Прикладная математика и механика. Том XXV, 1961
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

К ТЕОРИИ АБСОЛЮТНО УПРУГОГО УДАРА МАТЕРИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

В. И. Киргетов
(Москва)

Продолжено изучение абсолютно упругого удара, происходящего в системе при наложении на нее односторонней связи [1]. Ниже устанавливается свойство удара, касающееся минимума некоторой функции, и производится обобщение теории на случай произвольных гладких связей.

1. Рассматривается система из n материальных точек, стесненных гладкими, не зависящими от времени связями, уравнения которых суть

$$f_\alpha(x_1, \ldots, x_{3n}) = 0 \tag{1.1}$$

где $x_1, \ldots, x_{3n}$ — координаты точек системы относительно некоторой неподвижной декартовой системы координат (x_1, x_2, x_3 — координаты первой точки системы; x_4, x_5, x_6 — координаты второй точки и т. д.).

В некоторый момент движения системы на нее налагается гладкая односторонняя связь

$$\varphi(x_1, \ldots, x_{3n}) \geqslant 0 \tag{1.2}$$

Тогда в системе происходит удар. В основу его исследования [1] было положено уравнение

$$\sum m_i (v_i - v_{i0})\, \delta x_i \geqslant 0$$

где m_i — массы точек системы ($m_1 = m_2 = m_3$ — масса первой точки системы; $m_4 = m_5 = m_6$ — масса второй точки и т. д.); v_{i0} и v_i — скорости точек системы непосредственно перед ударом и после него; δx_i — «возможные перемещения» системы в момент удара. Величины δx_i удовлетворяют соотношениям

$$\sum \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}\, \delta x_i = 0$$

а также порождаемому связью (1.2) дополнительному соотношению

$$\sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, \delta x_i \geqslant 0$$

Для замыкания системы условий удара было использовано условие сохранения живой силы системы. В этих условиях было показано, что происходящие в результате удара скачкообразные изменения скоростей точек системы выражаются равенствами

$$v_i - v_{i0} = \mu R_i \tag{1.3}$$

где

$$\mu = 2 \sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} v_{i0} / \Sigma\, m_i R_i^2 \tag{1.4}$$

$$R_i = \frac{1}{m_i}\left(\sum \frac{A_{\beta\alpha}}{A} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} a_\beta - \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) \tag{1.5}$$

причем $A_{\beta\alpha}$ суть алгебраические дополнения элементов $a_{\alpha\beta}$ в определителе $A=|a_{\alpha\beta}|$, а $a_{\alpha\beta}$ и a_β задаются равенствами

$$a_{\alpha\beta}=\sum\frac{1}{m_i}\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial f_\beta}{\partial x_i},\qquad a_\beta=\sum\frac{1}{m_i}\frac{\partial f_\beta}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\tag{1.6}$$

Нетрудно проверить, что величины R_i удовлетворяют следующим тождествам

$$\sum\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}R_i=0,\qquad \sum\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}R_i=-\sum m_iR_i^2\tag{1.7}$$

В самом деле,

$$\sum\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}R_i=\sum\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}\frac{1}{m_i}\left(\sum\frac{A_{\rho\sigma}}{A}\frac{\partial f_\sigma}{\partial x_i}a_\rho-\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)=$$
$$=\sum\frac{A_{\rho\sigma}}{A}a_{\alpha\sigma}a_\rho-a_\alpha=a_\alpha-a_\alpha=0$$

и далее

$$\sum m_iR_i^2=\sum R_i\left(\sum\frac{A_{\beta\alpha}}{A}\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}a_\beta-\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)=$$
$$=\sum\frac{A_{\beta\alpha}}{A}a_\beta\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}R_i-\sum\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}R_i=-\sum\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}R_i$$

в силу уже доказанных тождеств. Что и требовалось. Условия абсолютно упругого удара в работе [1] замыкались условием сохранения живой силы системы. Однако это не единственное условие, которое может быть использовано для указанной цели. Докажем следующую теорему.

Теорема. Действительное состояние системы после удара удовлетворяет соотношению

$$\sum\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}v_i=-\sum\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}v_{i0}\tag{1.8}$$

и отличается от прочих состояний системы, допускаемых связями системы и соотношениями (1.8), тем, что для него выполняется равенство

$$\sum m_i(v_i-v_{i0})\,\delta x_i=0\tag{1.9}$$

при всех δx_i, подчиненных условиям

$$\sum\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}\delta x_i=0,\qquad \sum\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\delta x_i=0\tag{1.10}$$

Действительно, в силу (1.3) имеем

$$\sum\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}v_i=\mu\sum\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}R_i+\sum\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}v_{i0}$$

Подставив сюда из (1.4) значение μ и приняв во внимание последнее из тождеств (1.7), немедленно убеждаемся в справедливости равенства (1.8).

Первая часть теоремы тем самым доказана. Для доказательства второй ее части, очевидно, достаточно установить, что состояние системы после удара определяется условиями теоремы единственным образом и что это состояние является действительным.

Вводя неопределенные множители λ_α и μ, выводим из (1.9) и (1.10)

$$m_i(v_i - v_{i0}) + \sum \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0 \tag{1.11}$$

Подставив найденные отсюда значения v_i в вытекающие из (1.1) равенства

$$\sum \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} v_i = 0$$

и воспользовавшись обозначениями (1.6), получим

$$\sum \lambda_\alpha a_{\alpha\beta} + \mu a_\beta = 0$$

Отсюда, так как определитель $A = |a_{\alpha\beta}|$ отличен от нуля, следует

$$\lambda_\alpha = -\mu \sum \frac{A_{\beta\alpha}}{A} a_\beta \tag{1.12}$$

Поэтому равенства (1.11) можно преобразовать к виду

$$v_i - v_{i0} = \mu R_i \tag{1.13}$$

где R_i введены в соответствии с обозначениями (1.5).

Чтобы найти μ, исключим с помощью (1.13) из соотношения (1.8) величины v_i. Получим

$$\mu \sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} R_i = -2 \sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} v_{i0}$$

Приняв во внимание последнее из тождеств (1.7), видим, что вытекающее отсюда выражение для μ совпадает с (1.4). Теорема доказана.

Из этой теоремы вытекает интересное следствие. Если v_i и v_i^* описывают соответственно действительное и всякое другое допустимое связями системы и соотношением (1.8) состояния системы после удара, то в силу (1.10) имеем

$$\delta x_i = v_i^* - v_i$$

и, значит, равенство (1.9) может быть переписано

$$\sum m_i (v_i - v_{i0})(v_i^* - v_i) = 0$$

Отсюда, используя тождества

$$-(v_i - v_{i0})(v_i^* - v_i) = \tfrac{1}{2}[(v_i - v_{i0})^2 - (v_i^* - v_{i0})^2 + (v_i - v_i^*)^2]$$

находим

$$\sum \frac{m_i}{2}(v_i - v_{i0})^2 - \sum \frac{m_i}{2}(v_i^* - v_{i0})^2 + \sum \frac{m_i}{2}(v_i - v_i^*)^2 = 0$$

и, наконец, получаем

$$\sum \frac{m_i}{2}(v_i - v_{i0})^2 \leqslant \sum \frac{m_i}{2}(v_i^* - v_{i0})^2$$

Таким образом, среди всевозможных состояний системы после удара, допускаемых связями системы и удовлетворяющих условию (1.8), действительным будет то, для которого функция

$$\sum \frac{m_i}{2}(v_i - v_{i0})^2$$

принимает наименьшее значение.

2. Предположим на мгновение, что налагаемая на систему связь после удара сохраняется.

Удар, происходящий при наложении на систему двусторонней связи, хорошо изучен [2,3]. Он описывается уравнением

$$\sum m_i (u_i - v_{i0})\, \delta x_i = 0$$

где u_i — скорости системы после удара, а δx_i подчинены условиям

$$\sum \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} \delta x_i = 0, \qquad \sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \delta x_i = 0$$

Повторяя почти буквально выкладки предыдущего параграфа, находим, что скорости системы после удара выражаются равенствами

$$u_i - v_i = \nu R_i \tag{2.1}$$

аналогичными равенствам (1.3), однако с другим значением неопределенного множителя, именно

$$\nu = -\sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} v_{i0} \Big/ \sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} R_i \tag{2.2}$$

к которому приходим, исключив u_i при помощи (2.1) из соотношения

$$\sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} u_i = 0$$

имеющего место в соответствии с предположенной двусторонностью связи (1.2).

Пусть теперь связь (1.2), бывшая мгновение назад двусторонней, становится вновь односторонней и пусть на систему в состоянии, которого она только что достигла, воздействуют импульсами $m_i \nu R_i$, равными реакциям, развитым связями (в том числе и (1.2)) в предыдущем случае. Найдем состояние, которое приобретает система в результате этого второго удара.

Здесь мы имеем дело со случаем импульсивного воздействия на систему, среди связей которой имеются односторонние. Такого рода удар изучался Майером [4]. Следуя Майеру, будем искать минимум выражения

$$\sum \frac{m_i}{2} (v_i - u_i - \nu R_i)^2 \tag{2.3}$$

при условиях

$$\sum \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} v_i = 0, \qquad \sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} v_i \geqslant 0 \tag{2.4}$$

Наличие среди условий (2.4) неравенства означает, что определяемая ими область D возможных значений v_i имеет границу. Это обстоятельство вносит в решение задачи некоторую специфику: задачу решаем сначала при отброшенном неравенстве и проверяем, не удовлетворяют ли найденные значения v_i неравенству (2.4). При положительном решении вопроса исследование заканчивается, в противном случае минимум (2.3) следует искать на границе области D. Из (2.3) и (2.4) находим

$$m_i (v_i - u_i - \nu R_i) + \sum \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} = 0$$

Для определения неопределенных множителей λ_α при помощи последних уравнений исключим v_i из равенств (2.4); получим

$$\sum \lambda_\alpha a_{\alpha\beta} - \sum \frac{\partial f_\beta}{\partial x_i} u_i - \sum \frac{\partial f_\beta}{\partial x_i} \nu R_i = 0$$

Эта система имеет отличный от нуля определитель, так как $a_{\alpha\beta}$ введены в соответствии с обозначениями (1.6), и равные нулю на основании тождеств

$$\sum \frac{\partial f_\beta}{\partial x_i} u_i = 0, \qquad \sum \frac{\partial f_\beta}{\partial x_i} R_i = 0$$

свободные члены. Значит, все $\lambda_\alpha = 0$. И, значит,

$$v_i - u_i = \nu R_i. \tag{2.5}$$

Подставив найденные отсюда значения v_i в левую часть неравенства (2.4), получим

$$\sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} v_i = \sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} u_i + \nu \sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} R_i = \nu \sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} R_i = - \sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} v_{i0} \geqslant 0$$

так как перед ударом выполняется неравенство

$$\sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} v_{i0} \leqslant 0$$

Таким образом, выражаемое равенствами (2.5) состояние системы после удара удовлетворяет неравенству (2.4), и поэтому, в соответствии со сделанным выше замечанием, это состояние является действительным. Суммарное воздействие рассмотренных выше двух ударов найдется исключением u_i из равенств (2.1) и (2.5). Оно выражается равенствами

$$v_i - v_{i0} = 2\nu R_i$$

и оказывается таким же, что и при ударе, происходящем от наложения на систему односторонней связи (чтобы убедиться в этом, достаточно сравнить формулы (2.2) и (1.4)). Это обстоятельство наводит на любопытное заключение. Проследим вкратце вышеизложенное. Были рассмотрены последовательно два удара. Первый из них был порожден наложением на систему новой связи; причем условно было предположено, что связь после удара сохраняется. После этого первого удара односторонность связи была восстановлена и на систему в том ее состоянии, которого она достигла в результате этого удара, воздействовали импульсами, равными реакциям, развитым при первом ударе. Было установлено, что в результате второго удара система принимает состояние, совпадающее с ее состоянием после удара, когда связь (1.2) с самого начала считается односторонней.

Объединяя эти два удара в единый процесс и давая им физическое толкование, можем сказать, что удар, происходящий в системе при наложении на нее односторонней связи, состоит из последовательности двух фаз—первой или неупругой фазы, когда удар протекает абсолютно неупруго и когда происходит накопление реакций, и второй фазы, когда импульсом реакций, накопленных на первой фазе удара, происходит взрывное освобождение системы от односторонней связи.

3. Сформулированная выше физическая интерпретация абсолютно упругого удара была установлена в предположении, что связи не зависят от времени и что налагающаяся на систему связь выражается одним неравенством. Однако физическая наглядность этой интерпретации позволяет думать, что и в общем случае голономных или неголономных связей, когда налагающиеся на систему связи выражаются несколькими неравенствами, удар происходит точно так же.

Это, конечно, гипотеза. Но будучи взятой за основу, она позволяет рассчитать в общем случае изменения, происходящие в состоянии системы за время удара. Для разыскания состояния системы после удара следует в соответствии с этой гипотезой рассчитать последовательность двух фаз удара. Это можно сделать, следуя приведенным выше выкладкам, или же так, как это сделано в [5].

Результаты, установленные в первом пункте этой работы, имеют место и в общем случае.

Состояние системы после удара удовлетворяет соотношениям

$$\sum b_{\mu i} v_i + b_\mu = -\left(\sum b_{\mu i} v_{i0} + b_\mu\right) \tag{3.1}$$

если налагающиеся на систему односторонние связи выражаются неравенствами

$$\sum b_{\mu i} v_i + b_\mu \geqslant 0$$

От прочих состояний системы после удара, допускаемых связями системы и удовлетворяющих соотношениям (3.1), действительное состояние отличается тем, что для него при всех δx_i, подчиненных условиям

$$\sum c_{\lambda i}\, \delta x_i = 0, \qquad \sum b_{\mu i}\, \delta x_i = 0 \tag{3.2}$$

выполняется равенство

$$\sum m_i (v_i - v_{i0})\, \delta x_i = 0$$

Первая группа соотношений (3.2) порождается уравнениями связей системы, вторая является следствием соотношений (3.1), выражающих упругие свойства налагающихся на систему связей.

Из этой теоремы вытекает следствие.

Среди всевозможных состояний системы после удара, допускаемых связями системы и удовлетворяющих соотношениям (3.1), действительным будет то, для которого функция

$$\sum \frac{m_i}{2} (v_i - v_{i0})^2$$

принимает наименьшее значение.

Поступила 10-X 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Киргетов В. И. Об абсолютно упругом ударе материальных систем. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 5.
2. Аппель П. Теоретическая механика т. 2, Физматгиз, 1960.
3. Леви-Чивита Т., Амальди У. Курс теоретической механики, т. 2, ч. 2, Изд-во иностр. лит-ры, 1951.
4. Mayer A. Zur Regulirung der Stosse. Leipzig. Berichte, 1899.
5. Наумов А. Л. Теоретическая механика. 1958, ч. 2, Изд-во Киев. ун-та.