Введем обозначения [2]

$$\frac{dF_k{}^\circ (z_k)}{dz_k} = \Phi_k{}^\circ (z_k), \qquad \frac{dF_k (z_k)}{dz_k} = \Phi_k \quad) \quad (k = 1, 2) \tag{5.4}$$

Потребуем на границе раздела зон γ выполнения следующих равенств [2]

$$2\mathrm{Re}\,[\Phi_1{}^\circ (z_1) + \Phi_2{}^\circ (z_2)]_\gamma = 2\mathrm{Re}\,\,[\Phi_1 (z_1) + \Phi_2 (z_2)]_\gamma,$$

$$2\mathrm{Re}\,[\mu_1\Phi_1{}^\circ (z_1) + \mu_2\Phi_2{}^\circ (z_2)]_\gamma = 2\mathrm{Re}\,\,[\mu_1\Phi_1 (z_1) + \mu_2\Phi_2 (z_2)]_\gamma, \qquad \left.\frac{\partial \varkappa}{\partial z_1}\right|_\gamma = \left.\frac{\partial \varkappa}{\partial z_2}\right|_\gamma = 0$$

Таким образом, условия равновесия на границе γ будут соблюдены и упругая функция напряжений F° непрерывно переходит в пластическую функцию напряжений F.

Пользуюсь случаем сделать замечание о работе [4]. Вопросы бигармоничности пластической функции напряжений рассматривались в работах [7,8].

Поступила 11 VII 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. Гостехиздат, М.— Л., 1950.
2. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. Изд. 2-е, М., Гостехиздат, 1957.
3. Хилл Р. Математическая теория пластичности. Гостехиздат, М., 1956.
4. Добровольский В. Л. О плоской пластической деформации. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 5
5. Соколовский В. В. Теория пластичности. Изд-во АН СССР. 1946.
6. Добровольский В. Л. Задача о плоской деформации идеально пластического тела в комплексных переменных. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 2
7. Савін Г. М., Парасюк О. С. Бігармонічні розв'язання рівняння. . . ДАН УРСР, 1947, № 3.
8. Савін Г. М., Парасюк О. С. Характеристики бігармонічного стану. ДАН УРСР, 1947, № 4.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВИБРАЦИОННО-ЛИНЕАРИЗИРОВАННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

И. И. Блехман, Г. Ю. Джанелидзе

(Ленинград)

Многие задачи механики и автоматического регулирования приводят к необходимости рассмотрения движений систем, содержащих нелинейные элементы с разрывными характеристиками и находящихся под действием периодически изменяющихся возмущений, частоты которых существенно выше возможных частот основного установившегося или квази-стационарного движения системы.

В таких случаях уравнения движения, как правило, допускают решение, состоящее из двух слагаемых: первое отвечает основному (медленному) движению, второе содержит высокочастотные составляющие, амплитуды которых относительно малы по сравнению со слагаемым, соответствующим основному движению.

Для получения дифференциальных уравнений, описывающих изменение медленной составляющей, обычно используются приемы, получившие название метода вибрационной линеаризации или вибрационного сглаживания [1-3]. При помощи указанных методов в последнее время были получены результаты [2-6], существенные для приложений.

В статье [6] Е. П. Попов предложил рассматривать с помощью вибрационно-линеаризированных уравнений не только вопрос о нахождении основного медленного движения системы, но и изучать устойчивость этого движения.

В настоящей работе авторы, не ставя перед собой задачи строгого обоснования обсуждаемого метода, указывают на наличие некоторого необходимого условия справедливости рассуждений, лежащих в его основе. Дело в том, что основное движение системы может быть медленным, но малые отклонения от этого движения, обусловленные возмущениями, могут оказаться быстрыми движениями, для описания которых вибрационно-линеаризированные уравнения непригодны. Поэтому при использовании вибрационно-линеаризированных уравнений в задаче устойчивости необходимо проверить, что и неустановившиеся движения, описываемые этими уравнениями, являются достаточно медленными по сравнению с быстротой изменения вибрационной составляющей, обуславливающей линеаризацию.

1. Рассмотрим систему, дифференциальное уравнение движения которой имеет вид:

$$Q(p)\,x + R(p)\,F(x) = S_1(p)\,f_1(t) + S_2(p)\,f_2(t) \tag{1.1}$$

где $Q(p)$, $R(p)$, $S_1(p)$ и $S_2(p)$ — дифференциальные операторы, являющиеся полиномами относительно оператора $p = d\,/\,dt$; t — время; x — обобщенная координата; $F(x)$ — нелинейная функция.

Пусть внешнее воздействие $f_1(t)$ — функция t, характеризуемая частотой ω, значительно меньшей, чем частота Ω функции $f_2(t)$, которую для простоты будем полагать гармонической:

$$f_2(t) = B\sin\Omega t \tag{1.2}$$

Для приближенного решения задачи обычно поступают следующим образом [2]: решение приближенно разыскивается в форме

$$x(t) = x^\circ(t) + x^*(t) \tag{1.3}$$

где $x^*(t) = A\sin(\Omega t + \varphi)$; $x^\circ(t)$ — медленно меняющаяся составляющая; A и φ — медленно меняющиеся функции времени.

Подставляя (1.3) в (1.1), имеем:

$$Q(p)\,x^\circ + R(p)\,F(x^\circ + x^*) + Q(p)\,x^* = S_1(p)\,f_1(t) + S_2(p)\,f_2(t) \tag{1.4}$$

Разлагая $F(x^\circ + x^*)$ в ряд Фурье по гармоникам $\sin k(\Omega t + \varphi)$ и $\cos k(\Omega t + \varphi)$, имеем, ограничиваясь членами с нулевой и первой гармониками (предполагается, что высшие гармоники системой практически не пропускаются и поэтому их отбрасывание не ведет к грубым ошибкам):

$$F(x) = F^\circ(x^\circ,\ A) + q(x^\circ,\ A)\,x^* + \frac{q'(x^\circ,\ A)}{\Omega}\,px^* + \cdots \tag{1.5}$$

где

$$F^\circ(x^\circ,\ A) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} F(x^\circ + A\sin\psi)\,d\psi$$

$$q(x^\circ,\ A) = \frac{1}{\pi A}\int\limits_0^{2\pi} F(x^\circ + A\sin\psi)\sin\psi\,d\psi$$

$$q'(x_0,\ A) = \frac{1}{\pi A}\int\limits_0^{2\pi} F(x^\circ + A\sin\psi)\cos\psi\,d\psi \tag{1.6}$$

При учете (1.5) и (1.6) из (1.4) получаются два дифференциальных уравнения. Одно из них определяет основное медленное движение, а другое — быстро изменяющуюся составляющую:

$$Q(p)\,x^\circ + R(p)\,F^\circ(x^\circ, A) = S_1(p)\,f_1(t) \tag{1.7}$$

$$Q(p)x^* + R(p)\left(qx^* + \frac{q'}{\Omega}\,px^*\right) = S_2(p)\,f_2(t) \tag{1.8}$$

Из уравнения (1.8) определяются амплитуда A и фаза φ как функции от x°. Затем из выражения функции $F^\circ(x^\circ, A)$, с помощью найденной зависимости $A = A(x^\circ)$, исключается амплитуда A. Далее функция $\Phi(x^\circ) = F^\circ[x^\circ, A(x^\circ)]$ обычно линеаризируется; при этом для всех нечетно-симметричных нелинейностей окончательно получается:

$$F^\circ = \Phi(x^\circ) \approx k^\circ x^\circ \qquad (1.9)$$

В результате, линеаризированное уравнение (1.7) для медленно меняющейся составляющей, принимает вид:

$$[Q(p) + k^\circ R(p)]\, x^\circ = S_1(p)\, f_1(t) \qquad (1.10)$$

где коэффициент k° зависит, конечно, от амплитуды B и частоты Ω высокочастотного воздействия.

2. Рассмотрим теперь вопрос об исследовании устойчивости решения $x^\circ(t) + x^*(t)$. Для этой цели предположим, что имеется возмущение $\xi(t)$. Если это возмущение медленно меняющаяся функция, то его естественно отнести к члену с $x^\circ(t)$ и тогда действительно можно сделать вывод, что уравнение для $x^\circ(t)$ позволяет судить об устойчивости, как это, например, сделано в работах [4–6].

Однако $\xi(t)$ может, вообще говоря, оказаться и быстро меняющейся функцией; тогда, естественно, достоверного суждения об устойчивости на основе изучения линеаризированного уравнения получить нельзя, ибо это уравнение справедливо лишь для движений, достаточно медленных по сравнению с быстротой изменения высокочастотной составляющей. Существенно, что неустановившиеся движения, описываемые вибрационно-линеаризированными уравнениями, могут оказаться быстрыми, даже при выполнении обычно выставляемого требования о наличии у линейной части системы свойств фильтра высоких частот, то есть при условии достаточной медленности собственных колебаний линейной части системы. Сказанное иллюстрируется приводимым ниже примером.

3. Рассмотрим систему с одной степенью свободы, движение которой описывается уравнением

$$\ddot{x} + k^2 x + F(x) = B_0 \sin \omega t + B \sin \Omega t \qquad (3.1)$$

где

$$F(x) = \begin{cases} C & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -C & x < 0 \end{cases} \qquad (3.2)$$

Пусть $\Omega \gg \omega$. Применяя описанный выше прием, имеем:

$$F^\circ \approx \frac{2C}{\pi A} x^\circ, \qquad q = \frac{4C}{\pi A}, \qquad q' = 0 \qquad (|x^\circ| < |A|) \qquad (3.3)$$

Уравнения (1.7) и (1.8) соответственно для медленной и быстрой составляющих движения будут:

$$\ddot{x}^\circ + \left(k^2 + \frac{2C}{\pi A}\right) x^\circ = B_0 \sin \omega t \qquad (3.4)$$

$$\ddot{x}^* + \left(k^2 + \frac{4C}{\pi A}\right) x^* = B \sin \Omega t \qquad (3.5)$$

Разыскивая решение уравнения (3.5) в форме $x^* = A \sin(\Omega t + \varphi)$, находим

$$A = \frac{B - 4C/\pi}{k^2 - \Omega^2}, \qquad \varphi = 0 \qquad (3.6)$$

и тогда уравнение (3.4) принимает вид:

$$\ddot{x}^\circ + \left[k^2 - \frac{k^2 - \Omega^2}{2(1 - \pi B/4C)}\right] x^\circ = B_0 \sin \omega t \qquad (3.7)$$

Отсюда искомое медленное движение

$$x^\circ = \frac{B_0}{k^2 - \omega^2 - \dfrac{k^2 - \Omega^2}{2(1 - \pi B/4C)}} \sin \omega t \qquad (3.8)$$

Последняя формула, в соответствии с (3.3) и (3.6), имеет место лишь при выполнении неравенства

$$\left| \frac{B_0}{k^2 - \omega^2 - \dfrac{k^2 - \Omega^2}{2(1 - \pi B/4C)}} \right| < \left| \frac{B - 4C/\pi}{k^2 - \Omega^2} \right| \qquad (3.9)$$

которое, во всяком случае, справедливо, если B_0 достаточно мало.

Нетрудно видеть, что несмотря на медленность движения (3.8), а также на медленность свободных колебаний системы без нелинейного элемента, свободные колебания, описываемые уравнением (3.7), могут оказаться относительно «быстрыми», поскольку их частота

$$\lambda^2 = k^2 - \frac{k^2 - \Omega^2}{2(1 - \pi B / 4C)} \tag{3.10}$$

иногда сравнима (или даже выше), с частотой Ω быстрого движения. Действительно, пусть $k = 1$ сек$^{-1}$, $\omega = 10$ сек$^{-1}$, $\Omega = 100$ сек$^{-1}$, $B = 1$, $C = 1/2\ \pi$. Тогда

$$\lambda \approx \sqrt{1 + 10^4} \approx 10^2 \text{ сек}^{-1} = \Omega$$

В этом случае, конечно, нельзя ожидать, что уравнение (3.4) будет правильно описывать даже малые отклонения от основного медленного движения. Действительно, пренебрегая в (3.10) квадратом частоты k по сравнению с квадратом частоты Ω и предполагая, что второе слагаемое в формуле (3.10) много больше k^2, получаем соотношение

$$\lambda = \frac{\Omega}{\sqrt{2(1 - \pi B / 4C)}} \tag{3.11}$$

из которого, при справедливости сделанных предположений, вытекает, что условием устойчивости является выполнение неравенства

$$1 - \frac{\pi}{4} \frac{B}{C} > 0 \tag{3.12}$$

Формула (3.11) показывает, что вблизи «границы устойчивости» $1 - \pi B / 4C = 0$, определенной по вибрационно-линеаризированному уравнению, частота возмущенного движения λ весьма велика. Поэтому условие устойчивости (3.12) для изучаемого примера не может считаться сколько-нибудь обоснованным.

Полученный в примере результат убедительно показывает необходимость сформулированного выше требования достаточной медленности возмущенного движения по сравнению с быстротой изменения высокочастотной составляющей.

Поступила 21 XI 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский А. А. О вибрационном способе линеаризации некоторых нелинейных систем. Автоматика и телемеханика, 1948, т. IX, № 1.
2. Попов Е. П. К теории вибрационного сглаживания нелинейных характеристик систем автоматического управления с помощью автоколебаний. Сб. Автоматическое управление и вычислительная техника, в. 2, Машгиз, 1959, стр. 104—138.
3. Максимов А. Д. К теории вибрационного сглаживания нелинейных характеристик систем автоматического управления при помощи вынужденных колебаний. Сб. Автоматическое управление и вычислительная техника, в. 2, М., Машгиз, 1959, стр. 139—166.
4. Попов Е. П. Влияние вибрационных помех на устойчивость и динамические качества нелинейных автоматических систем. Изв. АН СССР, ОТН, Энергетика и автоматика, 1959, № 4.
5. Богданов А. Г. Расчет устойчивости нелинейной системы управления при наличии вибрационных помех. Изв. АН СССР, ОТН, Энергетика и автоматика, 1960, № 1.
6. Попов Е. П. и Пальмов И. П. Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем. Физматгиз, 1960.