ПЛОСКАЯ ПЛАСТИЧЕСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ АНИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ

В. Л. Добровольский

(Москва)

Дается общее выражение функции напряжений для пластической области ортотропного тела. Вводятся «осложненные комплексные переменные», подобные тем, которые применял С. Г. Лехницкий для упругого материала [1,2]. Выводится условие вещественности этой функции, на основе которого можно решать обратные задачи. В качестве примера исследуются некоторые напряженные состояния. Сравниваются значения комплексных параметров для упругого и пластического случаев. Делается попытка проследить связь пластической функции напряжений с упругой.

1°. Рассмотрим однородное ортотропное идеально пластическое тело. Оси координат x, y, z направим по главным осям анизотропии. Компоненты напряжения σ_x, σ_y, τ_{xy} должны удовлетворять уравнениям равновесия

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=0, \qquad \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}=0 \tag{1.1}$$

и условию пластичности Хилла — Мизеса [3] для анизотропного тела

$$\frac{(\sigma_x-\sigma_y)^2}{1-c}+4\tau_{xy}^2=4T^2 \qquad (-\infty<c<1) \tag{1.2}$$

Здесь c зависит от анизотропных пластических характеристик материала, T — предел текучести при сдвиге относительно осей x и y.

При $c=0$ получается известное условие пластичности Мизеса для изотропного тела.

Введем функцию напряжений посредством формул

$$\sigma_x=2T\sqrt{1-c}\,\frac{\partial^2F}{\partial y^2}, \qquad \sigma_y=2T\sqrt{1-c}\,\frac{\partial^2F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy}=-2T\sqrt{1-c}\,\frac{\partial^2F}{\partial x\partial y} \tag{1.3}$$

Уравнения равновесия (1.1) тождественно удовлетворяются, и для отыскания функции F остается уравнение

$$D_2D_1F\bar{D}_2\bar{D}_1F=1 \tag{1.4}$$

Здесь

$$D_k=\frac{\partial}{\partial y}-\mu_k\frac{\partial}{\partial x}=(\bar{\mu}_k-\mu_k)\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}, \qquad \mu_k=\pm\sqrt{c}+i\sqrt{1-c}, \qquad (k=1,2) \tag{1.5}$$

а «осложненные комплексные переменные» определяются формулами

$$z_k=x+\mu_k y, \qquad \bar{z}_k=x+\bar{\mu}_k y \qquad (k=1,\ 2)$$

Используя вещественность функции F, уравнение (1.4) можно переписать таким образом: $D_2D_1F\bar{D}_2\bar{D}_1\bar{F}=1$, или $|D_2D_1F|=1$, откуда

$$D_2D_1F=\exp\left[-i\theta\right] \tag{1.6}$$

$\theta=\theta(z_1,z_2;\ \bar{z}_1,\bar{z}_2)$ произвольная вещественная функция.

Общее решение уравнения (1.6) дается формулой

$$F=\frac{1}{(\bar{\mu}_1-\mu_1)(\bar{\mu}_2-\mu_2)}\int d\bar{z}_1\int \exp[-i\theta(z_1,z_2;\ \bar{z}_1,\bar{z}_2)]\,d\bar{z}_2+$$

$$+F_1(z_1)+F_2(z_2)+p(x^2+y^2) \tag{1.7}$$

Здесь и ниже, в формулах (5.3), интегрирование ведется соответственно от фиксированного значения $\bar{z}_1{}^\circ$, $\bar{z}_2{}^\circ$ до произвольного значения $\bar{z}_1$, $\bar{z}_2$.

$F_1(z_1)$, $F_2(z_2)$ — произвольные аналитические функции своих аргументов $p=\mathrm{const}$.

Между функцией θ и углом наклона α линии скольжения к оси x в каждой точке пластической области существует зависимость

$$\operatorname{tg}\theta=-\sqrt{1-c}\,\operatorname{tg}2\left(\alpha\pm\frac{1}{4}\pi\right)$$

В случае изотропного тела $c = 0$.

2°. Однако физическому смыслу соответствуют лишь вещественные функции напряжений.

Теорема 1. Для того чтобы функция $F(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2)$ была вещественной, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\frac{\partial^2 e^{-i\theta}}{\partial z_1 \partial z_2} = \frac{\partial^2 e^{i\theta}}{\partial \bar{z}_1 \partial \bar{z}_2} \tag{2.1}$$

Доказательство. Применяя к тождеству $F \equiv \bar{F}$ операцию

$$\frac{\partial^4}{\partial z_1 \partial z_2 \partial \bar{z}_1 \partial \bar{z}_2}$$

и учитывая формулу (1.7), получаем необходимость условия (2.1).

Для доказательства достаточности заметим, что из равенства (2.1) следует

$$\frac{\partial^4 F}{\partial z_1 \partial z_2 \partial \bar{z}_1 \partial \bar{z}_2} = \frac{\partial^4 \bar{F}}{\partial z_1 \partial z_2 \partial \bar{z}_1 \partial \bar{z}_2}$$

Откуда

$$F - \bar{F} = \Phi_1(z_1) + \Phi_2(z_2) + \bar{\psi}_1(\bar{z}_1) + \bar{\psi}_2(\bar{z}_2)$$

Здесь $\Phi_k(z_k)$ и $\psi_k(z_k)$ $(k = 1, 2)$ — аналитические функции своих аргументов. Так как формулой (1.7) функция F определяется с точностью до произвольных аналитических функций, то их всегда можно подобрать таким образом, чтобы $F \equiv \bar{F}$.

В декартовых координатах условие (2.1) записывается следующим образом

$$\begin{gathered}\cos\theta\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} - 2\sqrt{1-c}\,\frac{\partial\theta}{\partial x}\,\frac{\partial\theta}{\partial y}\right) + \\ + \sin\theta\left(-2\sqrt{1-c}\,\frac{\partial^2\theta}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2\right) = 0\end{gathered} \tag{2.2}$$

а в полярных координатах (r, φ) оно выглядит так

$$\begin{gathered}(\cos\theta\cos 2\varphi - \sqrt{1-c}\sin\theta\sin 2\varphi)\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2\theta}{\partial\varphi^2} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial\theta}{\partial r}\right) + \\ + (\cos\theta\sin 2\varphi + \sqrt{1-c}\sin\theta\cos 2\varphi)\left(\frac{2}{r^2}\,\frac{\partial\theta}{\partial\varphi} - \frac{2}{r}\,\frac{\partial^2\theta}{\partial r\partial\varphi}\right) + \\ + (\sin\theta\sin 2\varphi - \sqrt{1-c}\cos\theta\cos 2\varphi)\,\frac{2}{r}\,\frac{\partial\theta}{\partial r}\,\frac{\partial\theta}{\partial\varphi} + \\ + (\sin\theta\cos 2\varphi + \sqrt{1-c}\cos\theta\sin 2\varphi)\left[\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}\right)^2 - \left(\frac{\partial\theta}{\partial r}\right)^2\right] = 0\end{gathered} \tag{2.3}$$

Если в уравнениях (2.2), (2.3) положить $c = 0$, то получаются соответствующие условия для изотропии [4]. Можно дать и другие варианты условия вещественности функции напряжений F, подобные тем, которые приведены в работе [4].

Теорема 2. Частное решение $\theta = \theta(x, y)$ уравнения (2.2), не содержащее произвольных параметров, определяет компоненты напражения с точностью до постоянного гидростатического давления.

Доказательство. Если выбрана функция $\theta = \theta(x, y)$, удовлетворяющая условию теоремы, то вещественная функция напряжений F определяется формулой (1.7) с точностью до слагаемого $p(x^2 + y^2)$, которое соответствует постоянному гидростатическому давлению p. Действительно, нетрудно видеть, что $D_2 D_1 [p(x^2 + y^2)] \equiv 0$. Теорема доказана.

Замечание 1. Если функция $\theta = \theta(x, y)$ есть решение уравнения (2.2), то функции $\psi_1 = -\theta(-x, y)$, $\psi_2 = -\theta(x, -y)$ также являются решениями этого уравнения.

Следствие. Если функция $\theta = \theta(x, y)$ удовлетворяет уравнению (2.2), то функция $\psi = \theta(-x, -y)$ также ему удовлетворяет.

3°. Комплексные параметры μ_k $(k = 1, 2)$ характеризуют анизотропию материала.

Интересно сопоставить параметры μ_k, входящие в упругое решение [1, 2] с параметрами μ_k, введенными в настоящей работе. В монографии [1] приводится доказательство того, что параметры μ_k не могут принимать вещественных значений.

Для пластической анизотропии μ_k также не могут быть вещественными. Действительно, в силу формул (1.5), для того чтобы μ_k были вещественными, нужно, чтобы выполнялось неравенство $c \geqslant 1$. Но параметр c, как показано в монографии [3], меняется на открытом интервале $(-\infty, 1)$. Следовательно, случай $c \geqslant 1$ не имеет физического смысла.

Пусть $\mu_k = \alpha_k + i\beta_k$; α_k, β_k — вещественны, тогда при $-\infty < c \leqslant 0$ $\alpha_k = 0$, $\beta_k = \sqrt{1-c} \pm \sqrt{-c}$, т. е. параметры μ_k будут чисто мнимыми, а при $0 < c < 1$ $\alpha_k = \pm\sqrt{c}$, $\beta_k = \sqrt{1-c}$. Отсюда, в частности, следует, что $\beta_k > 0$ всегда.

Кроме того, $\mu_1 = \mu_2$ для пластического случая, только когда материал изотропен. В упругом случае равенство параметров допустимо и для неизотропного тела. В монографии [1] указаны некоторые вещественные комбинации комплексных параметров μ_1 и μ_2 для ортотропного случая, приведем их одновременно с выражением таких же комбинаций для пластической области:

	Упругая область	*Пластическая область*
$\mu_1\mu_2$	$-\sqrt{\dfrac{\beta_{22}}{\beta_{11}}}$	-1
$-i(\mu_1+\mu_2)$	$\sqrt{\dfrac{2\beta_{12}+\beta_{66}}{\beta_{11}} + 2\sqrt{\dfrac{\beta_{22}}{\beta_{11}}}}$	$2\sqrt{1-c} = \dfrac{2XZ}{T\sqrt{4Z^2-X^2}}$
$\mu_1^2+\mu_2^2$	$-\dfrac{2\beta_{12}+\beta_{66}}{\beta_{11}}$	$2(2c-1) = 2\left(1-\dfrac{2X^2Z^2}{T^2(4Z^2-X^2)}\right)$

Поскольку в монографии [1] комбинации комплексных параметров выписаны для случая обобщенного плоско-напряженного состояния, то в них пришлось заменить коэффициенты деформации a_{ij} на постоянные β_{ij}, так как характеристическое уравнение для случая обобщенного плоско-напряженного состояния совпадает с характеристическим уравнением для плоской деформации, если заменить в первом a_{ij} на β_{ij}. Постоянные β_{ij} определяются по формулам

$$\beta_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i3}a_{j3}}{a_{33}} \qquad (i, j = 1, 2, 6)$$

$X = Y$, Z — пределы текучести при растяжении в главных направлениях анизотропии; T — предел текучести на сдвиг по отношению к осям x и y.

Соотношение $X = Y$ непосредственно следует из условия Мизеса—Хилла и из предположения о существовании пластического потенциала для анизотропного материала [3].

Замечание 2. Ценою некоторого усложнения формулы, аналогичные формулам (1.7) и (2.1), могут быть получены и для более общего случая анизотропии (неортотропного).

4°. Воспользовавшись уравнениями (2.2), (2.3), получим несколько частных решений уравнений равновесия для анизотропного материала в пластической области. При этом совершенно не обязательно каждый раз отыскивать функцию напряжений. Зная θ, компоненты напряжения можно легко определить из уравнений равновесия (1.1).

1) $\theta = \alpha$ ($\alpha = \text{const}$). Наиболее простое решение, отвечающее однородному полю напряжений

$$\sigma_x = \cos\alpha + p, \qquad \sigma_y = p, \qquad \tau_{xy} = \frac{1}{2\sqrt{1-c}}\sin\alpha \tag{4.1}$$

Здесь и в дальнейшем напряжения отнесены к величине $2T\sqrt{1-c}$.

2) Ищется решение вида $\theta = \theta(y)$. Из уравнения (2.2) имеем

$$\frac{d^2\theta}{dy^2} - \operatorname{tg}\theta\left(\frac{d\theta}{dy}\right)^2 = 0 \quad \text{или} \quad \theta = \arcsin(Ay + B)$$

Напряженное состояние, соответствующее ему, реализуется в полосе

$$-\frac{1+B}{A} \leqslant y \leqslant \frac{1-B}{A}, \qquad A > 0$$

сжатой шероховатыми плитами.

Выпишем компоненты напряжений

$$\sigma_x = -\frac{A}{\sqrt{1-c}}\,x + \sqrt{1-(Ay+B)^2} + p \qquad (4.2)$$

$$\sigma_y = -\frac{A}{\sqrt{1-c}}\,x + p, \qquad \tau_{xy} = \frac{1}{2\sqrt{1-c}}\,(Ay+B)$$

При $c=0$ получается аналогичное решение для изотропии [4].

3) Ищется частное решение вида $\theta=\theta(\varphi)$. Уравнение (2.4) перейдет в следующее

$$(\cos\theta\cos 2\varphi - \sqrt{1-c}\sin\theta\sin 2\varphi)\,(-d^2\theta\,/\,d\varphi^2) +$$
$$+ (\cos\theta\sin 2\varphi + \sqrt{1-c}\sin\theta\cos 2\varphi)\,2d\theta\,/\,d\varphi +$$
$$+ (\sin\theta\cos 2\varphi + \sqrt{1-c}\cos\theta\sin 2\varphi)\,(d\theta\,/\,d\varphi)^2 = 0$$

Одним из его решений является функция

$$\theta = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{1-c}\,\operatorname{tg}2\varphi}$$

Напряженное состояние, в котором реализуется это решение, возникает в чисто пластическом ортотропном клине, по щекам которого действуют нагрузки постоянной интенсивности.

При $c \geqslant 0$ компоненты напряжения записываются следующим образом

$$\sigma_r = \frac{-c\sin 2\varphi\cos 2\varphi}{\sqrt{(1-c)(1-c\sin^2 2\varphi)}} + \frac{1}{2\sqrt{1-c}}\,E(\sqrt{c};\,\varphi) + p \qquad (4.3)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{1}{2\sqrt{1-c}}\,E(\sqrt{c};\,\varphi) + p, \qquad \tau_{r\varphi} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-c\sin^2 2\varphi}{1-c}}$$

Если же $c \leqslant 0$, то компоненты напряжения имеют вид

$$\sigma_r = \frac{-c\sin 2\varphi\cos 2\varphi}{\sqrt{(1-c)(1-c\sin^2 2\varphi)}} - \frac{1}{2}\,E\left(\sqrt{\frac{c}{c-1}};\,\varphi\right) + p \qquad (4.4)$$

$$\sigma_\varphi = -\frac{1}{2}\,E\left(\sqrt{\frac{c}{c-1}};\,\varphi\right) + p, \qquad \tau_{r\varphi} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-c\sin^2 2\varphi}{1-c}}$$

Здесь $E(k,\,\vartheta)$ — нормальная форма Лежандра эллиптического интеграла второго рода. В случае изотропного клина ($c=0$) формулы (4.3), (4.4) принимают значение [5]

$$\sigma_r = \sigma_\varphi = -\varphi + p, \qquad \tau_{r\varphi} = \frac{1}{2}$$

5°. Для решения упруго-пластических задач необходимо знать зависимость между упругими и пластическими константами. Если, например, комплексные параметры на границе упругой и пластической зон не делают скачка (что является довольно естественным предположением, поскольку в случае изотропии μ_1 и μ_2 вообще одинаковы в обеих зонах), то можно предложить следующую схему для удовлетворения условия непрерывности напряжений при переходе из упругой зоны в пластическую [6]. Пусть упругое решение имеет вид [2]

$$F^\circ = 2\,\mathrm{Re}\,[F_1^\circ(z_1) + F_2^\circ(z_2)] \qquad (5.1)$$

тогда пластическое решение можно представить в виде

$$F = F_0(z_1, z_2;\ \bar z_1, \bar z_2) + \varkappa(z_1, z_2;\ \bar z_1, \bar z_2) \qquad (5.2)$$

причем

$$F_0 = 2\mathrm{Re}\,[F_1(z_1) + F_2(z_2)]$$

$$\varkappa = \frac{1}{(\bar\mu_1-\mu_1)(\bar\mu_2-\mu_2)}\int d\bar z_1 \int \exp\,[-i\theta\,(z_1, z_2;\ \bar z_1, \bar z_2)]\,d\bar z_2 -$$
$$- \overline{F_1(z_1)} - \overline{F_2(z_2)} + p\,(x^2+y^2) \qquad (5.3)$$

Здесь $\varkappa = \varkappa(z_1, z_2, \bar z_1, \bar z_2)$ — вещественная функция [см. формулу (1.7)].

Введем обозначения [2]

$$\frac{dF_k{}^\circ(z_k)}{dz_k} = \Phi_k{}^\circ(z_k), \qquad \frac{dF_k(z_k)}{dz_k} = \Phi_k \quad) \quad (k = 1, 2) \tag{5.4}$$

Потребуем на границе раздела зон γ выполнения следующих равенств [2]

$$2\mathrm{Re}\,[\Phi_1{}^\circ(z_1) + \Phi_2{}^\circ(z_2)]_\gamma = 2\mathrm{Re}\,[\Phi_1(z_1) + \Phi_2(z_2)]_\gamma,$$

$$2\mathrm{Re}\,[\mu_1\Phi_1{}^\circ(z_1) + \mu_2\Phi_2{}^\circ(z_2)]_\gamma = 2\mathrm{Re}\,[\mu_1\Phi_1(z_1) + \mu_2\Phi_2(z_2)]_\gamma, \qquad \left.\frac{\partial\varkappa}{\partial z_1}\right|_\gamma = \left.\frac{\partial\varkappa}{\partial z_2}\right|_\gamma = 0$$

Таким образом, условия равновесия на границе γ будут соблюдены и упругая функция напряжений F° непрерывно переходит в пластическую функцию напряжений F.

Пользуюсь случаем сделать замечание о работе [4]. Вопросы бигармоничности пластической функции напряжений рассматривались в работах [7,8].

Поступила 11 VII 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. Гостехиздат, М.— Л., 1950.
2. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. Изд. 2-е, М., Гостехиздат, 1957.
3. Хилл Р. Математическая теория пластичности. Гостехиздат, М., 1956.
4. Добровольский В. Л. О плоской пластической деформации. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 5
5. Соколовский В. В. Теория пластичности. Изд-во АН СССР. 1946.
6. Добровольский В. Л. Задача о плоской деформации идеально пластического тела в комплексных переменных. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 2
7. Савін Г. М., Парасюк О. С. Бігармонічні розв'язання рівняння. . . ДАН УРСР, 1947, № 3.
8. Савін Г. М., Парасюк О. С. Характеристики бігармонічного стану. ДАН УРСР, 1947, № 4.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВИБРАЦИОННО-ЛИНЕАРИЗИРОВАННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

И. И. Блехман, Г. Ю. Джанелидзе

(Ленинград)

Многие задачи механики и автоматического регулирования приводят к необходимости рассмотрения движений систем, содержащих нелинейные элементы с разрывными характеристиками и находящихся под действием периодически изменяющихся возмущений, частоты которых существенно выше возможных частот основного установившегося или квази-стационарного движения системы.

В таких случаях уравнения движения, как правило, допускают решение, состоящее из двух слагаемых: первое отвечает основному (медленному) движению, второе содержит высокочастотные составляющие, амплитуды которых относительно малы по сравнению со слагаемым, соответствующим основному движению.

Для получения дифференциальных уравнений, описывающих изменение медленной составляющей, обычно используются приемы, получившие название метода вибрационной линеаризации или вибрационного сглаживания [1-3]. При помощи указанных методов в последнее время были получены результаты [2-6], существенные для приложений.

В статье [6] Е. П. Попов предложил рассматривать с помощью вибрационно-линеаризированных уравнений не только вопрос о нахождении основного медленного движения системы, но и изучать устойчивость этого движения.

В настоящей работе авторы, не ставя перед собой задачи строгого обоснования обсуждаемого метода, указывают на наличие некоторого необходимого условия спра-