2], рассматриваются некоторые задачи равновесия и распространения прямолинейных трещин в анизотропной среде<sup>1</sup>.

§ 1. Основные соотношения. Рассмотрим движение упругой анизотропной среды в условиях плоской деформации. Уравнения движения представим в виде

$$\frac{\partial \sigma_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (i = 1, 2) \quad (1.1)$$

Здесь и в дальнейшем предполагается суммирование по повторяющемуся греческому индексу значений, соответствующих единице и двум;  $\sigma_{i\alpha}$  — компоненты тензора напряжений,  $u_i$  — компоненты вектора смещений,  $x_\alpha$  — прямоугольные декартовы координаты,  $t$  — время,  $\rho$  — плотность среды. Для анизотропного тела, у которого плоскость  $x_1x_2$  является плоскостью упругой симметрии, обобщенный закон Гука имеет вид [3]

$$\sigma_{ij} = b_{ij\beta\gamma} \varepsilon_{\beta\gamma} \quad \left( \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \right) \quad (1.2)$$

Здесь  $\varepsilon_{ij}$  — компоненты тензора деформации. Величины  $b_{ij\beta\gamma}$  представляют собой упругие постоянные материала, причем

$$b_{ij\beta\gamma} = b_{\gamma\beta ji} = b_{ij\gamma\beta} = b_{ji\gamma\beta}$$

Таким образом, в общем случае рассматриваемое тело характеризуется шестью независимыми константами, в качестве которых выберем  $b_{1111}$ ,  $b_{1112}$ ,  $b_{1122}$ ,  $b_{1212}$ ,  $b_{2122}$ ,  $b_{2222}$ . Для ортотропного тела  $b_{1112} = b_{2122} = 0$ .

Для изотропного тела, кроме того,  $b_{1111} = b_{2222}$ ,  $b_{1122} = b_{1111} - 2b_{1212}$ . Подставляя (1.2) в (1.1), получаем основные динамические уравнения

$$L_{i\alpha} u_\alpha = 0, \quad L_{ij} = \frac{1}{2} (b_{i\alpha\beta i} + b_{i\alpha j\beta}) \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta_{ij} \quad (1.3)$$

где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера, так что  $L_{ij} = L_{ji}$ .

Общее решение системы уравнений (1.3) имеет вид

$$u_1 = L_{22} \Psi_2 - L_{12} \Psi_1, \quad u_2 = L_{11} \Psi_1 - L_{12} \Psi_2 \quad (1.4)$$

<sup>1</sup> Пользуюсь случаем внести некоторое уточнение в работу [2]. Формула (4.4) должна быть записана следующим образом ( $h = \sqrt{R^2 - x^2}$ )

$$\delta_2 W = \iint_{\delta S} \sigma_y v dS = \frac{(1 - \nu^2) N^2}{\pi^2 E} \int_{-R}^R dx \int_0^h \sqrt{\frac{R-y}{y}} dy = \frac{(1 - \nu^2) N^2 \delta S}{2\pi E}$$

Сделанное исправление для последующего изложения не имеет значения.

где функции  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$  удовлетворяют уравнению

$$(L_{11}L_{22} - L_{12}^2) \Psi = 0 \quad (1.5)$$

Для намеченных целей достаточно исследовать случай  $\Psi_1 = \Psi$ ,  $\Psi_2 = 0$ . Ниже рассматривается в различных вариантах смешанная задача динамической теории упругости для анизотропной полуплоскости, стационарная в подвижной системе координат  $\xi_1, \xi_2$  движущейся в направлении отрицательной оси  $x_1$  с постоянной скоростью  $v$

$$\xi_i = x_i + vt\delta_{i1} \quad (1.6)$$

(в частности, при  $v = 0$  получаем статические задачи).

В стационарном случае функция  $\Psi$  зависит только от  $\xi_1$  и  $\xi_2$  и не зависит от времени явно, так что

$$L_{ij}\Psi = A_{ij\alpha\beta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi_\alpha \partial \xi_\beta}, \quad A_{ij\alpha\beta} = \frac{1}{2} (b_{i\alpha\beta j} + b_{i\alpha j\beta}) - \rho v^2 \delta_{ij} \delta_{1\alpha} \delta_{1\beta} \quad (1.7)$$

и основное уравнение (1.5) принимает вид

$$B_{\alpha\beta\gamma\epsilon} \frac{\partial^4 \Psi}{\partial \xi_\alpha \partial \xi_\beta \partial \xi_\gamma \partial \xi_\epsilon} = 0, \quad B_{\alpha\beta\gamma\epsilon} = A_{11\alpha\beta} A_{22\gamma\epsilon} - A_{12\alpha\beta} A_{12\gamma\epsilon} \quad (1.8)$$

Соответствующее характеристическое уравнение записывается в форме

$$B_{\alpha\beta\gamma\epsilon} \mu^{\delta_{\alpha 1} + \delta_{\beta 1} + \delta_{\gamma 1} + \delta_{\epsilon 1}} = 0 \quad (1.9)$$

В дальнейшем будет рассматриваться только эллиптический случай, когда среди корней уравнения (1.9) нет действительных. Как показано С. Г. Лехницким [4], для статической задачи всегда имеет место эллиптический случай; по соображениям непрерывности эллиптичность имеет место для достаточно малых скоростей. Для ортотропного тела, если граница полуплоскости является линией упругой симметрии, уравнение (1.9) становится биквадратным

$$L\mu^4 + M\mu^2 + N = 0 \quad (1.10)$$

где

$$L = b_{1212} b_{2222}, \quad N = (b_{1111} - \rho v^2) (b_{1212} - \rho v^2) \\ M = b_{1111} b_{2222} - b_{1122}^2 - 2b_{1212} b_{1122} - \rho v^2 (b_{1212} + b_{2222})$$

Подчеркнем, что в случае ортотропного тела корни характеристического уравнения не обязательно чисто мнимые.

Используя метод, предложенный С. Г. Лехницким [5] для статической задачи плоской теории упругости анизотропной среды и впоследствии примененный Л. А. Галиным [6] в задаче о штампе, движущемся вдоль границы изотропной полуплоскости, запишем общее решение уравнения (1.8) в виде

$$\Psi = 2 \operatorname{Re} [F_1(z_1) + F_2(z_2)], \quad z_i = \xi_1 + \mu_i \xi_2 \quad (1.11)$$

где  $F_1, F_2$  — произвольные аналитические функции, а  $\mu_1, \mu_2, \bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2$  — корни характеристического уравнения. Подставляя (1.11) в (1.4) и (1.2), получаем выражения для смещений и напряжений в виде

$$u_i = 2 \operatorname{Re} [d_{i\alpha} \varphi_\alpha(z_\alpha)], \quad \sigma_{ij} = 2 \operatorname{Re} [e_{ij\alpha} \varphi_\alpha'(z_\alpha)] \quad (\varphi_j(z_j) = F_j''(z_j)) \quad (1.12)$$

Здесь коэффициенты  $d_{ij}$ ,  $e_{ijk}$  определяются формулами

$$d_{1j} = -b_{1112} - (b_{1122} + b_{1212})\mu_j - b_{1222}\mu_j^2 \quad (1.13)$$

$$d_{2j} = b_{1111} - \rho v^2 + 2b_{1112}\mu_j + b_{1212}\mu_j^2$$

$$e_{11j} = \mu_j(b_{1112}^2 - b_{1111}b_{1212}) + \mu_j^2(b_{1112}b_{1122} - b_{1111}b_{1222}) + \\ + \mu_j^3(b_{1122}b_{1212} - b_{1112}b_{1222}) - \rho v^2(b_{1112} + \mu_j b_{1122})$$

$$e_{12j} = (b_{1111}b_{1212} - b_{1112}^2) - \rho v^2(b_{1212} + \mu_j b_{2122}) + \\ + \mu_j[b_{1111}b_{2122} - b_{1122}b_{1112} + \mu_j(b_{1112}b_{2122} - b_{1212}b_{1122})]$$

$$e_{22j} = (b_{2122}b_{1111} - b_{1112}b_{1122}) + \mu_j[b_{2122}b_{1112} - b_{1122}(b_{1122} + b_{1212}) + \\ + b_{1111}b_{2222} + 2\mu_j b_{2222}b_{1112} + \mu_j^2(b_{1212}b_{2222} - b_{2122}^2)] - \rho v^2(b_{2122} + \mu_j b_{2222})$$

**§ 2. Общая задача для полуплоскости. Поверхностные волны Релея. Движущийся штамп.** 1°. Пусть на границе нижней полуплоскости  $\xi_2 \leq 0$  приложены распределенные по некоторому закону нормальные и касательные напряжения, причем распределения этих напряжений равномерно движутся вдоль границы полуплоскости со скоростью  $v$ .

Следуя Л. А. Галину [6], введем аналитические функции

$$w_1(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma(\xi) d\xi}{\xi - z} = U_1 - iV_1, \quad w_2(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau(\xi) d\xi}{\xi - z} = U_2 - iV_2 \quad (2.1)$$

где  $\sigma(\xi_1)$  и  $\tau(\xi_1)$ , соответственно, — распределения нормальных и касательных напряжений на границе. Имеем

$$\tau(\xi_1) = 2 \operatorname{Re} [e_{121}\varphi_1'(\xi_1) + e_{122}\varphi_2'(\xi_1)] \\ \sigma(\xi_1) = 2 \operatorname{Re} [e_{221}\varphi_1'(\xi_1) + e_{222}\varphi_2'(\xi_1)] \quad (2.2)$$

откуда и из (2.1) получаем

$$e_{121}\varphi_1'(z) + e_{122}\varphi_2'(z) = \frac{1}{4\pi i} w_2(z), \quad e_{221}\varphi_1'(z) + e_{222}\varphi_2'(z) = \frac{1}{4\pi i} w_1(z)$$

Разрешая эту систему относительно  $\varphi_1'(z)$  и  $\varphi_2'(z)$ , находим (2.3)

$$\varphi_1'(z) = \frac{1}{4\pi i \Delta} [e_{222}w_2(z) - e_{122}w_1(z)], \quad \varphi_2'(z) = -\frac{1}{4\pi i \Delta} [e_{221}w_2(z) - e_{121}w_1(z)]$$

где

$$\Delta = e_{121}e_{222} - e_{122}e_{221} \quad (2.4)$$

Дифференцируя (1.12) по  $\xi_1$  и переходя к пределу при  $\xi_2 = -0$ , получаем

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_1}\right)_{\xi_2=0} = \operatorname{Re} \left[ \frac{d_{12}e_{121} - d_{11}e_{122}}{2\pi i \Delta} w_1(\xi_1) + \frac{d_{11}e_{222} - d_{12}e_{221}}{2\pi i \Delta} w_2(\xi_1) \right] \quad (2.5)$$

$$\left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi_1}\right)_{\xi_2=0} = \operatorname{Re} \left[ \frac{d_{22}e_{121} - d_{21}e_{122}}{2\pi i \Delta} w_1(\xi_1) + \frac{d_{21}e_{222} - d_{22}e_{221}}{2\pi i \Delta} w_2(\xi_1) \right] \quad (2.6)$$

где  $w_1(\xi_1)$ ,  $w_2(\xi_1)$  — предельные значения функций при подходе к точкам оси абсцисс снизу, равные по формулам Сохоцкого—Племели [7]:

$$w_1(\xi_1) = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma(\xi) d\xi}{\xi - \xi_1} - i\pi\sigma(\xi_1), \quad w_2(\xi_1) = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau(\xi) d\xi}{\xi - \xi_1} - i\pi\tau(\xi_1) \quad (2.7)$$

Формулы (2.5), (2.6) и (2.7) дают возможность свести стационарную смешанную задачу динамической теории упругости для анизотропной полуплоскости к хорошо изученной задаче Гильберта теории аналитических функций (методы решения задачи Гильберта можно найти в монографиях Н. И. Мусхелишвили [8] и Ф. Д. Гахова [9]).

В частности, в случае ортотропного тела, если граница полуплоскости является линией упругой симметрии, величины

$$C = \frac{d_{22}e_{121} - d_{21}e_{122}}{2\pi i \Delta}, \quad D = \frac{d_{22}e_{221} - d_{21}e_{222}}{2\pi \Delta} \quad (2.8)$$

действительны, даже если корни характеристического уравнения (1.10) не являются чисто мнимыми, так что формула (2.6) принимает вид

$$\left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi_1}\right)_{\xi_2=0} = CU_1(\xi_1) + DV_2(\xi_1) \quad (2.9)$$

2°. Имея в виду дальнейшее использование, рассмотрим в качестве первого примера поверхностные волны на границе анизотропной полуплоскости. Другими методами эта задача изучалась в работах ряда авторов; обзор и изложение этих работ с единой точки зрения даны Схольте [10].

Если на свободной поверхности покоящегося полупространства создается мгновенное возмущение, то, спустя много времени после создания возмущения, объемные волны уходят на бесконечность и там затухают остаются только поверхностные волны (если они существуют), которые перемещаются вдоль границы полупространства с постоянной скоростью  $v$ , не изменяя своей формы.

Исследование поверхностных волн представляет собой простейший случай сформулированной выше общей смешанной задачи. Из условия отсутствия на свободной поверхности нормальных и касательных напряжений и соотношений (1.13) находим

$$\operatorname{Re} [e_{121}\varphi_1'(\xi_1) + e_{122}\varphi_2'(\xi_1)] = 0, \quad \operatorname{Re} [e_{221}\varphi_1'(\xi_1) + e_{222}\varphi_1''(\xi_1)] = 0 \quad (2.10)$$

Чтобы краевые условия (2.10) определяли нетривиальные решения, необходимо удовлетворить условию

$$\Delta = e_{121}e_{222} - e_{122}e_{221} = 0 \quad (2.11)$$

Вместе с характеристическим уравнением (1.9) соотношение (2.11) определяет скорость распространения поверхностных волн, если эти волны существуют. В случае ортотропного тела, если граница полупространства является плоскостью упругой симметрии, характеристическое уравнение (1.10) решается в явном виде; подставляя его решение в соответствующее этому случаю уравнение (2.11), получаем уравнение для скорости распространения поверхностных волн в виде

$$PR - PS \frac{M}{L} + (PS + QR) \sqrt{\frac{N}{L}} - QS \frac{N}{L} = 0 \quad (2.12)$$

Здесь

$$\begin{aligned} P &= b_{1111} - \rho v^2, & Q &= b_{1122} \\ R &= b_{2222}(b_{1111} - \rho v^2) - b_{2211}(b_{1212} + b_{1122}) \\ S &= b_{1212}b_{2222} \end{aligned}$$

а величины  $L$ ,  $M$ ,  $N$  представляют собой коэффициенты характеристического уравнения (1.10). В случае изотропного тела отсюда получаем обычное уравнение Релея [3]

$$\left(1 - \frac{1}{2} m^2\right)^2 - \sqrt{1 - m^2} \sqrt{1 - \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} m^2} = 0, \quad m = \frac{\nu}{c_2} \quad (2.13)$$

где  $c_2$  — скорость распространения волн искажения в теле,  $\nu$  — коэффициент Пуассона; уравнение (2.13), как известно, при  $-1 \leq \nu \leq 1/2$  имеет единственный действительный корень  $m_0 < 1$ . В случае анизотропии общего типа уравнения (1.9) и (2.11) определяют комплексные значения  $\nu^2$ . Это означает, что при произвольной анизотропии поверхностных волн не существует. Представляет большой интерес не проведенное до сих пор полное исследование случаев, для которых уравнение (2.12) имеет действительный корень, т. е. случаев существования поверхностных волн на границе ортотропного тела. Заметим, что из доказательства существования единственного положительного корня уравнения Релея [11] и соображений непрерывности непосредственно вытекает существование единственного положительного корня уравнения (2.12) для слабоанизотропных тел.

3°. В качестве второго примера рассмотрим задачу о штампе, движущемся вдоль границы  $\xi_2 = 0$  анизотропной упругой полуплоскости при наличии кулоновского трения на поверхности соприкосновения штампа с телом. Граничные условия для этой задачи, очевидно, имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{12} = \sigma_{22} = 0 \quad (-\infty < \xi_1 < a, b < \xi_1 < \infty) \quad (2.14) \\ \sigma_{12} = k\sigma_{22}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} = f'(\xi_1), \quad \int_a^b \sigma_{22}(\xi) d\xi = P \quad (a \leq \xi_1 \leq b) \end{aligned}$$

где  $a$ ,  $b$  — координаты граничных точек линии соприкосновения штампа с полуплоскостью,  $k$  — коэффициент кулоновского трения,  $f(t)$  — функция, определяющая форму штампа, а  $P$  — сила, прижимающая штамп к телу. Соответствующие краевые условия задачи Гильберта для определения функции  $w_1(z) = w_2(z)/k$  получаются согласно формулам (2.6), (2.7) в виде

$$\begin{aligned} V_1 = 0 \quad (-\infty < \xi_1 < a, b < \xi_1 < \infty) \\ \operatorname{Re} \{(C + ikD) w_1(\xi_1)\} = f'(\xi_1) \quad (a \leq \xi_1 \leq b) \quad (2.15) \end{aligned}$$

Параметры  $C$  и  $D$ , определяемые выражениями (2.8), в случае анизотропии общего вида являются комплексными. Определим константы  $p$  и  $q$  соотношениями

$$\operatorname{Re}(C + ikD) = \frac{1}{\pi p}, \quad \operatorname{Im}(C + ikD) = \frac{kq}{\pi p} \quad (2.16)$$

Тогда второе условие (2.15) переписывается в виде

$$\pi p f'(\xi_1) = U_1 + kqV_1 \quad (2.17)$$

так что для определения функции  $w_1(z)$  получается та же краевая задача, что и в случае подвижного штампа, движущегося по изотроп-

ной полуплоскости [6]. Решение этой краевой задачи можно найти в книге Л. А. Галина [6]. Используя формулы (1.12) и выражая функции  $\varphi_j'(z)$  через  $w_1(z)$  по формулам (2.3), можно представить напряжения в упругом теле в виде

$$\sigma_{ij} = \frac{\Phi(\xi_1, \xi_2)}{\Delta}$$

где  $\Phi$  — некоторая функция, остающаяся конечной при стремлении скорости штампа к скорости поверхностных волн Релея, если таковые существуют, тогда как величина  $\Delta$ , определяемая соотношением (2.4), при этом стремится к нулю. Таким образом, как и в случае изотропного тела [12], при приближении скорости движения штампа к скорости поверхностных волн, если эти волны существуют, возникают своеобразные резонансные явления, связанные с безграничным возрастанием напряжений в упругом теле. На самом деле, это связано с радикальной перестройкой движения при околорелеевских скоростях, что ограничивает постановку рассматриваемой задачи дорелеевскими скоростями. Если характер анизотропии таков, что поверхностных волн не существует, то резонанса не возникает и принятая постановка задачи и метод решения применимы вплоть до максимальных скоростей, до достижения которых уравнение (1.8) имеет эллиптический тип.

**§ 3. Изолированная прямолинейная трещина в ортотропном теле.** Рассмотрим изолированную прямолинейную трещину в ортотропном бесконечном теле в условиях плоской деформации, простирающуюся вдоль некоторой линии упругой симметрии, которую примем за ось  $x_1$ . Трещина поддерживается в раскрытом состоянии некоторой системой нагрузок, симметричной относительно оси  $x_1$ . Вполне аналогично соответствующему исследованию для изотропного тела [1] достаточно рассмотреть случай, когда трещина поддерживается симметричными нормальными напряжениями  $-p(x_1)$ , равными по величине и противоположными по знаку разрывающим напряжениям  $p(x_1)$ , которые были бы на месте трещины в сплошном теле. Трещину естественно считать неподвижной, несмотря на то, что приводимые ниже соотношения дают решение задачи для трещины, движущейся с постоянной скоростью  $v$ , и, в частности, для неподвижной трещины. Задача о движущейся трещине фиксированной длины в однородном поле для случая изотропного тела была рассмотрена Иоффе [13], однако самая постановка такой задачи представляется физически мало естественной.

Рассматриваемая задача симметрична относительно линии трещины, поэтому достаточно исследовать одну нижнюю полуплоскость  $\xi_2 \leq 0$ . Соответствующая граничная задача теории упругости для нижней полуплоскости  $\xi_2 \leq 0$  формулируется следующим образом:

$$\begin{aligned} u_2 = 0, \quad \sigma_{12} = 0 \quad & (-\infty < \xi_1 \leq a, b \leq \xi_1 < \infty) \\ \sigma_{22} = -g(\xi_1), \quad \sigma_{12} = 0 \quad & (a < \xi_1 < b) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь  $-g(\xi_1)$  — распределение действующих нагрузок и сил сцепления. В рассматриваемом случае функция  $w_2(z)$  тождественно равна нулю; из соотношений (2.6), (2.7) и (3.1) получаем граничные условия

задачи Гильберта для определения функции  $w_1(z)$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} [Cw_1(\xi_1)] &= 0 & (-\infty < \xi_1 \leq a, b \leq \xi_1 < \infty) \\ V_1 &= -\pi g(\xi_1) & (a < \xi_1 < b) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Для ортотропного тела и трещины, простирающейся вдоль линии упругой симметрии, константа  $C$ , определяемая формулой (2.8), действительна, поэтому ее можно сократить, и для определения функции  $w_1(z)$  получается та же граничная задача, что и в случае изотропного тела; различие сказывается только впоследствии, в выражениях для напряжений и смещений. Согласно формуле Келдыша—Седова [7] имеем

$$w_1(z) = -\frac{1}{V(z-a)(z-b)} \int_a^b \frac{V(t-a)(t-b)g(t)dt}{t-z} \quad (3.3)$$

Основные гипотезы о малости и автономности концевой области трещины, в которой действуют силы молекулярного сцепления [1,2], и условие конечности напряжений на концах трещины в рассматриваемом случае можно применять так же, как и в случае изотропного тела; таким образом, аналогично [1] имеет место условие, определяющее положение концов трещин: разрывающее напряжение  $\sigma_{22}$  вблизи конца трещины, вычисленное без учета сил молекулярного сцепления, обращается в бесконечность по закону

$$\sigma_{22} = \frac{K}{\pi V s} \quad \left( K = \int_0^d \frac{G(t)dt}{V t} \right) \quad (3.4)$$

Здесь  $s$  — расстояние от конца трещины,  $K$  — модуль сцепления [1],  $G(t)$  — распределение сил молекулярного сцепления в концевой области трещины, где действуют эти силы, а  $d$  — продольный размер концевой области.

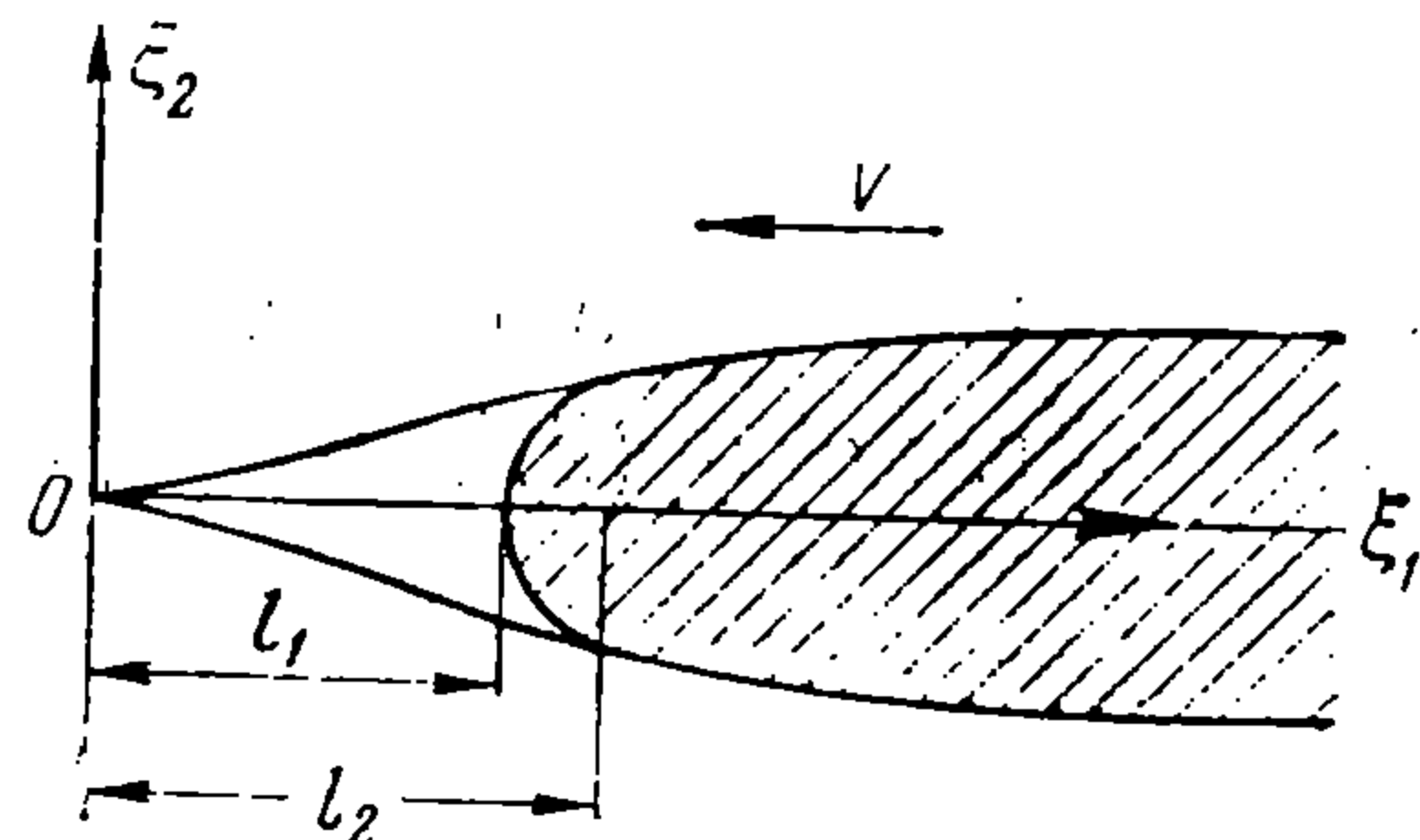
Условие (3.4) справедливо для всех равновесных трещин в ортотропных телах, располагающихся вдоль линии упругой симметрии. Заметим, что в отличие от случая изотропного тела, величина постоянной  $K$  зависит от того, вдоль какой из плоскостей упругой симметрии располагается трещина.

В частности, в рассматриваемом случае изолированной равновесной трещины условия, определяющие концы трещин  $a$  и  $b$ , имеют вид

$$\int_a^b p(t) \sqrt{\frac{t-a}{b-t}} dt = K \sqrt{b-a}, \quad \int_a^b p(t) \sqrt{\frac{b-t}{t-a}} dt = K \sqrt{b-a} \quad (3.5)$$

Внешне эти условия совпадают с соответствующими условиями для изотропного тела [1]. Отличие сказывается в том, что при приложении разрывающих нагрузок внутри тела, а не на поверхности трещины, распределение  $p(x_1)$  для анизотропного тела существенно отличается от распределения для изотропного тела; кроме того, модуль сцепления  $K$  зависит от направления трещины. Отметим, что задача об изолированной прямолинейной трещине в анизотропном теле рассматривалась Стро [14]. Однако, вследствие сложности использованного им энергетического подхода, Стро не получил окончательного решения.

§ 4. Расклинивание анизотропного тела. 1°. Пусть ортотропное тело с плоскостями упругой симметрии, параллельными осям  $x_1$  и  $x_2$ , расклинивается в условиях плоской деформации тонким, абсолютно жестким бесконечным клином, движущимся с постоянной скоростью  $v$  в направлении отрицательной оси  $x_1$ . Перед клином образуется свободная трещина; начало координат выберем в точке смыкания трещины (фигура). На поверхности соприкосновения клина с расклиниваемым телом действуют силы кулонова трения.



Ввиду симметрии задачи относительно оси  $\xi_1$  можно рассматривать движение в одной только нижней полуплоскости  $\xi_2 \leq 0$ .

Тонкость клина позволяет снести граничные условия на ось  $\xi_1$ . Таким образом, граничные условия соответствующей смешанной задачи динамической теории упругости для нижней полуплоскости можно представить в виде

$$\begin{aligned} u_2 = 0, \quad \sigma_{12} = 0 & \quad (-\infty < \xi_1 \leq 0), \\ \sigma_{12} = \sigma_{22} = 0 & \quad (0 < \xi_1 < l_2), \\ \sigma_{12} = k\sigma_{22}, \quad u_2 = -f(\xi_1 - l_1) & \quad (l_2 \leq \xi_1 < \infty). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь  $k$  — коэффициент кулонова трения,  $f(t)$  — функция, определяющая форму клина в системе координат с началом в передней точке клина,  $l_1$  — расстояние от передней точки клина до конца трещины,  $l_2$  — расстояние от точек схода трещины с клина до конца трещины. Используя формулы (2.7), (2.9), получаем для определения функции  $w_1(z)$  следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned} U_1 = 0 & \quad (-\infty < \xi_1 \leq 0), \quad V_1 = 0 & \quad (0 < \xi_1 < l_2) \\ CU_1 + DkV_1 = -f'(\xi_1 - l_1) & \quad (l_2 \leq \xi_1 < \infty) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Если функция  $w_1(z)$  известна, то функция  $w_2(z)$  определяется в данном случае элементарно. Напомним, что для рассматриваемых условий константы  $C$  и  $D$ , определяемые соотношениями (2.8), действительны. Если ввести обозначения

$$p = \frac{1}{\pi C}, \quad q = \frac{D}{C} \quad (4.3)$$

краевая задача (4.2) совпадает с соответствующей краевой задачей, решенной ранее при рассмотрении задачи о расклинивании изотропного тела [12]. Анализ дополнительных условий, определяющих константы, входящие в решение задачи теории упругости, показывает, что при решении задачи о расклинивании ортотропного тела можно пользоваться формулами статьи [12], понимая под  $p$  и  $q$  в этих формулах величины, определенные соотношением (4.3), и имея в виду, что модуль сцепления материала зависит от направления, в котором происходит расклинивание.

2°. Остановимся, в частности, на важной задаче о расклинивании неподвижным клином постоянной толщины  $2h$  ортотропного тела в пренебрежении силами трения на щеках клина.

Используя результаты работы [12], получаем для длины свободной трещины перед клином  $l = l_1 = l_2$  соотношение

$$l = \frac{p^2 h^2}{K^2} = \frac{h^2}{\pi^2 C_0^2 K^2} \quad (4.4)$$

где  $C_0$  — значение константы  $C$ , определяемой формулой (2.8) при  $v = 0$ . Имеем согласно (2.8) и (1.14)

$$\pi C_0 = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \frac{\sqrt{b_{1111} b_{2222}}}{b_{1111} b_{2222} - b_{1122}^2} \quad (4.5)$$

где  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  — поделенные на  $i$  корни характеристического уравнения (1.10) — величины, зависящие только от упругих констант материала

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{M_0 - \sqrt{M_0^2 - 4L_0 N_0}}{2L_0}}, \quad \varepsilon_2 = \sqrt{\frac{M_0 + \sqrt{M_0^2 - 4L_0 N_0}}{2L_0}}$$

$$L_0 = b_{1212} b_{2222}, \quad M_0 = b_{1111} b_{2222} - b_{1122}^2 - 2b_{1212} b_{1122}, \quad N_0 = b_{1111} b_{1212}$$

Зависимость (4.4) можно использовать для экспериментального определения модуля сцепления, подобно тому, как это делалось в [1] для изотропного тела: в пластинку из исследуемого материала, достаточно толстую, чтобы напряженное состояние в ней можно было считать плоской деформацией, забивается тонкий клин постоянной толщины, сделанный из существенно более жесткого материала, нежели испытуемый. Клину следует забивать до тех пор, пока расстояние от конца клина до конца трещины  $l$  не станет постоянным, что будет указывать на несущественное влияние краев пластинки. Измеряя  $l$  и зная упругие константы материала, найдем модуль сцепления по формуле

$$K = \frac{2h(b_{1111} b_{2222} - b_{1122}^2)}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \sqrt{b_{1111} b_{2222}} \sqrt{l}} \quad (4.6)$$

В случае изотропного тела получаем ранее известный результат

$$K = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)\sqrt{l}} \quad (4.7)$$

Отметим, что осуществление этого эксперимента на анизотропных материалах проще, чем на изотропных, так как в последних трещины легче искривляются.

3°. Обратимся снова к динамической задаче. Как показано в работе [12], при  $p \rightarrow 0$  длина свободной части трещины  $l_2$  стремится к нулю. Но из формул (4.3) и (2.8) следует, что  $p$  пропорционально определителю  $\Delta$  и стремится к нулю при приближении скорости движения клина  $v$  к соответствующей данному направлению скорости поверхностных волн Релея, если таковые существуют. Таким образом, длина свободной части трещины стремится к нулю при приближении скорости движения клина к релеевской, поэтому, как и в изотропном теле, скорость распространения трещины не может превосходить релеевской.

Можно показать вполне аналогично [12], что при приближении к релеевской скорости напряжения перед концом трещины возрастают, причем разрывающее напряжение  $\sigma_{11}$  возрастает скорее, чем разрывающее напряжение  $\sigma_{22}$ . Это показывает, что при приближении скорости движения клина к релеевской возникают поперечные трещины и картина движения существенно меняется. Рассматриваемая постановка задачи применима, поэтому, заведомо только для дорелеевских скоростей движения клина.

Верхний предел скорости, до которого применима принятая в настоящей работе постановка задачи о расклинивании, зависит также от отношения модулей сцепления в направлении расклинивания и в направлении, ему перпендикулярном. Для прямолинейности трещины необходимо, чтобы это отношение не превышало единицы. В противном случае трещина впереди клина искривится под влиянием случайных факторов даже при неподвижном клине. В часто встречающемся случае, когда модуль сцепления в направлении расклинивания значительно меньше модуля сцепления в поперечном направлении (как, например, при расклинивании древесины вдоль волокна), прямолинейность трещины можно считать заведомо обеспеченной и принятую постановку задачи справедливой вплоть до скорости движения клина, равной релеевской. Если модули сцепления в направлении расклинивания и поперечном направлении равны между собой, то вполне аналогично случаю изотропного тела можно показать, что существует еще одна, дорелеевская, критическая скорость, вплоть до достижения которой направление расклинивания является линией максимальных разрывающих напряжений; при превышении этой скорости трещина начинает искривляться.

Поступила 25 VII 1960

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Баренблатт Г. И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 3—5.
2. Баренблатт Г. И. Об условиях конечности в механике сплошных сред. Статические задачи теории упругости. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 2.
3. Ляв А. Математическая теория упругости. ОНТИ, М.—Л., 1935.
4. Лехницкий С. Г. Плоская статическая задача теории упругости анизотропного тела. ПММ, 1937, т. I, вып. 1.
5. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. ГИТТЛ, М.—Л., 1947.
6. Галии Л. А. Контактные задачи теории упругости. ГИТТЛ, М.—Л., 1953.
7. Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Физматгиз, М.—Л., 1958.
8. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. ГИТТЛ, М.—Л., 1946.
9. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Физматгиз, М., 1958.
10. Scholte J. G. J. Rayleigh waves in isotropic and anisotropic elastic media. Kon. Ned. Meteor. Inst. Mededelingen en verhandelingen, 1958, № 72.
11. Соболев С. Л. Некоторые вопросы распространения колебаний. Гл. XII в кн. Ф. Франк и Р. Мизес «Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики». ОНТИ, Л.—М., 1937.
12. Баренблатт Г. И. и Черепанов Г. П. О расклинивании хрупких тел, ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 4.
13. Yoffe E. The moving Griffith crack. Philos. Mag., 1951, vol. 42, № 330.
14. Stroh A. N. Dislocations and cracks in anisotropic elasticity. Philos. Mag. 1958, vol. 3, № 30.