**Прикладная математика и механика. Том XXV, 1961**
**Отделение технических наук Академии наук Союза ССР**

# КО ВТОРОЙ МЕТОДЕ ЛЯПУНОВА

**С. К. Персидский**

(Алма-Ата)

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = f_s(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

где $f_s$ — вещественные функции, заданные в некоторой области

$$(h)\ t \geqslant 0, \qquad \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} \leqslant R$$

непрерывные по $t$ и удовлетворяющие условию Коши относительно $x_1, \ldots, x_n$; причем $f_s(t, 0, 0, \ldots, 0) \equiv 0$.

Пусть $\varphi(\tau)$ — вещественная непрерывная функция при $\tau \geqslant 0$, имеющая непрерывную производную и удовлетворяющая следующим двум условиям:

(1) $\varphi(\tau) = 1$ при $0 \leqslant \tau \leqslant R_0 < R_1 < R$, (2) $\varphi(\tau) = 0$ при $\tau \geqslant R_1$

Введем функции

$$F_s(t, x_1, \ldots, x_n) = f_s(t, x_1, \ldots, x_n)\,\varphi(\|x\|) \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

причем для определенности положим $f_s(t, x_1, \ldots, x_n) \equiv 0$ при $\|x\| > R$. Нетрудно видеть [1], что функции $F_s$ непрерывны по $t$ и удовлетворяют условию Коши относительно $x_1, \ldots, x_n$ в области

$$(H) \quad t \geqslant 0, \qquad \|x\| < \infty$$

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = F_s(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{2}$$

Очевидно, что через каждую точку $(t_0, x_{10}, \ldots, x_{n0})$ области $H$ проходит единственное решение

$$x_s = x_s(t, t_0, x_{10}, \ldots, x_{n0}) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{3}$$

системы (2). Хорошо известно [1,2], что соотношения (3) разрешимы в $H$ относительно величин $x_{s0}$, причем

$$x_{s0} = x_s(t_0, t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{4}$$

В области

$$(h_0) \quad t \geqslant 0, \qquad \|x\| \leqslant R_0$$

решения системы (2) совпадают с соответствующими решениями системы (1), поэтому нулевые решения указанных систем уравнений эквивалентны относительно устойчивости в смысле Ляпунова [3].

*Определение 1.* Пусть в некоторой области

$$(g)\quad t \geqslant 0,\quad \|x\| \leqslant r \qquad (r \leqslant R_0)$$

определена непрерывная однозначная функция $V(t, x_1, \ldots, x_n)$, знакоопределенная, положительная при любом фиксированном значении $t \geqslant 0$. Допустим, что функция $V(t, x_1, \ldots, x_n)$ такова, что существует некоторая вещественная постоянная $\alpha > 0$ $(\alpha < r)$ такая, что для любого начального значения $t = t_0 \geqslant 0$ и любого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$ всегда найдется такое значение $t = T(\varepsilon, t_0) > t_0$, что в плоскости $t = T$ области $g$ всегда можно точку $O(T, 0, 0, \ldots, 0)$ соединить с поверхностью $\|x\| = \alpha$ некоторой непрерывной линией Г, во всех точках которой будет выполнено неравенство

$$V(T, x_1, \ldots, x_n) < \varepsilon \tag{5}$$

Тогда будем говорить, что рассматриваемая функция $V(t, x_1, \ldots, x_n)$ является положительной слабознакоопределенной.

*Определение 2.* Пусть $V(t, x_1, \ldots, x_n)$ — положительная знакоопределенная функция в области $g$ и пусть $\eta > 0$ — произвольно выбранное число. Обозначим через $D(\eta)$ множество всех тех точек области $g$, в которых выполняется неравенство

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) \leqslant \eta \tag{6}$$

Пусть $t = t^* \geqslant 0$. Пересечение множества $D(\eta)$ с плоскостью $t = t^*$ области $g$ обозначим через $\sigma(\eta, t^*)$.

Если при любом достаточно малом $\eta > 0$ максимум норм точек $(t^*, x_1, \ldots, x_n) \in \sigma(\eta, t^*)$ удовлетворяет условию

$$\max \|x\| \to 0 \quad \text{при } t^* \to \infty$$

то будем говорить, что рассматриваемая функция $V(t, x_1, \ldots, x_n)$ является положительной сильнознакоопределенной.

Пусть, например,

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{s,\,k=1}^{n} a_{sk}(t)\, x_s x_k \qquad (a_{sk} = a_{ks}) \tag{7}$$

есть квадратичная форма, знакоопределенная положительная при любом фиксированном значении $t \geqslant 0$. Обозначим через $\lambda_1(t)$ наименьший корень уравнения $\det \|a_{sk}(t) - \lambda\delta_{sk}\| = 0$.

Легко показать, [4], что квадратичная форма (7) будет положительной сильнознакоопределенной, тогда и только тогда, когда

$$\lim \lambda_1(t) = \infty \quad \text{при } t \to \infty$$

Для того чтобы рассматриваемая квадратичная форма была положительной слабознакоопределенной, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim \lambda_1(t) = 0 \qquad \text{при } t \to \infty$$

Пусть $t_0 \geqslant 0$. Обозначим через

$$x_s = x_s(t, t_0, x_{10}, \ldots, x_{n0}) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{8}$$

решение системы (2), проходящее при $t = t_0$ через произвольную точку $(t_0, x_{10}, \ldots, x_{n0})$ области $H$. Разрешим соотношения (8) относительно $x_{s0}$ (согласно формуле (4)) и положим

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{s=1}^{n} x_s^2(t_0, t, x_1, \ldots, x_n) \tag{9}$$

Очевидно, что рассматриваемая функция $V(t, x_1, \ldots, x_n)$ является знакоопределенной положительной при любом фиксированном значении $t \geqslant 0$, причем в области $H$ в силу системы уравнений (2)

$$V'(t, x_1, \ldots, x_n) \equiv 0 \tag{10}$$

**n°1.** Покажем, что если нулевое решение системы (1) неустойчиво, то тогда функция

$$V_0(t, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{s=1}^{n} x_s^2(0, t, x_1, \ldots, x_n) \tag{11}$$

определяемая из соотношения (9) при $t_0 = 0$, будет в области $h_0$ положительной слабознакоопределенной.

Действительно, если нулевое решение системы (1), а тем самым и системы (2), неустойчиво, то всегда найдется вещественная постоянная $\alpha > 0$ $(\alpha < R_0)$ такая, что среди всевозможных решений системы (2)

$$x_s = u_s(t, x_{10}, \ldots, x_{n0}) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{12}$$

удовлетворяющих при $t = 0$ начальным условиям

$$\|x_0\| = \tfrac{1}{2}\sqrt{3\varepsilon} < \alpha \tag{13}$$

имеется хотя бы одно такое решение

$$x_s = u_s(t, \xi_{10}, \ldots, \xi_{n0}) \qquad (s = 1, \ldots, n) \quad \left(\|\xi_0\| = \tfrac{1}{2}\sqrt{3\varepsilon}\right) \tag{14}$$

и найдется такое значение $t = T(\varepsilon) > 0$, что любое из решений (12) будет при всех значениях $t \in [0, T)$ удовлетворять неравенству

$$\|u(t, x_{10}, \ldots, x_{n0})\| < \alpha \tag{15}$$

а решение (14) при $t = T(\varepsilon)$ обязательно будет удовлетворять условию

$$\|u(T, \xi_{10}, \ldots, \xi_{n0})\| = \alpha \tag{16}$$

Причем, если $t = t_0 \geqslant 0$ — произвольно выбранное фиксированное значение величины $t$, то в силу непрерывности решений системы (2) относительно начальных значений всегда можно предполагать число $\varepsilon > 0$ из (13) выбранным настолько малым, что указанная выше величина $T = T(\varepsilon)$ будет более величины $t_0$. Очевидно, что геометрическое место точек, лежащих при $t \geqslant 0$ на интегральных линиях (12), образует поверхность

$$V_0(t, x_1, \ldots, x_n) = \tfrac{3}{4}\varepsilon \tag{17}$$

Причем из (16) следует, что на указанной поверхности при $t = T$ обязательно имеется точка $M(T, x_1', \ldots, x_n')$, в которой $\|x'\| = \alpha$.

При $t = T(\varepsilon)$ поверхность (17) определяет некоторое связное замкнутое множество $\gamma$ ($^3/_4$ $\varepsilon$, $T$) (для которого точки поверхности (17) при $t = T$ являются граничными), во всех точках которого выполняется неравенство

$$V_0(T, x_1, \ldots, x_n) \leqslant \frac{3}{4}\varepsilon \tag{18}$$

Причем точка $O(T, 0, 0, \ldots, 0)$ является внутренней точкой множества $\gamma(^3/_4\varepsilon, T)$, а точка $M(T, x_1', \ldots, x_n')$, в которой $\|x'\| = \alpha$, будет граничной точкой этого множества. Из (18) следует, что указанные точки $O$ и $M$ в плоскости $t = T(\varepsilon)$ всегда можно соединить некоторой непрерывной линией $\Gamma$, во всех точках которой будет выполнено неравенство

$$V_0(T, x_1, \ldots, x_n) \leqslant \frac{3}{4}\varepsilon < \varepsilon \tag{19}$$

Следовательно, функция $V_0$ в рассматриваемом случае является положительной слабознакоопределенной, причем из (10) следует, что $V' \equiv 0$ в области $h_0$ в силу системы уравнений (1).

**n°2.** Пусть нулевое решение системы (1), а тем самым и системы (2) устойчиво асимптотически равномерно по координатам $x_{10}, \ldots, x_{n0}$. Покажем, что тогда рассмотренная выше функция $V_0(t, x_1, \ldots, x_n)$ будет в области $h_0$ положительной сильнознакоопределенной

Обозначим через

$$x_s = u_s(t, x_{10}, \ldots, x_{n0}) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{20}$$

решения системы (2), удовлетворяющие при $t = 0$ начальным условиям

$$\|x_0\| \leqslant \eta \tag{21}$$

где $\eta > 0$ — произвольно заданное достаточно малое такое число, что решения (20) удовлетворяют следующему условию:

$$\|u(t, x_{10}, \ldots, x_{n0})\| \to 0 \qquad \text{при } t \to \infty \tag{22}$$

равномерно относительно $x_{10}, \ldots, x_{n0}$ связанных соотношением (21).

Пусть $t = t^* \geqslant 0$. Пересечение множества всех тех точек, в которых $V_0(t, x_1, \ldots, x_n) \leqslant \eta$, с плоскостью $t = t^*$ обозначим через $\sigma(\eta, t^*)$. Очевидно, что геометрическое место точек, лежащих при $t = t^*$ на интегральных линиях (20), и образует указанное множество $\sigma(\eta, t^*)$. Так как интегральные линии (20) удовлетворяют условию (22), равномерно относительно $x_{10}, \ldots, x_{n0}$ связанных соотношением (21), то очевидно, что максимум норм точек $(t^*, x_1, \ldots, x_n) \in \sigma(\eta, t^*)$ удовлетворяет условию

$$\max\|x\| \to 0 \qquad \text{при } t^* \to \infty \tag{23}$$

Кроме того, хорошо известно [1, 2], что в случае устойчивости нулевого решения системы (1) функция $V_0(t, x_1, \ldots, x_n)$ будет в области $h_0$ положительной знакоопределенной.

Таким образом, в рассматриваемом случае функция $V_0(t, x_1, \ldots, x_n)$ действительно является положительной сильнознакоопределенной в области $h_0$.

*Теорема 1.* Для того чтобы нулевое решение системы (1) было неустойчиво, необходимо и достаточно, чтобы в некоторой области

$$(g) \quad t \geqslant 0, \qquad \|x\| \leqslant r \leqslant R_0$$

существовала положительная слабознакоопределенная функция $V(t, x_1, \ldots, x_n)$ такая, что $V'(t, x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0$ в силу системы уравнений (1).

*Достаточность.* Допустим, что нулевое решение системы (1) устойчиво. Тогда при любом $t_0 \geqslant 0$ для вещественной постоянной $\alpha > 0$, входящей в определение слабознакоопределенной функции $V$, всегда найдется такое число $\delta = \delta(\alpha, t_0) > 0$, что все интегральные линии

$$x_s = x_s(t, t_0, x_{10}, \ldots, x_{n0}) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{24}$$

системы (1), проходящие при $t = t_0$ через точки сферической поверхности

$$\|x_0\| = \delta \tag{25}$$

будут при всех значениях $t \geqslant t_0$ удовлетворять неравенству

$$\|x(t, t_0, x_{10}, \ldots, x_{n0})\| < \alpha \tag{26}$$

Пусть $l = \min V(t_0, x_1, \ldots, x_n)$ при $\|x\| = \delta$. Тогда в силу того, что $V' \geqslant 0$, во всех точках, лежащих при $t \geqslant t_0$ на интегральных линиях (24), будет выполнено неравенство

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) \geqslant l \tag{27}$$

По условию теоремы функция $V$ такова, что для любого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon < l)$ всегда найдется такое значение $t = T(\varepsilon, t_0) > t_0$, что в плоскости $t = T$ области $g$ точку $O(T, 0, 0, \ldots, 0)$ всегда можно соединить хотя бы с одной точкой $M(T, x_1', \ldots, x_n')$, лежащей на поверхности $\|x\| = \alpha$, некоторой непрерывной линией $\Gamma$, во всех точках которой будет выполнено неравенство

$$V(T, x_1, \ldots, x_n) < \varepsilon < l \tag{28}$$

Интегральные линии (24) образуют в плоскости $t = T$ некоторую поверхность $S(\delta, t_0, T)$, во всех точках которой выполняется условие (27) и которая гомеоморфна сферической поверхности $\|x_0\| = \delta(\alpha, t_0)$ плоскости $t = t_0$ области $g$. Поверхность $S(\delta, t_0, T)$ определяет в плоскости $t = T$ некоторое замкнутое множество $\gamma(\delta, t_0, T)$, для которого точки поверхности $S(\delta, t_0, T)$ являются граничными; причем точка $O(T, 0, 0, \ldots, 0) \in \gamma(\delta, t_0, T)$ и является внутренней точкой этого множества.

Отсюда, на основании (26), заключаем, что указанная выше линия $\Gamma$ обязательно должна иметь хотя бы одну общую точку с поверхностью $S(\delta, t_0, T)$, но в этой общей точке должны одновременно выполняться исключающие друг друга неравенства (27) и (28). Из полученного противоречия заключаем, что сделанное предположение относительно устойчивости нулевого решения системы (1) не имеет места.

*Необходимость.* В n° 1 было показано, что функция $V_0(t, x_1,\ldots, x_n)$, определяемая из соотношения (11), является в случае неустойчивости нулевого решения системы (1) положительной слабознакоопределенной в области $h_0$, причем в этой области $V' \equiv 0$ в силу системы уравнений (1). Нетрудно видеть, что в рассматриваемом случае положительной слабознакоопределенной функцией в области $h_0$ будет также функция $W(t, x_1,\ldots, x_n) = V_0(t, x_1,\ldots, x_n)(2 - e^{-t})$, причем в этой области $W' > 0$ при $\|x\| > 0$ в силу системы уравнений (1).

Таким образом, теорема полностью доказана.

В качестве приложения теоремы 1 исследуем устойчивость нулевого решения системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = -2xyz, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{y}{t+2} + x^2 z, \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{z}{t+2} + x^2 y \tag{29}$$

Нетрудно видеть, что функция

$$V(t, x, y, z,) = x^2 + y^2 + z^2 + 2\,\frac{t+1}{t+2}\,zy$$

является положительной слабознакоопределенной, причем в силу системы уравнений (29)

$$V'(t, x, y, z) = \frac{2}{t+2}\left[z^2 + y^2 + \frac{2t+3}{t+2}\,zy + x^2(t+1)(z^2+y^2)\right] \geqslant 0$$

Следовательно, нулевое решение рассматриваемой системы уравнений неустойчиво.

*Теорема 2.* Для того чтобы нулевое решение системы (1) было устойчиво асимптотически равномерно по координатам $x_{10},\ldots, x_{n0}$, необходимо и достаточно, чтобы в некоторой области

$$(g) \qquad t \geqslant 0, \qquad \|x\| \leqslant r \leqslant R_0$$

существовала положительная сильно знакоопределенная функция $V(t, x_1,\ldots, x_n)$ такая, что $V'(t, x_1,\ldots, x_n) \leqslant 0$ в силу уравнений (1).

*Достаточность.* Пусть $r_0 > 0$ ($r_0 < r$) — произвольно заданное число. Функция $V(t, x_1,\ldots, x_n)$ является знакоопределенной положительной, поэтому всегда можно указать достаточно малое такое число $\eta_0 > 0$, что точки множества $D(\eta_0)$, состоящего из всех тех точек $(t, x_1,\ldots, x_n) \in g$, в которых выполняется неравенство

$$V(t, x_1,\ldots, x_n) \leqslant \eta_0 \tag{30}$$

будут принадлежать области $g_0$:

$$(g_0) \qquad t \geqslant 0, \qquad \|x\| \leqslant r_0$$

Причем, очевидно, что при любом $\eta \leqslant \eta_0$ ($\eta > 0$) все точки множества $D(\eta)$ будут также принадлежать области $g_0$. Пусть $\eta_1 > 0$ ($\eta_1 < \eta_0$) — произвольно выбранное такое число, что максимум норм точек $(t^*, x_1,\ldots, x_n^*) \in \sigma(\eta_1, t^*)$, где $\sigma(\eta_1, t^*)$ есть пересечение множества $D(\eta_1)$ с плоскостью $t = t^* \geqslant 0$, удовлетворяет условию

$$\max \|x\| \to 0 \quad \text{при } t^* \to \infty \tag{31}$$

(выбор указанного числа $\eta_1$, очевидно, возможен в силу того, что $V(t, x_1,\ldots, x_n)$ — положительная сильнознакоопределенная функция).

Пусть $t_0 \geqslant 0$ — произвольно выбранное значение величины $t$. Выберем число $\delta = \delta(t_0, \eta_1) > 0$ $(\delta < r_0)$, такое, что

$$V(t_0, x_1, \ldots, x_n) < \eta_1 \tag{32}$$

если только $\|x\| \leqslant \delta(t_0, \eta_1)$. Так как в рассматриваемом случае нулевое решение системы (1) устойчиво в силу теоремы Ляпунова об устойчивости [3], то будем предполагать, что указанное выше число $\delta(t_0, \eta_1)$ выбрано таким, что все решения

$$x_s = x_s(t, t_0, x_{10}, \ldots, x_{n0}) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{33}$$

системы (1), удовлетворяющие при $t = t_0$ начальным условиям

$$\|x_0\| \leqslant \delta(t_0, \eta_1) \tag{34}$$

будут при всех значениях $t \geqslant t_0$ оставаться в области $g_0$. По условию теоремы $V'(t, x_1, \ldots, x_n) \leqslant 0$, поэтому на основании (34) и (32) заключаем, что множество всех точек $(t, x_1, \ldots, x_n)$, лежащих при $t \geqslant t_0$ на интегральных линиях (33), принадлежит множеству $D(\eta_1)$. Но тогда из (31) следует, что решения (33) системы (1) удовлетворяют следующему условию:

$$\|x(t, t_0, x_{10}, \ldots, x_{n0})\| \to 0 \quad \text{при } t \to \infty \tag{35}$$

равномерно относительно $x_{10}, \ldots, x_{n0}$ принадлежащих области

$$t = t_0, \qquad \|x_0\| \leqslant \delta(t_0, \eta_1)$$

*Неодходимость.* В n° 2 было показано, что в случае асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1), равномерной по координатам $x_{10}, \ldots, x_{n0}$, функция $V_0(t, x_1, \ldots, x_n)$, определяемая из соотношения (11), будет положительной сильнознакоопределенной в области $h_0$, причем в этой области $V' \equiv 0$ в силу системы (1). Нетрудно видеть, что функция

$$U(t, x_1, \ldots, x_n) = V_0(t, x_1, \ldots, x_n)(1 + e^{-t})$$

в рассматриваемом случае также является положительной сильнознакоопределенной в области $h_0$ причем в этой области $U' < 0$ при $\|x\| > 0$. Теорема полностью доказана.

Поступила 30 VII 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Персидский К. П. Об устойчивости решений бесконечной системы дифференциальных уравнений. ПММ, 1948, т. XII, вып. 5.
2. Персидский К.П. Об одной теореме Ляпунова. ДАН СССР,1937, т. XIV, № 9.
3. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Гостехиздат, 1955.
4. Персидский С. К. Некоторые теоремы второй методы Ляпунова. Вестн. АН КазССР, 1960, 2 (179).