О КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Я. С. Уфлянд

(Ленинград)

Рассматриваются установившиеся крутильные колебания полуограниченного упругого тела, созданные вращением жесткого цилиндра, сцепленного с полупространством по круговой площадке. Точное решение этой задачи получено Сагоци [1] путем использования волновых сфероидальных функций.

Ниже приводится иное рассмотрение задачи, основанное на сведении ее к парным интегральным уравнениям, эквивалентным некоторому регулярному уравнению Фредгольма, допускающему эффективное приближенное решение.

1°. Постановка задачи и сведение ее к интегральному уравнению Фредгольма. Пусть к жесткому штампу, сцепленному с полупространством ($z > 0$) по кругу радиуса a, приложен крутящий момент

$$M = M_0 \operatorname{Re} e^{i(\nu t+\alpha)} \qquad (\nu \text{ — частота колебаний}) \tag{1.1}$$

Нетрудно проверить, что все уравнения теории упругости будут удовлетворены, если принять не равной нулю только одну составляющую вектора перемещения по оси φ (r, φ, z — цилиндрические координаты)

$$u_\varphi = \operatorname{Re}\left(u e^{i(\nu t+\alpha)}\right) \tag{1.2}$$

причем функция $u(r, z)$ должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u = 0, \qquad k = \nu\sqrt{\frac{\rho}{G}} \tag{1.3}$$

где ρ — плотность, G — модуль сдвига.

На границе полупространства должны быть выполнены следующие условия:

$$u\,|_{z=0} = \varepsilon r, \qquad r < a; \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = 0, \qquad r > a \tag{1.4}$$

где ε — комплексная амплитуда угла поворота штампа, которая при решении задачи считается заданной; впоследствии она будет выражена через заданное значение M_0 амплитуды приложенного момента.

Второе условие (1.4) означает, что касательное напряжение

$$\tau_{\varphi z} = G\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} \tag{1.5}$$

обращается в нуль на поверхности тела вне штампа.

Если представить решение уравнения (1.3), стремящееся к нулю при $z \to \infty$, в виде

$$u = \int_0^\infty e^{-z\sqrt{\lambda^2-k^2}} J_1(\lambda r) A(\lambda)\, d\lambda \tag{1.6}$$

то для неизвестной функции $A(\lambda)$ из граничных условий (1.4) получаем парные интегральные уравнения

$$\int_0^\infty A(\lambda) J_1(\lambda r)\, d\lambda = \varepsilon r, \qquad r < a; \qquad \int_0^\infty \sqrt{\lambda^2-k^2}\, J_1(\lambda r) A(\lambda)\, d\lambda = 0, \qquad r > a \tag{1.7}$$

Следуя методу Н. Н. Лебедева [2], положим

$$A = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-k^2}} \int_0^a \varphi(t) \sin\lambda t\, dt \tag{1.8}$$

где $\varphi(t)$ — новая неизвестная функция. Пользуясь формулой [3]

$$\int_0^\infty J_0(\lambda r) \sin\lambda t\, d\lambda = 0, \qquad t < r \tag{1.9}$$

можно показать, что уравнение (1.8) при этом удовлетворено тождественно.

Подставляя (1.8) в первое из парных уравнений (1.7) и пользуясь формулой [3]

$$\int_0^\infty J_1(\lambda r)\sin\lambda t\,d\lambda = \frac{t}{r\sqrt{r^2-t^2}}, \qquad t<r \tag{1.10}$$

можно получить интегральное уравнение Шлемильха

$$\int_0^{\pi/2} F(r\sin\theta)\,d\theta = \varepsilon r^2 \tag{1.11}$$

для функции

$$F(x) = x\left\{\varphi(x) - \frac{1}{\pi}\int_0^a \varphi(t)\left[\psi(t-x)-\psi(t+x)\right]dt\right\} \tag{1.12}$$

где

$$\psi(y) = \int_0^\infty\left(1-\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-k^2}}\right)\cos\lambda y\,d\lambda \tag{1.13}$$

Решение уравнения (1.11) имеет вид [4]

$$F(x) = \frac{4\varepsilon}{\pi}x^2 \tag{1.14}$$

Функция $\psi(y)$ дается в явном виде [5]

$$\psi(y) = \frac{\pi k}{2}\left[J_1(k|y|) - iH_1(ky) + \frac{2i}{\pi}\right] \tag{1.15}$$

где $H_1(z)$ — функция Струве; поэтому поставленная задача сводится к решению регулярного уравнения Фредгольма

$$\varphi(x) - \frac{1}{\pi}\int_0^a \varphi(t)\left[\psi(t-x)-\psi(t+x)\right]dt = \frac{4\varepsilon}{\pi}x, \quad 0<x<a \tag{1.16}$$

ядро которого дается формулой (1.15).

2°. Численные расчеты. Полагая

$$\varphi(x) = \frac{4\varepsilon a}{\pi}\omega(\xi), \qquad \xi=\frac{x}{a}, \qquad \tau=\frac{t}{a}, \qquad \psi(y)=\frac{\pi k}{2a}L(y) \tag{2.1}$$

приводим основное уравнение (1.17) к безразмерному виду

$$\omega(\xi) = \xi + \frac{p}{2}\int_0^1 \omega(\tau)\left[L(\tau-\xi)-L(\tau+\xi)\right]d\tau \tag{2.2}$$

где

$$L(y) = J_1(p|y|) - iH_1(py) + \frac{2i}{\pi}, \quad p=ka \tag{2.3}$$

Для численного решения уравнения (2.2) следует положить

$$\omega(\xi) = \lambda(\xi) + i\mu(\xi) \tag{2.4}$$

Для неизвестных функций $\lambda(\xi)$ и $\mu(\xi)$ получаем систему вещественных интегральных уравнений

$$\begin{aligned}\lambda(\xi) &= \xi + \frac{p}{2}\int_0^1 \lambda(\tau)\{J_1[ka|\tau-\xi|] - J_1[ka(\tau+\xi)]\}d\tau + \\ &\quad + \frac{p}{2}\int_0^1 \mu(\tau)\{H_1[ka(\tau-\xi)] - H_1[ka(\tau+\xi)]\}dt \\ \mu(\xi) &= \frac{p}{2}\int_0^1 \lambda(\tau)\{H_1[ka(\tau+\xi)] - H_1[ka(\tau-\xi)]\}d\tau + \\ &\quad + \frac{p}{2}\int_0^1 \mu(\tau)\{J_1[ka|\tau-\xi|] - J_1[ka(\tau+\xi)]\}d\tau\end{aligned} \tag{2.5}$$

Система (2.5) решалась численно, путем сведения к алгебраической системе. Результаты расчета, полученные в случае деления интервала на 10 частей (для различных значений параметра p), приведены в табл. 1.

Таблица 1

τ	$p=0.4$		$p=0.8$		$p=1.2$		$p=1.6$		$p=2$	
	λ	μ	λ	μ	λ	μ	λ	μ	λ	μ
0.1	0.0962	0.00084	0.0870	0.0055	0.0753	0.0144	0.0624	0.0266	0.0485	0.0418
0.2	0.1925	0.00168	0.1743	0.0110	0.1514	0.0286	0.1264	0.0530	0.0996	0.0830
0.3	0.2890	0.00256	0 2623	0.0164	0.2291	0.0428	0.1932	0.0789	0.1554	0.1231
0.4	0.3857	0.00335	0.3514	0.0220	0.3092	0.0568	0.2645	0.1042	0.2183	0.1616
0.5	0·4828	0.00419	0.4417	0.0273	0.3923	0.0705	0.3416	0.1286	0.2906	0.1981
0.6	0.5803	0.00502	0.5338	0.0325	0.4793	0.0839	0.4260	0.1520	0.3743	0.2321
0.7	0.6782	0.00585	0.6279	0.0379	0.5714	0.0969	0.5187	0.1742	0.4715	0.2632
0.8	0.7768	0.00668	0.7243	0.0430	0.6690	0.1095	0.6215	0.1951	0.5841	0.2911
0.9	0.8759	0.00751	0.8234	0.0481	0.7723	0.1217	0.7352	0.2144	0.7138	0.3156
1.0	0.9758	0.00832	0.9256	0.0532	0.8826	0.1332	0.8609	0.2322	0.8620	0.3364

Для полного решения поставленной задачи необходимо еще найти связь между заданным крутящим моментом M_0 и комплексной амплитудой ε угла поворота штампа.

Пользуясь соотношением

$$M=\int_0^a\int_0^{2\pi}\tau_{\varphi z}\big|_{z=0}r^2\,dr\,d\varphi=2\pi G\operatorname{Re}e^{i(\nu t+\alpha)}\int_0^a\frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z=0}r^2\,dr$$

и вычисляя входящий в последнее выражение интеграл

$$\int_0^a\frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z=0}r^2\,dr=\int_0^a r^2\,dr\int_0^\infty\lambda J_1(\lambda r)\,d\lambda\int_0^a\varphi(t)\sin\lambda t\,dt$$

при помощи формулы [3]

$$\int_0^\infty J_0(\lambda r)\sin\lambda t\,d\lambda=\frac{1}{\sqrt{t^2-r^2}},\qquad t>r\qquad(2.6)$$

приходим к следующему выражению

$$M=M_0\operatorname{Re}e^{i(\nu t+\alpha)}=-16Ga^3\operatorname{Re}\varepsilon\int_0^1\tau\omega(\tau)\,d\tau\qquad(2.7)$$

Отсюда и находится искомая связь

$$\varepsilon=-M_0\left\{16a^3G\int_0^1[\lambda(\tau)+i\mu(\tau)]\,\tau\,d\tau\right\}^{-1}\qquad(2.8)$$

Таблица 2

p	$\varkappa$	G_1	G_2
0.4	0.00861	0.6038	0.00520
0.8	0.05962	0.6462	0.03851
1.2	0.1651	0.6859	0.1132
1.6	0.3190	0.6922	0.2208
2.0	0.5127	0.6479	0.3922

Для сравнения полученных результатов с данными Сагоци [1] представим соотношение (2.8) в виде

$$\varepsilon=\frac{9M_0}{16\pi a^3G}\,\frac{\gamma+i\beta}{\gamma^2+\beta^2}\qquad(2.9)$$

где

$$\beta=\frac{9}{\pi}\int_0^1\mu(\tau)\,\tau\,d\tau,\qquad\gamma=-\frac{9}{\pi}\int_0^1\lambda(\tau)\,\tau\,d\tau\qquad(2.10)$$

В табл. 2 приведены значения величин

$$G_1 = -\frac{9}{16}\frac{\gamma}{\gamma^2+\beta^2}, \qquad G_2 = \frac{9}{16}\frac{\beta}{\beta^2+\gamma^2}, \qquad \varkappa = -\frac{\beta}{\gamma} \tag{2.11}$$

хорошо совпадающие с соответствующими численными результатами Сагоци.

Автор приносит свою благодарность К. А. Аристовой и Т. А. Черновой, выполнившим численные расчеты.

Поступила 14 X 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Sagoci H. F. Forced torsional oscillations of an elastic half-space. II. J. Appl. Phys., 1944, 15, № 9.
2. Лебедев Н. Н. Распределение электричества на тонком параболоидальном сегменте. ДАН, 1957, т. 114, № 3.
3. Ватсон Г. Н. Бесселевы функции. ИИЛ, 1948.
4. Уиттекер Е. Т., Ватсон Г. Н. Курс современного анализа. ГТТИ, 1933.
5. Лебедев Н. Н., Скальская И. П. Новый метод решения задачи дифракции электромагнитных волн на тонком проводящем диске. ЖТФ, 1959, т. 29, вып. 6.

К ВОПРОСУ О РЕШЕНИИ ЗАДАЧ НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

Л. М. Качанов

(Ленинград)

Решение задач неустановившейся ползучести связано с большими трудностями. Метод численного решения недавно рассмотрели П. С. Куратов и В. И. Розенблюм [1]. Простой приближенный способ решения ранее был предложен автором [2,3]. Этот способ основан на разыскании минимума дополнительной мощности тела

$$\Lambda + \frac{\partial \Pi}{\partial t} = \min \tag{1}$$

в форме (для основной задачи)

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}' + \tau(t)(\sigma_{ij}'' - \sigma_{ij}') \equiv \sigma_{ij}^{(0)} \qquad (i, j = 1, 2, 3) \tag{2}$$

Здесь и в дальнейшем Λ — дополнительное рассеяние тела, Π — упругая потенциальная энергия тела, t — время, σ_{ij} — компоненты напряжения, σ_{ij}', σ_{ij}'' — компоненты напряжения соответственно в упругой задаче и задаче установившейся ползучести. Функция $\tau(t)$ монотонно возрастает и стремится к единице при $t \to \infty$.

Аналогичное решение строится в релаксационной и смешанной задачах [2,3].

Решение (2) является, в сущности, первым приближением. В настоящей заметке указывается способ построения более точных решений.

Ищем решение задачи (1) в форме

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \sum_{k=1,2,\ldots} c_k(t)\,\sigma_{ij}^{(k)} \tag{3}$$

Через $\sigma_{ij}^{(k)}$ обозначены частные решения однородных дифференциальных уравнений равновесия, удовлетворяющие нулевым граничным условиям на S_F, $c_k = c_k(t)$ — произвольные функции времени. Решение $\sigma_{ij}^{(0)}$ целесообразно выделить, так как оно является хорошим приближением. Теперь дополнительная мощность тела будет функцией τ и c_k и необходимые условия минимума приводят к системе дифференциальных уравнений относительно c_k

$$B(t)\frac{\partial \Lambda_1}{\partial c_i} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \tau\, \partial c_i}\frac{d\tau}{dt} + \sum_{k=1,2,\ldots} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial c_i \partial c_k}\frac{dc_k}{dt} = 0 \qquad (t = 1, 2, \ldots) \tag{4}$$

Для простоты принято, что кривые ползучести подобны, тогда $\Lambda = B(t)\Lambda_1$, где Λ_1 — функция только напряжений. Начальные условия для c_k очевидны

$$c_k = 0 \quad \text{при } t = 0 \tag{5}$$