ОБ ОДНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ, ВСТРЕЧАЮЩЕМСЯ В ЗАДАЧЕ О ДАВЛЕНИИ ЖЕСТКОГО ФУНДАМЕНТА НА НЕОДНОРОДНЫЙ ГРУНТ

Н. А. Ростовцев

(Комсомольск-на-Амуре)

В статье Г. К. Клейна [1] показано, что если модуль деформации грунта меняется с глубиной z по закону $E = E_m z^m$ (E_m — постоянная), то при условии, что показатель m и коэффициент бокового расширения ν связаны соотношением $\nu(2+m)=1$, имеется элементарное решение, удовлетворяющее условиям совместности Сен-Венана и выражающее действие сосредоточенной силы, приложенной нормально к поверхности грунта. Отсюда получается степенное ядро для интеграла, представляющего осадку w через давление $p = f(x, y)$

$$w = \vartheta F(x, y) = \vartheta \iint\limits_D \frac{f(x', y')\,dx'dy'}{[(x-x')^2+(y-y')^2]^{1/2(1+m)}} \tag{0.1}$$

Здесь D — область контакта

$$\vartheta = \alpha / \pi E_m, \qquad \alpha = \frac{1}{2}(3+m)/(1+m)(2+m)$$

Для неотрицательных m интеграл (0.1) сходится, если, и только если, $0 \leqslant m < 1$. В том случае, когда между константами m, ν отсутствует указанное соотношение, формула (0.1) перестает быть точной, но принимается в качестве формулы условного расчета. В этом расчете постоянная α находится по значениям независимых переменных m, ν при помощи системы графиков [1]. Несмотря на условный характер получающихся результатов, уравнение (0.1) с неизвестной функцией $p = f(x, y)$ представляет самостоятельный интерес и в той или иной эквивалентной форме уже исследовалось [2,3]. В частности, в работе [3] дано решение в замкнутой форме для круговой области. Ниже дается решение для эллиптической области в случае, когда $F(x, y)$ — многочлен, и новый вывод решения для круговой области, основанный на приведении (0.1) к уравнениям Абелева типа. В качестве примера исследуется штамп в форме параболоида вращения.

1. Решение в случае эллиптической области основывается на следующей теореме.

Теорема. Пусть давление под штампом, эллиптическим в плане, выражается произведением полинома $\Pi(x, y)$ на функцию

$$\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{1/2(m-1)}$$

т. е.

$$p = f(x, y) = \Pi(x, y)\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{1/2(m-1)} \tag{1.1}$$

Тогда осадка w выражается полиномом той же степени, что и $\Pi(x, y)$.

Эта теорема обобщает аналогичную теорему И. Я. Штаермана [4], относящуюся к классическому случаю $m=0$. Она дает возможность эффективного применения метода неопределенных коэффициентов.

Доказательство. Введем полярные координаты с полюсом в точке (x, y) внутри эллипса, т. е. положим

$$x' = x + \rho\cos\varphi, \qquad y' = y + \rho\sin\varphi \tag{1.2}$$

Тогда имеем

$$F(x, y) = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\rho_1(\varphi)} \Pi(x'y')\left(1-\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}\right)^{1/2(m-1)} \rho^{-m}\,d\rho \tag{1.3}$$

где под интегралом $x'y'$ должны быть замещены их выражениями (1.2), а функция $\rho_1(\varphi)$ в верхнем пределе есть положительный корень уравнения

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-1 = \frac{(x+\rho\cos\varphi)^2}{a^2}+\frac{(y+\rho\sin\varphi)^2}{b^2}-1 = 0 \tag{1.4}$$

которое для удобства запишем в форме

$$C\rho^2 + 2B\rho - A = 0 \tag{1.5}$$

где

$$A = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \geqslant 0, \qquad B = B(\varphi) = \frac{x\cos\varphi}{a^2} + \frac{y\sin\varphi}{b^2},$$

$$C = C(\varphi) = \frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2} \tag{1.6}$$

Корни этого уравнения суть

$$\rho_1 = \rho_1(\varphi) = \frac{1}{C}\left(-B + \sqrt{B^2 + AC}\right) = \alpha \qquad (\alpha > 0)$$

$$\rho_2 = \rho_2(\varphi) = \frac{1}{C}\left(-B - \sqrt{B^2 + AC}\right) = -\beta \qquad (\beta > 0) \tag{1.7}$$

и, кроме того,

$$1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = C(\rho_1 - \rho)(\rho - \rho_2)$$

Заметим еще, что прибавление π к аргументу φ сохраняет неизменным значение функции $C(\varphi)$, а функция $B(\varphi)$ меняет знак. Следовательно,

$$\rho_1(\varphi + \pi) = -\rho_2 = \beta, \qquad \rho_2(\varphi + \pi) = -\rho_1 = -\alpha$$

Разбивая теперь промежуток интегрирования по φ на два участка, от 0 до π и от π до 2π, и заменяя на втором участке φ на $\pi + \psi$, с учетом сделанных выше замечаний, получим

$$F(x, y) = \int_0^\pi C^{1/2(m-1)} d\varphi \left\{ \int_0^\alpha \frac{\Pi(x + \rho\cos\varphi, y + \rho\sin\varphi)}{[(\alpha - \rho)(\beta + \rho)]^{1/2(1-m)}} \rho^{-m} d\rho + \right.$$

$$\left. + \int_0^\beta \frac{\Pi(x - \rho\cos\varphi, y - \rho\sin\varphi)}{[(\alpha + \rho)(\beta - \rho)]^{1/2(1-m)}} \rho^{-m} d\rho \right\} \tag{1.8}$$

В классическом случае, $m = 0$, объединение интегралов, стоящих в фигурных скобках, в интеграл от аналитической функции не составляет труда (см. [4]). В случае же $m \neq 0$ мы поступаем так. Рассмотрим интеграл

$$J(\alpha, \beta) = \oint \Pi(x + \zeta\cos\varphi, y + \zeta\sin\varphi)\,[(\zeta - \alpha)(\zeta + \beta)]^{1/2(m-1)} \frac{d\zeta}{\zeta^m} \tag{1.9}$$

взятый в положительном направлении по контуру, содержащему внутри точки $\alpha, -\beta, 0$, в плоскости ζ, разрезанной вдоль вещественной оси от α до $-\beta$.

Стягивая этот контур к разрезу до совпадения с краями разреза, которые надлежит дополнить окружностями произвольно малого радиуса с центрами в точках α, $-\beta$, 0, и вычисляя известным приемом получающиеся интегралы, найдем, что $J(\alpha, \beta)$ отличается от суммы в фигурных скобках (1.8) множителем $2i\cos{}^1/_2 m\pi$. Следовательно,

$$F(x, y) = \frac{1}{2i\cos{}^1/_2 m\pi} \int_0^\pi C^{1/2(m-1)} J(\alpha, \beta)\, d\varphi \tag{1.10}$$

Разлагая теперь $\Pi(x + \zeta\cos\varphi, y + \zeta\sin\varphi)$ по степеням ζ, получим

$$J(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}\left(\cos\varphi \frac{\partial}{\partial x} + \sin\varphi \frac{\partial}{\partial y}\right)^n \Pi(x, y) \oint \zeta^{n-m} [(\zeta - \alpha)(\zeta + \beta)]^{1/2(m-1)} d\zeta \tag{1.11}$$

Здесь N — степень многочлена $\Pi(x, y)$ по совокупности неизвестных x, y. Обозначим

$$\Phi_n(\alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi i} \oint \zeta^{n-m} [(\zeta - \alpha)(\zeta + \beta)]^{1/2(m-1)} d\zeta \tag{1.12}$$

Следовательно,

$$F(x, y) = \frac{\pi}{\cos\frac{1}{2}m\pi} \int_0^\pi \sum_{n=0}^{N} \frac{\Phi_n(\alpha, \beta)}{n!} \left(\cos\varphi \frac{\partial}{\partial x} + \sin\varphi \frac{\partial}{\partial y}\right)^n \Pi(x, y) \frac{d\varphi}{C^{1/2(1-m)}} \tag{1.13}$$

Интеграл (1.12) представляется конечным выражением. Действительно, $|\zeta| > \max(\alpha, \beta)$, и для вычисления этого интеграла разложим подынтегральную функцию в ряд по степеням ζ^{-1}. Но

$$\zeta^{n-m}[(\zeta-\alpha)(\zeta+\beta)]^{1/2(m-1)} = \zeta^{n-1}[(1-\alpha\zeta^{-1})(1+\beta\zeta^{-1})]^{1/2(m-1)} =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!s!}\left(\frac{m-1}{2}\right)_r\left(\frac{m-1}{2}\right)_s \alpha^r\beta^s\zeta^{n-(r+s)-1} \tag{1.14}$$

Все члены, в которых $r+s\neq n$, при интегрировании выпадают. Поэтому

$$\Phi_n(\alpha, \beta) = \sum_{r=0}^{n}\frac{(-1)^r}{r!(n-r)!}\left(\frac{m-1}{2}\right)_r\left(\frac{m-1}{2}\right)_{n-r}\alpha^r\beta^{n-r} \tag{1.15}$$

Соединяя в этой сумме члены, равноотстоящие от начала и конца, и принимая во внимание выражения (1.7) для α и β, находим, что в обоих случаях, четного и нечетного n, члены, содержащие квадратные корни, выпадают. Поэтому $\Phi_n(\alpha, \beta)$ является многочленом относительно x, y. Кроме того, в процессе выкладок убеждаемся, что степень этого многочлена по совокупности x, y равна n. Поэтому интеграл (1.9) является многочленом степени N, что и требовалось доказать. Здесь можно было бы дать окончательные формулы, явно представляющие $\Phi_n(\alpha, \beta)$ через x, y, но они очень громоздки. Для малых значений n формулы таковы

$$\Phi_0(\alpha, \beta) = 1, \qquad \Phi_1(\alpha, \beta) = (m-1)\frac{B(\varphi)}{C(\varphi)} \tag{1.16}$$

$$\Phi_2(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}(m-1)(m-3)\left(\frac{B(\varphi)}{C(\varphi)}\right)^2 - \frac{1}{2}(m-1)\left(\frac{A}{C(\varphi)}\right) \tag{1.17}$$

2. Рассмотрим плоский штамп, внедряющийся наклонно; здесь $w = w_0 + \omega x$. В соответствии с изложенным выше берем $p = f(x, y)$ в форме

$$p = (p_0 + \mu x)\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{1/2(m-1)} \tag{2.1}$$

Вычисления по формулам предыдущего пункта дают

$$w = \frac{\pi\vartheta}{\cos\frac{1}{2}m\pi}\left\{p_0\int_0^{\pi}\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right)^{1/2(m-1)}d\varphi + \right. \tag{2.2}$$

$$\left. + \mu x\left[\int_0^{\pi}\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2} - \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right)^{1/2(m-1)}d\varphi + \frac{m-1}{a^2}\int_0^{\pi}\cos^2\varphi\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right)^{1/2(m-3)}d\varphi\right]\right\}$$

Отсюда легко находятся p_0 и μ через w_0 и ω. При $a\neq b$ фактическое выполнение вычислений требует таблиц функций, аналогичных полным эллиптическим интегралам в том смысле, что квадратный радикал заменяется степенью $^1/_2(1-m)$.

3. Приведем решение для круговой области. Перейдя к полярным координатам с полюсом в точке (0, 0), разложим $F(x, y)$ и $f(x, y)$ в ряды Фурье по угловой координате φ. Легко установить зависимость между коэффициентами Фурье $F_n(r)$ и $f_n(r)$ обоих разложений

$$F_n(r) = \int_0^a sf_n(s)\,ds\int_0^{2\pi}\frac{\cos n\omega\,d\omega}{(r^2+s^2-2rs\cos\omega)^{1/2(m+1)}} \tag{3.1}$$

Здесь можно записать $F_n(r)$ и $f_n(r)$ безразлично для $\cos n\varphi$ и $\sin\varphi$, поскольку в данном контексте это не вызовет недоразумений.

Ядро этого уравнения

$$\chi_n(r, s) = \int_0^{2\pi}\frac{\cos n\omega d\omega}{(r^2+s^2-2rs\cos\omega)^{1/2(m+1)}} \tag{3.2}$$

легко выразить через интеграл, дающий каноническое представление некоторой гипергеометрической функции $F(a, b, c; z)$. Действительно, пусть $r > s$. Обозначим $h = s/r$ и положим $\zeta = e^{i\omega}$. Тогда

$$\chi_n(r, s) = \frac{-i}{r^{m+1}} \oint \frac{\zeta^{1/2(m+1)+n-1} d\zeta}{(1-h\zeta)^{1/2(m+1)} (\zeta - h)^{1/2(m+1)}} \tag{3.3}$$

где интеграл берется по окружности $|\zeta| = 1$. Переходя известным приемом от этого интеграла к интегралу, взятому вдоль участка вещественной оси $0 \leqslant x \leqslant h$, который служит разрезом, получаем

$$\chi_n(r, s) = \frac{2\cos {}^1/_2 m\pi}{r^{m+1}} \int_0^h \frac{x^{1/2(m+1)+n-1} dx}{(1-hx)^{1/2(m+1)} (h-x)^{1/2(m+1)}} \tag{3.4}$$

Здесь удобно сделать подстановку $x = (h/s^2)\, t^2$. Это дает

$$\chi_n(r, s) = \frac{4\cos {}^1/_2 m\pi}{r^n s^n} \int_0^s \frac{t^{m+2n} dt}{[(r^2-t^2)(s^2-t^2)]^{1/2(m+1)}} \quad \text{для } s \leqslant r \tag{3.5}$$

По симметрии также будет

$$\chi_n(r, s) = \frac{4\cos {}^1/_2 m\pi}{r^n s^n} \int_0^r \frac{t^{m+2n} dt}{[(r^2-t^2)(s^2-t^2)]^{1/2(m+1)}} \quad \text{для } r \leqslant s \tag{3.5a}$$

Вносся эти выражения в уравнение (1.2), получаем

$$F_n(r) = \frac{4\cos {}^1/_2 m\pi}{r^n} \left\{ \int_0^r s^{1-n} f_n(s)\, ds \int_0^s \frac{t^{m+2n} dt}{[(r^2-t^2)(s^2-t^2)]^{1/2(m+1)}} + \right.$$
$$\left. + \int_r^a s^{1-n} f_n(s)\, ds \int_0^r \frac{t^{m+2n} dt}{[(r^2-t^2)(s^2-t^2)]^{1/2(m+1)}} \right\} \tag{3.6}$$

Вследствие того, что особенности подынтегральных функций (во внутренних интегралах) слабые, допустимо изменение порядка интегрирования (в первом слагаемом — по формуле Дирихле). Выполнив это и складывая результаты, получим

$$F_n(r) = \frac{4\cos {}^1/_2 m\pi}{r^n} \int_0^r \frac{t^{m+2n} dt}{(r^2-t^2)^{1/2(m+1)}} \int_t^a \frac{s^{1-n} f_n(s)\, ds}{(s^2-t^2)^{1/2(m+1)}} \tag{3.7}$$

Теперь видно, что нахождение $f_n(s)$ сводится к двукратному решению уравнений Абелева типа. Как окончательный результат имеем

$$f_n(r) = \frac{-\cos {}^1/_2 m\pi}{\pi^2} r^{n-1} \frac{d}{dr} \int_r^a \frac{u^{1-m-2n} du}{(u^2-r^2)^{1/2(1-m)}} \frac{d}{du} \int_0^u \frac{s^{n-1} F_n(s)\, ds}{(u^2-s^2)^{1/2(1-m)}} \tag{3.8}$$

Эта формула совпадает с решением, данным в работе [3]. Ее можно упростить, интегрируя по частями вводя операцию дифференцирования под знак интеграла (полагая, что производная $F_n'(r)$ непрерывна на отрезке $0 \leqslant r \leqslant a$). Тогда

$$f_n(r) = \frac{\cos {}^1/_2 m\pi}{\pi^2} r^n \left\{ \frac{\psi_n(a)}{(a^2-r^2)^{1/2(1-m)}} - \int_r^a \frac{\psi_n'(u)\, du}{(u^2-r^2)^{1/2(1-m)}} \right\} \tag{3.9}$$

где

$$\psi_n(u) = u^{1-m-2n} \int_0^u \frac{[s^n F_n(s)]'\, ds}{(u^2-s^2)^{1/2(1-m)}} \quad (n \geqslant 1) \tag{3.10}$$

$$\psi_0(u) = F_0(0) + u^{1-m} \int_0^u \frac{F_0'(s)\, ds}{(u^2-s^2)^{1/2(1-m)}} \quad (n = 0) \tag{3.11}$$

Заметим еще, что для осадки вне штампа формула (3.7) дает

$$F_n(r) = \frac{4\cos{}^1/_2 m\pi}{r^n} \int\limits_0^a \frac{t^{m+2n}\,dt}{(r^2 - t^2)^{1/2(m+1)}} \int\limits_t^a \frac{s^{1-n} f_n(s)\,ds}{(s^2 - t^2)^{1/2(m+1)}} \tag{3.12}$$

Задавая w в виде полинома, нетрудно убедиться снова, что решение (3.9) вычисляется элементарно.

4. Рассмотрим штамп в форме параболоида вращения

$$w = w_0 - Ar^k \qquad (k \geqslant 1) \tag{4.1}$$

Здесь показатель k — не обязательно целое число. В случае $k = 1$ имеем конический штамп. По формуле (3.11) получаем

$$\psi_0(u) = \vartheta^{-1}\left(w_0 - \frac{\Gamma({}^1/_2 + {}^1/_2 m)\,\Gamma(1 + {}^1/_2 k)}{\Gamma({}^1/_2 m + {}^1/_2 k + {}^1/_2)} Au^k\right) \tag{4.2}$$

Следовательно, возможно регулярное решение при условии

$$w_0 = \frac{\Gamma({}^1/_2 + {}^1/_2 m)\,\Gamma(1 + {}^1/_2 k)}{\Gamma({}^1/_2 m + {}^1/_2 k + {}^1/_2)} Aa^k \tag{4.3}$$

Это решение имеет вид

$$p = K \int\limits_\rho^1 \frac{t^{k-1}\,dt}{(t^2 - \rho^2)^{1/2(1-m)}}, \qquad \rho = \frac{r}{a} \tag{4.4}$$

где постоянный множитель

$$K = \frac{\cos{}^1/_2 m\pi}{\pi^2\vartheta} \; \frac{\Gamma({}^1/_2 + {}^1/_2 m)\,\Gamma(1 + {}^1/_2 k)}{\Gamma({}^1/_2 m + {}^1/_2 k + {}^1/_2)} Aa^{m+k-1} \tag{4.5}$$

Вводя нагрузку P, получаем

$$P = \frac{2\pi K a^2}{(1 + m)(k + 1 + m)} \tag{4.6}$$

$$p(r) = (1 + m)(k + 1 + m)\frac{P}{2\pi a^2} \int\limits_\rho^1 \frac{t^{k-1}\,dt}{(t^2 - \rho^2)^{1/2(1-m)}} \tag{4.7}$$

В случае, когда k — четное число, этот результат выражается элементарно. Так, в случае $k = 2$ (аналог случая Герца) получается

$$p(r) = P\frac{3 + m}{2\pi a^2}(a^2 - r^2)^{1/2(1+m)} \tag{4.8}$$

Распределение давления в значительной мере сходно с таковым в классическом случае. Однако в случае конического штампа давление $p(0)$ в центре остается конечным. В этом случае эпюра давления имеет в центре вертикальную касательную.

С помощью (3.12) можно подсчитать, что осадка вне штампа

$$w_0(r) = \frac{2\cos{}^1/_2 m\pi}{\pi} \; \frac{\Gamma({}^1/_2 + {}^1/_2 m)\,\Gamma(1 + {}^1/_2 k)}{\Gamma({}^1/_2 m + {}^1/_2 k + {}^1/_2)} A \int\limits_0^a \frac{t^m(a^k - t^k)}{(r^2 - t^2)^{1/2(m+1)}}\,dt \tag{4.9}$$

Поступила 22 VI 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Клейн Г. К. Учет неоднородности, разрывности деформаций и других механических свойств грунта при расчете сооружений на сплошном основании. Сб. тр. Моск. инж.-строит. ин-т, 1956, № 14.
2. Коренев Б. Г. Штамп, лежащий на упругом полупространстве, модуль упругости которого является степенной функцией глубины. ДАН, 1957, т. 112, № 5.
3. Моссаковский В. И. Давление круглого штампа на упругое полупространство, модуль упругости которого является степенной функцией глубины. ПММ, 1958, т. XX, вып. 1.
4. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. Гостехиздат, 1949.