В табл. 2 приведены значения величин

$$G_1 = -\frac{9}{16}\frac{\gamma}{\gamma^2+\beta^2}, \qquad G_2 = \frac{9}{16}\frac{\beta}{\beta^2+\gamma^2}, \qquad \varkappa = -\frac{\beta}{\gamma} \tag{2.11}$$

хорошо совпадающие с соответствующими численными результатами Сагоци.

Автор приносит свою благодарность К. А. Аристовой и Т. А. Черновой, выполнившим численные расчеты.

Поступила 14 X 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Sagoci H. F. Forced torsional oscillations of an elastic half-space. II. J. Appl. Phys., 1944, 15, № 9.
2. Лебедев Н. Н. Распределение электричества на тонком параболоидальном сегменте. ДАН, 1957, т. 114, № 3.
3. Ватсон Г. Н. Бесселевы функции. ИИЛ, 1948.
4. Уиттекер Е. Т., Ватсон Г. Н. Курс современного анализа. ГТТИ, 1933.
5. Лебедев Н. Н., Скальская И. П. Новый метод решения задачи дифракции электромагнитных волн на тонком проводящем диске. ЖТФ, 1959, т. 29, вып. 6.

---

# К ВОПРОСУ О РЕШЕНИИ ЗАДАЧ НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

Л. М. Качанов

(Ленинград)

Решение задач неустановившейся ползучести связано с большими трудностями. Метод численного решения недавно рассмотрели П. С. Куратов и В. И. Розенблюм [1]. Простой приближенный способ решения ранее был предложен автором [2,3]. Этот способ основан на разыскании минимума дополнительной мощности тела

$$\Lambda + \frac{\partial \Pi}{\partial t} = \min \tag{1}$$

в форме (для основной задачи)

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}' + \tau(t)(\sigma_{ij}'' - \sigma_{ij}') \equiv \sigma_{ij}^{(0)} \qquad (i, j = 1, 2, 3) \tag{2}$$

Здесь и в дальнейшем $\Lambda$ — дополнительное рассеяние тела, $\Pi$ — упругая потенциальная энергия тела, $t$ — время, $\sigma_{ij}$ — компоненты напряжения, $\sigma_{ij}'$, $\sigma_{ij}''$—компоненты напряжения соответственно в упругой задаче и задаче установившейся ползучести. Функция $\tau(t)$ монотонно возрастает и стремится к единице при $t \to \infty$.

Аналогичное решение строится в релаксационной и смешанной задачах [2,3].

Решение (2) является, в сущности, первым приближением. В настоящей заметке указывается способ построения более точных решений.

Ищем решение задачи (1) в форме

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \sum_{k=1,2,\ldots} c_k(t)\,\sigma_{ij}^{(k)} \tag{3}$$

Через $\sigma_{ij}^{(k)}$ обозначены частные решения однородных дифференциальных уравнений равновесия, удовлетворяющие нулевым граничным условиям на $S_F$, $c_k = c_k(t)$— произвольные функции времени. Решение $\sigma_{ij}^{(0)}$ целесообразно выделить, так как оно является хорошим приближением. Теперь дополнительная мощность тела будет функцией $\tau$ и $c_k$ и необходимые условия минимума приводят к системе дифференциальных уравнений относительно $c_k$

$$B(t)\frac{\partial \Lambda_1}{\partial c_i} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \tau\, \partial c_i}\frac{d\tau}{dt} + \sum_{k=1,2,\ldots} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial c_i \partial c_k}\frac{dc_k}{dt} = 0 \qquad (t = 1, 2, \ldots) \tag{4}$$

Для простоты принято, что кривые ползучести подобны, тогда $\Lambda = B(t)\Lambda_1$, где $\Lambda_1$ — функция только напряжений. Начальные условия для $c_k$ очевидны

$$c_k = 0 \quad \text{при } t = 0 \tag{5}$$

Так как П — положительная квадратичная форма $\tau$ и $c_k$, то вторые производные в уравнениях (4) постоянны, причем определитель

$$\Delta \equiv \left| \frac{\partial^2 \Pi}{\partial c_i \partial c_k} \right| > 0 \tag{6}$$

При условии (6) система (4) всегда может быть приведена к нормальной форме

$$\frac{dc_i}{dt} = -\frac{1}{\Delta} \sum_{k=1,2,\ldots} \Delta_{ik} \left[ B(t) \frac{\partial \Lambda_1}{\partial c_k} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \tau \partial c_k} \frac{d\tau}{dt} \right] \quad (i = 1, 2, \ldots) \tag{7}$$

где $\Delta_{ik}$ — алгебраическое дополнение соответствующего элемента определителя $\Delta$.

Если искать решение вариационного уравнения установившейся ползучести $\delta\Lambda_1 = 0$ (для того же тела при действии тех же нагрузок) в форме (3), то значения

$$\tau = 1, \quad c_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{8}$$

отвечают точному решению; при этом

$$\frac{\partial \Lambda_1}{\partial c_i} = 0; \qquad \delta^2 \Lambda_1 = \sum_{i,\, j=1,2,\ldots} \frac{\partial^2 \Lambda_1}{\partial c_i \partial c_j} \delta c_i \delta c_j > 0 \tag{9}$$

Заметим, что, повторяя рассуждения Хилла [4], можно показать, что для $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}''$ дополнительное рассеяние $\Lambda_1$ достигает абсолютного минимума, причем упомянутое решение единственно.

Приведем некоторые соображения относительно поведения функций $c_k(t)$ при больших временах. В рассматриваемой основной задаче на тело действуют конечные и постоянные во времени нагрузки, поэтому дополнительное рассеяние тела ограничено и в достаточно большом объеме напряжения ограничены. Можно поэтому считать, что функции $c_k(t)$ также ограничены.

Представим уравнения (7) в интегральной форме

$$-\int_0^{c_i} \left( \sum_{k=1,2,\ldots} \Delta_{ik} \left[ B(t) \frac{\partial \Lambda_1}{\partial c_k} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \tau \partial c_k} \frac{d\tau}{dt} \right] \right)^{-1} dc_i = \frac{1}{\Delta} \int_0^t dt \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{10}$$

При $t \to \infty$ правые части соотношений (10) неограниченно возрастают, а

$$\tau \to 1, \quad \frac{d\tau}{dt} \to 0, \quad B(t) \to B > 0$$

Вследствие ограниченности $c_i$ необходимо, чтобы при $t \to \infty$

$$\sum_{k=1,2,\ldots} \Delta_{ik} \frac{\partial \Lambda_1}{\partial c_k} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

Определитель этой системы $|\Delta_{ik}|$ — взаимный от определителя $\Delta$ и, следовательно, отличен от нуля. Поэтому $\partial \Lambda_1 / \partial c_k = 0$, но это влечет за собой $c_k = 0$. Так как при этом из (7) вытекает также, что $dc_k / dt \to 0$, то функции $c_k(t)$ асимптотически стремятся к нулю при $t \to \infty$.

Решение системы (9) целесообразно строить численно (или графически) методом Эйлера.

Изложенный метод легко обобщается на релаксационную и смешанную задачи, на случаи неравномерно нагретого тела, отсутствия подобия кривых ползучести, упруго-пластические деформации.

Поступила 8 X 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Куратов П. С. и Розенблюм В. И. Об интегрировании уравнений неустановившейся ползучести твердых тел. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 1.
2. Качанов Л. М. К теории неустановившейся ползучести. ПММ, 1949, т. XIII, вып. 4.
3. Качанов Л. М. Теория ползучести. Физматгиз, 1960.
4. Хилл Р. Новые горизонты в механике сплошных сред. Механика. Сб. перев. и обз. ин. период. лит., № 2, 1958, ИЛ.