Прикладная математика и механика. Том XXV, 1961
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ

В. М. Бабич

(Ленинград)

Строится фундаментальный тензор для динамических уравнений теории упругости в случае неоднородной изотропной среды. Задача эта поставлена в работе [1]. Построение производится методами, изложенными в заметке [2]. Непосредственно результаты заметки [2] здесь неприменимы, так как уравнения теории упругости в трехмерном случае имеют кратные характеристики.

В задачах теории упругих волн большую роль играют так называемые точечные источники колебаний: сосредоточенная сила в неограниченном пространстве, центр расширения, двойная сила, сосредоточенная пара, сосредоточенный момент и т. п. Знаменитые фундаментальные решения Вольтерра для уравнений теории упругости представляют собой, как нетрудно показать, решения, соответствующие центру расширения и сосредоточенным моментам, оси которых расположены вдоль осей координат.

Зная вектор смещения, соответствующий любой сосредоточенной силе, нетрудно найти вектор смещения, соответствующий любому точечному источнику.

Для случая однородной упругой среды задача о сосредоточенной силе, изменяющейся по произвольному закону и действующей в направлении оси x, решена в конечном виде [3]. Для неоднородной среды эта задача рассматривается ниже.

1. Постановка задачи. Пусть в точке M_0 в направлении оси x_j действует сосредоточенная сила, абсолютная величина которой меняется по закону $\chi(t)$. Достаточно рассмотреть случай сосредоточенного импульса, когда $\chi(t) = \delta(t)$, где $\delta(t)$ — функция Дирака, так как вектор смещения $\mathbf{u}_j$ в случае произвольной функции $\chi(t)$ выразится через $\mathbf{h}_t$ — вектор смещения, соответствующий сосредоточенному импульсу, по формуле

$$\mathbf{u}(M, t) = \int_0^t \mathbf{h}_j(M, t - t')\, \chi(t')\, dt'$$

Компоненты векторов $\mathbf{h}_j(M, t)$ образуют тензор $H(M, t) = \| h_{ij}(M, t) \|$, который называется фундаментальным тензором уравнений теории упругости.

Поставим математически задачу об отыскании векторов $\mathbf{h}_j$. Пусть $u_i(x_1, x_2, x_3, t)$ — компоненты вектора смещений, $\lambda = \lambda(x_1, x_2, x_3)$, $\mu = \mu(x_1, x_2, x_3)$ — параметры Ламэ, $\rho = \rho(x_1, x_2, x_3)$ — плотность среды. Будем считать, что величины λ, μ, ρ, как функции x_1, x_2, x_3, аналитические.

Уравнения теории упругости в рассматриваемом случае можно записать в виде (см. [1])

$$\mathbf{Lu} = \rho \mathbf{u}_{tt} - (\lambda + \mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} - \mu\Delta\mathbf{u} - \operatorname{div}\mathbf{u}\operatorname{grad}\lambda - 2D\operatorname{grad}\mu = \mathbf{K} \quad (1.1)$$

Здесь

$$D = \|\varepsilon_{ij}\| = \left\| \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right\|$$

тензор деформаций.

Положим $\mathbf{u} = 0$ при $t < 0$ и рассмотрим последовательность векторов объемных сил $\mathbf{K}_\varepsilon$, таких, что

$$\mathbf{K}_\varepsilon = 0, \quad r = |MM_0| > \varepsilon, \quad M = M(x_1, x_2, x_3), \quad M_0 = M_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$$

$$\int \mathbf{K}_\varepsilon \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 = \chi(t)\, \mathbf{i}_j$$

Тогда при $\varepsilon \to 0$ вектор смещений в пределе будет соответствовать сосредоточенной силе, направленной вдоль оси x_j и меняющей свою величину по закону $\chi(t)$. Вектор же объемных сил в пределе перейдет в

$$\mathbf{K} = \delta(M - M_0)\, \chi(t)\, \mathbf{i}_j \tag{1.2}$$

где $\delta(M - M_0)$ есть δ-функция, сосредоточенная в точке M_0. Полагая в равенстве (1.2) $\chi(t) = \delta(t)$, получим вектор объемных сил[1], соответствующий вектору $\mathbf{h}_j$.

Вектор $\mathbf{h}_j$ можно искать как решение задачи Коши

$$\mathbf{L}\mathbf{h}_j = 0; \qquad \mathbf{h}_j|_{t=0} = 0, \qquad \frac{\partial \mathbf{h}_j}{\partial t}\Big|_{t=0} = \frac{1}{\rho(M_0)}\delta(M - M_0)\, \mathbf{i}_j \tag{1.3}$$

В самом деле, доопределив вектор, служащий решением задачи Коши (1.3), нулем при $t < 0$ и подставив его в дифференциальный оператор L, получим в качестве вектора объемных сил выражение (1.2) при $\chi(t) = \delta(t)$.

При помощи фундаментального тензора задача Коши для уравнений теории упругости решается в квадратурах.

В самом деле, для уравнений теории упругости имеет место аналог формулы Грина теории гармонических функций — формула Грина—Вольтерра:

$$\int\limits_T (\mathbf{v}L(\mathbf{u}) - \mathbf{u}\mathbf{L}(\mathbf{v}))\, dx_1 dx_2 dx_3 dt = \int\limits_S (\mathbf{v}\mathbf{p}(\mathbf{u}) - \mathbf{u}\mathbf{p}(\mathbf{v}))\, dS$$

$$(\mathbf{p}\mathbf{u} = \rho \mathbf{u}_t - \sigma_{kj} n_j \mathbf{i}_k) \tag{1.4}$$

где σ_{kj} — компоненты тензора напряжений, n_j — компоненты четырехмерной нормали, S — гиперповерхность, ограничивающая четырехмерный объем T; здесь и далее по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

Пусть T — полупространство $t \geqslant 0$,

$$\mathbf{v} = \mathbf{h}_j(M - M_0,\ t_0 - t), \qquad M = M(x_1, x_2, x_3), \qquad M_0 = M_0(x_1^\circ, x_2^\circ, x_3^\circ)$$

---

[1] Другим точечным источникам тоже соответствуют «дельтаобразные» векторы объемных сил. Центру расширения соответствует

$$\operatorname{grad} \delta(M - M_0)\, \chi(t)$$

двойной силе

$$\chi(t) \frac{\partial}{\partial x_j} \delta(M - M_0)\, \mathbf{i}_j \text{ и т. д.}$$

и $\mathbf{u}$ — решение задачи Коши.

$$\mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{K}; \qquad \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0, \qquad \left.\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right|_{t=0} = \mathbf{u}_1 \tag{1.5}$$

В силу того, что

$$\mathbf{L}\mathbf{v} = \delta(M - M_0)\,\delta(t_0 - t)$$

интегрирование выражения $\mathbf{u}\mathbf{L}\mathbf{h}_j$ дает j-ую компоненту вектора $\mathbf{u}$; имеем.

$$u_j(M_0, t_0) = \frac{\partial}{\partial t_0}\int h_{ij}u_{0i}\,dM + \int h_{ij}n_{1i}\,dM + \int\limits_{0\leqslant t\leqslant t_0} h_{ij}K_j\,dM\,dt \qquad (dM = dx_1dx_2dx_3)$$

или (что то же):

$$\mathbf{u} = \frac{\partial}{\partial t_0}\int H(M - M_0, t_0)\,\mathbf{u}_0(M)\,dM + \int H(M - M_0, t_0)\,\mathbf{u}_1(M)\,dM + \\ + \int\limits_{0\leqslant t\leqslant t_0} H(M - M_0, t_0 - t)\,\mathbf{K}(M_1t)\,dM\,dt \tag{1.6}$$

Здесь $H = \|h_{ij}\|$ — фундаментальный тензор.

Для построения фундаментального тензора достаточно решить задачи Коши (1.3). Разложим теперь δ_j-функцию по плоским волнам (см. [2, 5, 6])

$$\delta(x_1 - x_1^\circ, x_2 - x_2^\circ, x_3 - x_3^\circ) = -\frac{1}{8\pi^2}\iint \delta''(\omega_l(x_l - x_l^\circ))\,d\omega$$
$$(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = 1)$$

Пусть теперь $\mathbf{h}_{\omega j}$ — решение задачи Коши

$$\mathbf{L}(\mathbf{h}_{\omega j}) = 0 \tag{1.7}$$

$$\mathbf{h}_{\omega j}|_{t=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial \mathbf{h}_{\omega j}}{\partial t}\right|_{t=0} = -\frac{1}{8\pi^2\rho(M_0)}\,\delta''(\omega_l(x_l - x_l^\circ))\,\mathbf{i}_j \tag{1.8}$$

Тогда, очевидно, искомые векторы $\mathbf{h}_j$ найдутся по формулам

$$\mathbf{h}_j(M, t) = \int\limits_{|\omega|=1} \mathbf{h}_{\omega j}\,d\omega \tag{1.9}$$

Решение задачи Коши (1.7), (1.8) построим при помощи «лучевых» решений.

2. «Лучевые» решения уравнений динамики упругого тела (см.[6,7]). Пусть f_0 — произвольная функция, а f_k — последовательные интегралы от нее

$$f_k(x) = \int f_{k-1}(x)\,dx \tag{2.1}$$

Будем искать решение уравнения $\mathbf{L}\mathbf{u} = 0$ в виде

$$\mathbf{u} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{u}_k(x_1, x_1, x_3, t)\,f_k(\gamma(x_1, x_2, x_3, t)), \tag{2.2}$$

где γ — некоторая фиксированная функция. Подставляя (2.2) в уравнение (1.1) при $\mathbf{K} = 0$ и приравнивая нулю коэффициент при каждой функции f_k, получим (2.3)

$$\mathbf{N}\mathbf{u}_{k+2} + \mathbf{M}\mathbf{u}_{k+1} + \mathbf{L}\mathbf{u}_k = 0 \qquad (\mathbf{u}_{-1} = \mathbf{u}_{-2} \equiv 0) \qquad (k = -2, -1, 0, 1, 2, \ldots)$$

где оператор $\mathbf{L}$ имеет тот же смысл, что и в уравнении (1.1), операторы N и M определяются так:

$$\mathbf{Nu} = (\rho\gamma_t^2 - \mu(\operatorname{grad}\gamma)^2)\mathbf{u} - (\lambda+\mu)\operatorname{grad}\gamma(\operatorname{grad}\gamma\mathbf{u}) \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{Mu} = 2\rho\mathbf{u}_t\gamma_t - (\lambda+\mu)[\operatorname{div}\mathbf{u}\operatorname{grad}\gamma + \operatorname{grad}(\mathbf{u}\operatorname{grad}\gamma)] -\\ - \mu[\mathbf{u}\Delta\gamma + 2(\operatorname{grad}\mathbf{u}_k\operatorname{grad}\gamma)i_k] - \operatorname{grad}\lambda(\mathbf{u}\operatorname{grad}\gamma) -\\ - (\operatorname{grad}\mu\mathbf{u})\operatorname{grad}\gamma - (\operatorname{grad}\mu\operatorname{grad}\gamma)\mathbf{u}\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\operatorname{grad}\gamma = (\gamma_{x_1}, \gamma_{x_2}, \gamma_{x_3}) \tag{2.6}$$

При $k = -2$ из (2.3) получаем $\mathbf{Nu}_0 = 0$. Естественно предположить, что $\mathbf{u}_0 \neq 0$, тогда определитель этой линейной системы должен равняться нулю, откуда получаем, что должны выполняться соотношения:

либо (случай продольных волн)

$$(\operatorname{grad}\gamma)^2 = \frac{1}{a^2}\gamma_t^2, \qquad a = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}, \qquad \mathbf{u}_0 \parallel \operatorname{grad}\gamma \tag{2.7}$$

либо (случай поперечных волн)

$$(\operatorname{grad}\gamma)^2 = \frac{1}{b^2}\gamma_t^2, \qquad b = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \qquad \mathbf{u}_0 \perp \operatorname{grad}\gamma \tag{2.8}$$

Важное значение в изучении уравнения

$$(\operatorname{grad}\gamma)^2 = \frac{1}{c^2(x, y, z)}\gamma_t^2 \tag{2.9}$$

играют экстремали функционала Ферма

$$\tau = \int_{M_1}^{M} \frac{ds}{c} \tag{2.10}$$

Если M_1 — фиксированная точка и интеграл (2.9) берется вдоль экстремали, то величиной τ можно характеризовать точки на экстремали. Кривая в четырехмерном пространстве (x_1, x_2, x_3, t)

$$x_1 = x_1(\tau), \qquad x_2 = x_2(\tau), \qquad x_3 = x_3(\tau), \qquad t = \tau + \text{const} \tag{2.11}$$

будет тогда характеристикой уравнения (2.9).

Проведем из каждой точки M_1 фиксированной поверхности Σ перпендикулярно к ней экстремаль интеграла (2.10), точку на экстремали будем характеризовать величиной τ, а M_1 — двумя параметрами: α и β. Тем самым вблизи поверхности Σ, точнее, в той области, где поле экстремалей сохраняет регулярность, будет введена криволинейная координатная система α, β, τ, так что

$$x_i = x_i(\alpha, \beta, \tau) \quad (i = 1, 2, 3) \qquad \text{или} \qquad \mathbf{x} = \mathbf{x}(\alpha, \beta, \tau) \tag{2.12}$$

Рассмотрим случай продольных волн. Из формул (2.3) — (2.7) следует, что

$$\mathbf{u}_2 = 0, \qquad \mathbf{u}_{-1} = 0, \qquad \mathbf{u}_0^\circ = 0$$

где $\mathbf{u}_0^\circ$ — составляющая вектора $\mathbf{u}_0$, перпендикулярная лучу.

Пусть теперь $\mathbf{u}_{-2}, \mathbf{u}_{-1}, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathring{\mathbf{u}}_{k+1}$ известны (через $\mathring{\mathbf{u}}_{k+1}$ обозначена составляющая вектора $\mathbf{u}_{k+1}$, перпендикулярная лучу). Подставим в соотношение (2.3)

$$\begin{gathered}\mathbf{u}_{k+1} = \mathring{\mathbf{u}}_{k+1} + \varphi_{k+1}\operatorname{grad}\gamma, \qquad \mathbf{u}_{k+2} = \mathring{\mathbf{u}}_{k+2} + \varphi_{k+2}\operatorname{grad}\gamma\\ \mathring{\mathbf{u}}_{k+1}, \mathring{\mathbf{u}}_{k+2} \perp \operatorname{grad}\gamma, \qquad \varphi_{k+1} = \varphi_{k+1}(t, x_1, x_2, x_3)\end{gathered} \tag{2.13}$$

получим

$$\operatorname{grad}\gamma\,[\mathbf{M}(\overset{\bullet}{u_{k+1}} + \varphi_{k+1}\operatorname{grad}\gamma) + \mathbf{L}\mathbf{u}_{k+1}] = 0 \qquad (2.14)$$

$$\overset{\circ}{\mathbf{u}}_{k+2} = -\frac{\mathbf{M}(\mathbf{u}_{k+1}) + \mathbf{L}(\mathbf{u}_k)}{(\lambda+\mu)(\operatorname{grad}\gamma)^2}$$

Первое из этих равенств можно представить в виде

$$2\rho(\operatorname{grad}\gamma)^2\left(\frac{\partial}{\partial t}\varphi_{k+1}\frac{\partial}{\partial t}\gamma - a^2\operatorname{grad}\varphi_{k+1}\operatorname{grad}\gamma\right) + A\varphi_{k+1} + \\ + \operatorname{grad}\gamma(\mathbf{M}(\overset{\circ}{\mathbf{u}}_{k+1}) + \mathbf{L}(\mathbf{u}_{k+2})) = 0 \qquad (2.15)$$

Здесь A — регулярная функция координат, не зависящая от $\mathbf{u}_j$, выражение для которой мы не выписываем из экономии места.

Если $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\tau_a)$ — экстремаль интеграла (2.10), то четырехмерная кривая

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}(\tau_a), \qquad t = \tau_a + \text{const}$$

будет характеристикой уравнения

$$\gamma_t^2 = a^2(\operatorname{grad}\gamma)^2 \qquad (2.16)$$

и, следовательно, бихарактеристикой уравнения (1.1).

Соотношение (2.15) можно будет записать в следующем виде:

$$2\rho\,(\operatorname{grad}\gamma)^2\frac{d\varphi_{k+1}}{d\sigma} + A\varphi_{k+1} + \operatorname{grad}\gamma\,(\mathbf{M}(\overset{\circ}{\mathbf{u}}_{k+1}) + \mathbf{L}(\mathbf{u}_k)) = 0 \qquad (2.17)$$

где

$$\frac{d}{d\sigma} = \frac{d}{dt} + \frac{d}{d\tau_a}, \qquad \tau_a = \int_{M_1}^{M}\frac{ds}{a}$$

Производная $d/d\sigma$ есть фактически производная по времени, взятая вдоль бихарактеристики. Уравнения (2.13), (2.14) и (2.17) позволяют найти $\mathbf{u}_{k+1}$ и $\overset{\bullet}{\mathbf{u}}_{k+2}$, если заданы начальные условия для уравнения (2.17). Тем самым все $\mathbf{u}_k$ последовательно определяются.

Рассмотрим теперь случай поперечных волн. Будем искать компоненты разложения искомых векторов по направлениям векторов $\mathbf{x}_\tau$, x_α, x_β (см. формулы (2.12)) в координатах α, β, τ; выражение, определяемое оператором $\mathbf{M}$, согласно (2.5) будет иметь вид

$$\mathbf{M}(\mathbf{u}) = 2\rho\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\frac{\partial\gamma}{\partial t} - (\lambda+\mu)(2\operatorname{div}\mathbf{u}\operatorname{grad}\gamma + \mathbf{u}\Delta\gamma) - \\ - \frac{\mu}{b}\left[2|\operatorname{grad}\gamma|\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\tau} + \mathbf{u}b\left(\Delta\tau\gamma_\tau + \frac{1}{b^2}\gamma_{\tau\tau}\right)\right] - \\ - \operatorname{grad}\lambda\,(\mathbf{u}\operatorname{grad}\gamma) - (\operatorname{grad}\mu\mathbf{u})\operatorname{grad}\gamma - (\operatorname{grad}\mu\operatorname{grad}\gamma)\,\mathbf{u} \qquad (2.18)$$

Из равенств (2.3)— (2.8) следует, что $\mathbf{u}_{-2} \equiv 0$, $\mathbf{u}_{-1} \equiv 0$, $\mathbf{u}_0^\circ \equiv 0$, где через $\mathbf{u}_0^\circ$ обозначена составляющая вектора $\mathbf{u}_0$ вдоль луча.

Пусть теперь $\mathbf{u}_{-2}$, $\mathbf{u}_{-1}$, $\mathbf{u}_0, \ldots, \mathbf{u}_k$, $\overset{\circ}{\mathbf{u}}_{k+1}$ известны ($\overset{\circ}{\mathbf{u}}_{k+1}$ — составляющая вектора $\mathbf{u}_{a+1}$ вдоль луча), тогда

$$\mathbf{u}_{k+1} = \overset{\circ}{\mathbf{u}}_{k+1} + u_{k+1,\alpha}\boldsymbol{\alpha} + u_{k+1,\beta}\boldsymbol{\beta} \\ \overset{\circ}{\mathbf{u}}_{k+1}\parallel\operatorname{grad}\tau_b, \qquad \boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathbf{x}_\alpha}{|\mathbf{x}_\alpha|}, \qquad \boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{x}_\beta}{|\mathbf{x}_\beta|} \qquad (2.19)$$

Из равенства (2.3) и (2.8) следует, что

$$\mathbf{M}(\mathbf{u}_{k+1}) + \mathbf{L}(\mathbf{u}_k) \parallel \operatorname{grad}\gamma$$

или (что то же)

$$\frac{2\mu}{b^2}\left(\frac{du_{k+1,\alpha}}{d\sigma} + (\alpha\beta)\frac{du_{k+1,\beta}}{d\sigma}\right) + Au_{k+1,\alpha} + Bu_{k+1,\beta} = [\mathbf{L}(\mathbf{u}_k) + \mathbf{M}(\overset{\circ}{\mathbf{u}}_{k+1})]\,\boldsymbol{\alpha}$$

$$\frac{2\mu}{b^2}\left(\frac{du_{k+1,\alpha}}{d\sigma}(\alpha\beta) + \frac{du_{k+1,\beta}}{d\sigma}\right) + Cu_{k+1,\alpha} + Du_{k+1,\beta} = [\mathbf{L}(\mathbf{u}_k) + \mathbf{M}(\overset{\circ}{\mathbf{u}}_{k+1})]\,\boldsymbol{\beta}$$

$$\frac{d}{d\sigma} = \frac{d}{dt} + \frac{d}{d\tau_b}, \qquad \tau_b = \int_{M_1}^{M}\frac{ds}{b} \tag{2.20}$$

Через A, B, C, D обозначены регулярные функции α, β, τ_b, выражения для которых опускаются.

Если равенства (2.20) имеют место, то из соотношения (2.3) получаем

$$\overset{\circ}{\mathbf{u}}_{k+2} = \frac{L(\mathbf{u}_k) + \mathbf{M}(\mathbf{u}_{k+1})}{(\lambda+\mu)(\operatorname{grad}\gamma)^2} \tag{2.21}$$

3. Построение решения задачи Коши (1.7), (1.8). Обозначим теперь через $\gamma_{\omega a}(\gamma_{\omega b})$ решение уравнения

$$(\operatorname{grad}\gamma)^2 = \frac{1}{a^2}\gamma_t^2 \quad \left(= \frac{1}{b^2}\gamma_t^2\right) \tag{3.1}$$

удовлетворяющее следующим условиям:

$$\gamma_a = (x_l - x_l^\circ)\,\omega_l \text{ при } t = 0,\ \gamma_t > 0; \qquad \gamma_b = (x_l - x_l^\circ)\,\omega_l \text{ при } t = 0,\ \gamma_t > 0$$

Будем искать решение задачи Коши (1.7) и (1.8) в виде

$$\mathbf{h}_\omega = \sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{u}_{\omega k a}(x_1, x_2, x_3, t)\,[f_k(\gamma_a(t, x_1, x_2, x_3)) - f_k(\gamma_a(-t, x_1, x_2, x_3))] +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{u}_{\omega k b}(x_1, x_2, x_3, t), \ [f_k(\gamma_b(t, x_1, x_2, x_3)) - f_k(\gamma_b(-t, x_1, x_2, x_3))] \tag{3.2}$$

где $\mathbf{u}_{\omega k a}$ строятся по рекуррентным формулам (2.13)—(2.17), а $\mathbf{u}_{\omega k b}$ — по формулам (2.18)—(2.21).

Начальное условие $\mathbf{h}_\omega = 0$ при $t = 0$ и уравнение (1.1) при $\mathbf{K} = 0$, очевидно, будут удовлетворены. Обратимся ко второму начальному условию (1.8). Имеем

$$2\sum_{k=0}^{\infty}(\mathbf{u}_{\omega k a}a + \boldsymbol{u}_{\omega k b}b)\,f_{k-1}((x_l - \overset{\circ}{x}_l)\,\omega_l) = -\frac{1}{8\pi^2\rho(M_0)}\,\delta''((x_l - x_l^\circ)\,\omega_l)\,i_j$$

$$\text{при } t = 0 \tag{3.3}$$

Для выполнения этого равенства достаточно, чтобы первое слагаемое в написанной сумме равнялось правой части, а все остальные слагаемые равнялись нулю.

Естественно положить $f_0(t) = \delta'(t)$, тогда

$$f_1(t) = \delta(t), \qquad f_2(t) = \varepsilon(t), \ldots, f_k(t) = \frac{t_+^{k-2}}{(k-2)!} = \frac{t^{k-2}\varepsilon(t)}{(k-2)!}$$

где $\varepsilon(t)$ — функция Хевисайда, равная 1 при $t \geqslant 0$ и нулю при $t < 0$.

Для выполнения (3.3) достаточно теперь, чтобы

$$2\mathbf{u}_{\omega 0 a}a + 2\mathbf{u}_{\omega 0 b}b = -\frac{\mathbf{i}_j}{8\pi^2\rho(M_0)} \qquad \text{при } t = 0 \tag{3.4}$$

$$\mathbf{u}_{\omega k a}a + \mathbf{u}_{\omega k b}b = 0 \qquad (k > 0) \qquad \text{при } t = 0 \tag{3.5}$$

При $t = 0$ решения γ_a и γ_b совпадают. При $t = 0$ вектор $\mathbf{u}_{\omega 0a}$ будет параллелен $\operatorname{grad}\gamma_a = \omega$, а вектор $\mathbf{u}_{\omega 0b}$ — перпендикулярен к $\boldsymbol{\omega}$. Разложив вектор, стоящий в правой части формулы (3.4) по направлению $\boldsymbol{\omega}$ и по перпендикулярному направлению, найдем однозначно начальные данные для уравнений (2.17) и (2.20) при $k = -1$, после чего $\mathbf{u}_{\omega 0a}$ и $\mathbf{u}_{\omega 0b}$, $\overset{\circ}{\mathbf{u}}_{\omega 1a}$, $\overset{\circ}{\mathbf{u}}_{\omega 1b}$ однозначно определятся. Подставляя в формулу (3.5)

$$\mathbf{u}_{\omega 1a} = (\varphi_{\omega 1}\operatorname{grad}\gamma + \overset{\circ}{\mathbf{u}}_{\omega 1a}), \quad \mathbf{u}_{\omega 1b} = (u_{\omega 1\alpha}\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{u}_{\omega 1\beta}\boldsymbol{\beta} + \overset{\circ}{\mathbf{u}}_{\omega 1b})$$

однозначно находим начальные данные для $\varphi_{\omega 1}$, $u_{\omega 1\alpha}$ и $\mathbf{u}_{\omega 1\beta}$ и, тем самым, $\mathbf{u}_{\omega 1a}$, $\mathbf{u}_{\omega 1b}$, $\overset{\circ}{\mathbf{u}}_{\omega 2a}$, $\overset{\circ}{\mathbf{u}}_{\omega 2b}$ однозначно найдутся и т. д.

Все векторы $\mathbf{u}_{\omega ka}$ и $\mathbf{u}_{\omega kb}$, таким образом, однозначно находятся и являются аналитическими функциями. Сходимость рядов (3.2) доказывается с помощью метода мажорант точно так же, как в случае общего гиперболического уравнения с некратными характеристиками.

Нетрудно показать, что $\gamma(-t, x_1, x_2, x_3, -\boldsymbol{\omega}) = -\gamma(t, x_1, x_2, x_3, \omega)$.

Пользуясь этим соотношением, получим

$$\begin{aligned}\mathbf{h}_j = \int\limits_{|\omega|=1} \mathbf{h}_{j\omega}\,d\omega = \int\limits_{|\omega|=1} [\mathbf{u}_{\omega 0aj}(t, x_1, x_2, x_3)\,\delta'(\gamma_{\omega a}) + \\ + \mathbf{v}_{\omega aj}(t, x_1, x_2, x_3)\,\varepsilon(\gamma_{\omega a})]\,d\omega + \int\limits_{|\omega|=1} [\mathbf{u}_{\omega 0bj}(t, x_1, x_2, x_3)\,\delta'(\gamma_{\omega b}) + \\ + \mathbf{v}_{\omega bj}(t, x_1, x_2, x_3)\,\varepsilon(\gamma_{\omega b})]\,d\omega = \mathbf{h}_{aj} + \mathbf{h}_{bj}\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\varepsilon(\gamma) = \begin{cases} 1 & \text{при } \gamma \geqslant 0 \\ 0 & \text{при } \gamma < 0 \end{cases}$$

Здесь $\mathbf{v}_{\omega aj}$ и $\mathbf{v}_{\omega bj}$ — векторы с регулярными компонентами.

4. Об особенностях фундаментального тензора. Итак, фундаментальный тензор вычисляется по формуле (3.6) как сумма обобщенных плоских волн вида (3.2).

Опираясь на формулу (3.6), можно было бы провести изучение аналитических свойств фундаментального тензора. Мы приведем здесь только результаты, так как, пользуясь методами, предложенными В. А. Боровиковым [9], автор исследовал фундаментальный тензор для случая произвольной гиперболической по И. Г. Петровскому системы [2, 11], и исследование фундаментального тензора в нашем случае проводится совершенно аналогичным образом.

Итак, компоненты фундаментального тензора

$$H(M, M_0, t) = \|h_{ij}\|; \qquad M = M(x_1, x_2, x_3), \qquad M_0 = M_0(x_1^\circ, x_2^\circ, x_3^\circ)$$

определены в окрестности точки M_0 и равны нулю при $t < \tau_a(M, M_0)$.

При $\tau_a < t < \tau_b$ и $\tau_b < t$ они являются аналитическими функциями своих аргументов, а при $t = \tau_a$ и при $t = \tau_b$ имеют δ-образную особенность, а именно

$$h_{jk}(t, M, M_0) = V_{jka}\delta(t - \tau_a) + V_{jkb}\delta(t - \tau_b) + \\ + W_{jka}\varepsilon(t - \tau_a) + W_{jkb}\varepsilon(t - \tau_b) \qquad (j, k = 1, 2, 3) \tag{4.1}$$

В последней формуле V_{jka}, V_{jkb}, W_{jka}, W_{jkb} — регулярные функции t, M, M_0, ε — функция Хевисайда.

В плоском случае уравнения теории упругости являются гиперболическими по И. Г. Петровскому, так как кратные характеристики в этом случае отсутствуют. Фундаментальный тензор в случае гиперболической по И. Г. Петровскому системы уравнений с переменными коэффициентами исследован в работах [2] и [10]. Для уравнений теории упругости об этом тензоре можно было бы повторить все, что о нем сказано в трехмерном случае, за исключением того, что δ-образная особенность для него заменяется на особенность типа $\frac{1}{\sqrt{x}}$ и вместо формулы (4.1) мы в плоском случае будем иметь

$$h_{jk} = V_{jka}(t, M, M_0)(t - \tau_a)_+^{-1/2} + V_{jkb}(t, M, M_0)(t - \tau_b)_+^{-1/2}$$

$$x_+^{-1/2} = \begin{cases} x^{-1/2} & (x > 0) \\ 0 & (x \leqslant 0) \end{cases} \tag{4.2}$$

где V_{jka} и V_{jkb} — регулярные функции своих аргументов.

Если параметры Ламэ λ, μ и плотность ρ являются не аналитическими, а лишь достаточно гладкими функциями координат, то все выводы настоящего параграфа сохраняются за тем исключением, что функции V и W будут уже не аналитическими, а только достаточно гладкими.

Поступила 25 IX 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Михлин С. Г. Фундаментальные решения динамических уравнений теории упругости. ПММ, 1947, т. XI, вып. 4.
2. Бабич В. М. Об элементарных решениях гиперболических уравнений. ДАН, 1959, т. 129, № 3.
3. Ляв А. Я. Математическая теория упругости. М.— Л., 1935.
4. Бабич В. М. Метод С.Л. Соболева—Кирхгофа в динамике неоднородной упругой среды. Вестн. ЛГУ, 1957, т. 13, вып. 3.
5. Courant R., Lax P. The propagation of discontinuities in Wave motion. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1956, vol. 42, 872.
6. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. 1958, вып. 1, М., Гостехиздат.
7. Бабич В. М. Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов. ДАН, 1956, т. 110, № 3.
8. Бабич В. М., Алексеев А. С. О лучевом методе вычисления интенсивности волновых фронтов. Изв. АН СССР. Сер. геофизич., 1958, № 1.
9. Боровиков В. А. Фундаментальные решения линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Тр. Моск. математ. общ., 1959, т. 8.
10. Бабич В. М. О фундаментальных решениях гиперболических уравнений. Матем. сб. (печатается).
11. Петровский И. Г. Über das Gauchysshe Problem für System von partiellen Differentialgleichungen. Матем. сб. № 2 (44), 1937, стр. 815—870.