

О ДИНАМИЧЕСКОМ ДАВЛЕНИИ ЖИДКОСТИ НА ПЛОТИНУ ПРИ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИИ

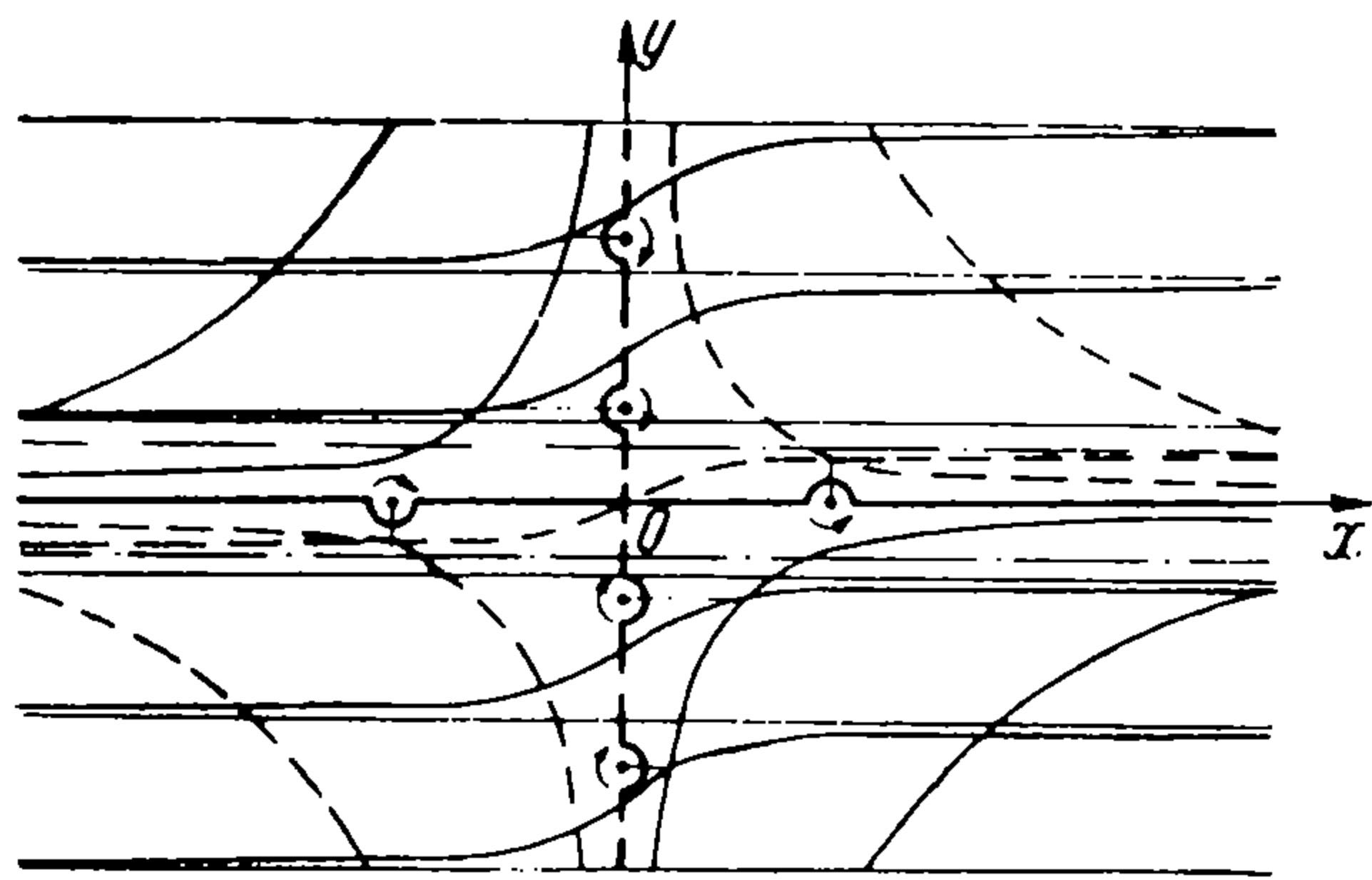
Чень Чжень-чен (Москва, Пекин)

При расчетах плотин гидротехнических сооружений на действие землетрясений учитываются только напряжения, обусловленные собственными колебаниями плотины [1]. Очевидно, что при землетрясении вода также оказывает дополнительное динамическое давление на плотину. Попытка учесть этот фактор предпринята в работах [2,3], но в этих работах граничные условия удовлетворены приближенно, т. е. пренебрегалось поверхностной волной жидкости и не учитывалось смещение плотины при удовлетворении граничного условия на ней. Ниже задача об определении динамического давления исследуется более точно. Показывается, что нельзя пренебрегать наличием дополнительного динамического давления, которое в некоторых случаях превосходит величину гидростатического давления, особенно в верхних сечениях плотины.

* * *

Допустим, что в системе прямоугольных координат x, y, z в плоскости $x = U_0 \sin \omega t$ помещена плотина. Часть пространства, ограниченная условиями $x \geq U_0 \sin \omega t$, $-h \leq y \leq 0$, $-\infty \leq z \leq \infty$, заполнена жидкостью. Рассмотрим волновое движение и динамическое давление жидкости, вызванные тем, что в момент времени $t = 0$ вследствие землетрясения плотина мгновенно приобретает начальную скорость V_0 , т. е. со стороны плотины на жидкость при $x = 0$, $t = 0$ действует ударный начальный импульс со скоростью V_0 . Затем плотина совершает колебания $V = V_0 \cos \omega t$.

Очевидно, что при изучении волн жидкости и ее динамического давления влияние прогиба плотины является пренебрежимо малым. Поэтому, обозначая через $\varphi(x, y, t)$ потенциал скоростей жидкости и учитывая, что жидкость несжимаема и ее свободная поверхность первопокоящаяся, поставим начальные условия задачи



Фиг. 1.

$$\frac{\partial \varphi(x, 0, 0)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \varphi(0, y, 0)}{\partial x} = V_0 \quad (1)$$

и граничные условия

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = V_0 \cos \omega t \quad \text{при } x = U_0 \sin \omega t \quad (2)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = -h$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0 \quad (3)$$

где U_0, V_0 — амплитуды смещения и скорости колеблющейся плотины соответственно.

Потенциал скоростей отыскиваемого решения задачи должен удовлетворять уравнению Лапласа $\Delta \varphi = 0$ и вышесказанным условиям. Представим потенциал скоростей $\varphi(x, y, t)$, удовлетворяющий уравнению Лапласа, в виде

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, t) = \cos \omega t \left\{ \int_0^{\infty} [A(\alpha) \cos \alpha y + B(\alpha) \sin \alpha y] e^{-\alpha X} d\alpha + \right. \\ \left. + \int_0^{\infty} [C(\alpha, k) \operatorname{ch} k(y+h) + D(\alpha, k) \operatorname{sh} ky] \cos kX d\alpha dk \right\} \quad (4) \end{aligned}$$

Здесь

$$X = x - U_0 \sin \omega t$$

Произвольные функции $A(\alpha), B(\alpha), C(\alpha, k), D(\alpha, k)$ — своих аргументов определяются посредством граничных и начальных условий. Условимся, что

$$\varphi = \varphi(x, y, t) \quad \text{при } x \geq U_0 \sin \omega t, \quad \varphi = 0 \quad \text{при } x < U_0 \sin \omega t \quad (5)$$

Подставляя $\varphi(x, y, t)$ во второе граничное условие (3), получим

$$QA(\alpha) = \alpha B(\alpha) \quad (Q = \omega^2 / g) \quad (kg \operatorname{sh} kh - \omega^2 \operatorname{ch} kh) C(\alpha, k) = -kgD(\alpha, k) \quad (6)$$

удовлетворяя условию (2), получим интегральное уравнение

$$-\int_0^{\infty} \frac{B(\alpha)}{Q} [\alpha \cos \alpha y + Q \sin \alpha y] \alpha d\alpha = V_0 \quad (7)$$

Введя новые переменные $\lambda = (\alpha / Q)^2$, $y = -v$, перепишем уравнение (7) в виде

$$-\frac{V_0^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\pi B(Q\sqrt{\lambda}) Q^2 (\lambda + 1)}{2\sqrt{2}} \left[\cos \sqrt{\lambda} Q v - \frac{\sin \sqrt{\lambda} Q v}{\sqrt{\lambda}} \right] \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda + 1} d\lambda = V_0 \psi(v) \quad (8)$$

где

$$\psi(v) = 0 \quad \text{при } h < v < \infty \quad \text{и} \quad -\infty < v < 0; \quad \psi(v) = 1 \quad \text{при } 0 \leq v \leq h \quad (9)$$

При $\theta = 1/4 \pi$, пользуясь известной формулой обращения

$$F_0(\lambda) = \int_0^{\infty} f_0(x) \left[\sin \theta \cos \sqrt{\lambda} x - \cos \theta \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} \right] dx$$

$$f_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F_0(\lambda) \left[\sin \theta \cos \sqrt{\lambda} x - \cos \theta \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} \right] \frac{\sqrt{\lambda} d\lambda}{\lambda \sin^2 \theta + \cos^2 \theta} \quad (10)$$

и учитывая свойство функций $\psi(v)$, определим произвольную функцию

$$B(\alpha) = \frac{2V_0 Q [Q(1 - \cos \alpha h) - \alpha \sin \alpha h]}{\pi \alpha^2 (\alpha^2 + Q^2)} \quad (11)$$

Удовлетворяя первому условию (3), получим другое интегральное уравнение

$$\int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} D(\alpha, k) k \operatorname{ch} kh \cos kX dk + \frac{2V_0}{\pi} G(\alpha) M(\alpha) e^{-\alpha X} \right] d\alpha = 0 \quad (12)$$

где

$$G(\alpha) = \pi B(\alpha) / 2V_0 Q, \quad M(\alpha) = \alpha (\alpha \sin \alpha h + Q \cos \alpha h)$$

Полагая выражение в квадратных скобках равным нулю, вводя новую переменную $\xi = X$, имея в виду характер функции $\varphi(x, y, t)$ и воспользовавшись интегральной формулой Фурье, имеем

$$\frac{\pi}{2} D(\alpha, k) k \operatorname{ch} kh + \frac{2V_0}{\pi} G(\alpha) M(\alpha) \int_0^{\infty} e^{-\alpha \xi} \cos k\xi d\xi = 0$$

Отсюда

$$D(\alpha, k) = -\frac{4V_0 \alpha^2 (\alpha \sin \alpha h + Q \cos \alpha h)}{\pi^2 k (\alpha^2 + k^2) \operatorname{ch} kh} G(\alpha) \quad (13)$$

Теперь все произвольные коэффициенты в (4) определены и полученный потенциал скоростей $\varphi(x, y, t)$ удовлетворяет начальным условиям (1).

Дифференцируя потенциал скоростей $\varphi(x, y, t)$ по t , при $x = U_0 \sin \omega t$ имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{2V_0}{\pi} \omega \sin \omega t \left\{ \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{f(\alpha) \operatorname{sh} ky d\alpha dk}{k (\alpha^2 + Q^2) (\alpha^2 + k^2) \operatorname{ch} kh} - \int_0^{\infty} \frac{F(\alpha, y)}{\alpha^2 (\alpha^2 + Q^2)} d\alpha - \right.$$

$$\left. - \frac{2g}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{f(\alpha) \operatorname{ch} k(y+h) d\alpha dk}{(\alpha^2 + Q^2) (\alpha^2 + k^2) (kg \operatorname{sh} kh - \omega^2 \operatorname{ch} kh) \operatorname{ch} kh} \right\} + \frac{2V_0^2}{\pi} \cos^2 \omega t \int_0^{\infty} \frac{F(\alpha, y) d\alpha}{\alpha (\alpha^2 + Q^2)} \quad (14)$$

где

$$N(\alpha) = [Q(1 - \cos \alpha h) - \alpha \sin \alpha h], \quad F(\alpha, y) = N(\alpha) (\alpha \cos \alpha y + Q \sin \alpha y)$$

$$f(\alpha) = N(\alpha) M(\alpha) / \alpha$$

При вычислении двойного интеграла (14) воспользуемся теорией вычетов. Сначала интегрируем по переменному α , при этом имеем на комплексной плоскости полюсы, лежащие на мнимой оси $\pm iQ$ и $\pm ik$. Затем при интегрировании по переменному k имеем полюсы, находящиеся на вещественной оси $\pm Q$ и для $\operatorname{ch} kh = 0$ на мнимой оси $\pm im\pi/2h$, где $m = 1, 3, 5, \dots, \infty$, а для трансцендентного уравнения $kg \operatorname{sh} kh - \omega^2 \operatorname{ch} kh = 0$ имеем два корня, лежащих на вещественной оси $\pm \gamma_s$ и бесконечное число корней $\pm i\gamma_n$, где $n = 1, 2, 3, \dots$, на мнимой оси. Их можно

найти, руководствуясь фиг. 1, посредством последовательных приближений, при этом может быть достигнута нужная степень. Решаем уравнение для вещественных корней $\gamma \operatorname{th} \gamma = Qh$ и для мнимых корней $\gamma \operatorname{tg} \gamma = -Qh$, где $\gamma = kh$.

Переходя к вычислениям, имеем

$$\int_0^{\infty} \frac{N(\alpha) (Q \cos \alpha h + \alpha \sin \alpha h)}{(\alpha^2 + Q^2)(\alpha^2 + k^2)} d\alpha = \frac{Q\pi R_0}{k^2 - Q^2} + \frac{\pi}{2} \frac{[Q(1 - \operatorname{ch} kh) + k \operatorname{sh} kh]}{k(Q - k)} e^{-kh} \quad (15)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \iint_0^{\infty} \frac{f(\alpha) \operatorname{sh} ky d\alpha dk}{k(\alpha^2 + Q^2)(\alpha^2 + k^2) \operatorname{ch} kh} &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} \frac{[Q(1 - \operatorname{ch} kh) + k \operatorname{sh} kh] e^{-kh}}{k^2(Q - k) \operatorname{ch} kh} \operatorname{sh} ky dk + \\ + Q\pi R_0 \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} ky dk}{(k^2 - Q^2) k \operatorname{ch} kh} &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} \frac{f(k) \sin ky dk}{k^2(k^2 + Q^2) \cos kh} - i \frac{\pi^2}{2} \frac{R_0 \operatorname{sh} Qy}{Q \operatorname{ch} Qh} - \\ - \frac{\pi^2}{2} \sum_{m=1, 3}^{\infty} \frac{(Q - C \sin C_{\pi})(Q + iC)}{hC^2(Q^2 + C^2)} \sin Cy - Q\pi^2 R_0 \sum_{m=1, 3}^{\infty} \frac{\sin Cy \sin C_{\pi}}{hC(Q^2 + C^2)} + iH \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь

$$f(k) = N(k) (Q \cos kh + k \sin kh), \quad N(k) = [Q(1 - \cos kh) - k \sin kh]$$

$$R_0 = (1 - e^{-Qh}) e^{-Qh}, \quad C = m\pi / 2h, \quad C_{\pi} = m\pi / 2$$

причем

$$H = \int_0^{\infty} \frac{N(k) (k \cos kh - Q \sin kh)}{k^2(k^2 + Q^2) \cos kh} \sin ky dk \quad (17)$$

Вычислив таким же путем второй двойной интеграл в формуле (14) и подставив в нее найденные результаты интегрирования, получим при $x = U_0 \sin \omega t$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -2V_0 Q h^2 \omega \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n \cos [\gamma_n (y + h) / h] \sin \omega t}{[\gamma_n^2 - (1 - Qh) Qh] \gamma_n \cos \gamma_n} - V_0^2 [1 - 2(1 - e^{-Qh}) e^{Qy}] \cos^2 \omega t \quad (18)$$

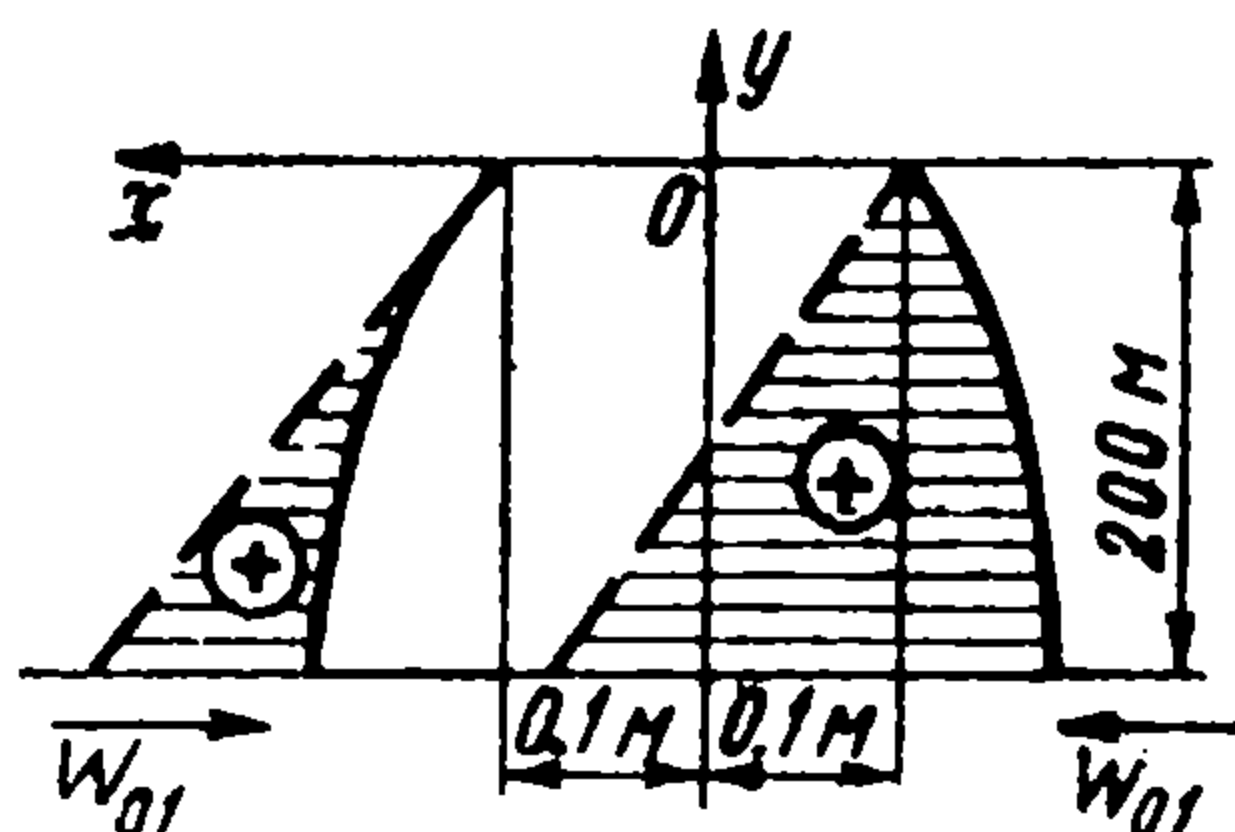
где

$$C_n = 1 - C_n', \quad C_n' = 2R_0 \gamma_n^2 / (\gamma_n^2 + Q^2 h^2) \cos \gamma_n$$

Дальше продифференцируем $\varphi(x, y, t)$ по y ; при $x = U_0 \sin \omega t$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{2V_0}{\pi} \cos \omega t \left\{ \int_0^{\infty} \frac{N(\alpha) [Q \cos \alpha y - \alpha \sin \alpha y]}{\alpha(\alpha^2 + Q^2)} d\alpha - \frac{2}{\pi} \iint_0^{\infty} \frac{f(\alpha) \operatorname{ch} ky d\alpha dk}{(\alpha^2 + Q^2)(\alpha^2 + k^2) \operatorname{ch} kh} + \right. \\ &\left. + \frac{2g}{\pi} \iint_0^{\infty} \frac{f(\alpha) k \operatorname{sh} k(y + h) d\alpha dk}{(\alpha^2 + Q^2)(\alpha^2 + k^2) (kg \operatorname{sh} kh - \omega^2 \operatorname{ch} kh) \operatorname{ch} kh} \right\} \end{aligned} \quad (19)$$

Проводя здесь аналогичные вычисления, получим при $x = U_0 \sin \omega t$



Фиг. 2

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -2V_0 Q h \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n \sin [\gamma_n (y + h) / h]}{[\gamma_n^2 - (1 - Qh) Qh] \cos \gamma_n} \cos \omega t \quad (20)$$

Как известно,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = V_0 \cos \omega t \quad (21)$$

Обозначая через ρ плотность жидкости, а через P^* ее динамическое давление, будем иметь формулу

$$\frac{P^*}{\rho} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (22)$$

Преобразуем формулу (18) к следующему виду:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -2U_0 g \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n \cos [\gamma_n (y + h) / h]}{\gamma_n [R_1 - (R_2 - 1)] \cos \gamma_n} \sin \omega t - V_0^2 [1 - 2(1 - e^{-Qh}) e^{Qy}] \cos^2 \omega t \quad (23)$$

$$(R_1 = (\gamma_n / Qh)^2, \quad R_2 = 1 / Qh)$$

Обозначим через $\varphi_y = \partial\varphi / \partial y$, $\varphi_t = \partial\varphi / \partial t$ (при $x = U_0 \sin \omega t$). Сопоставление формул (20) и (18) показывает, что если ωh велико, то φ_y представляет собой величину более высокого порядка. Из первого слагаемого под знаком суммы (23) мы видим, что для заданной амплитуды смещения U_0 при увеличении h или ω динамическое давление жидкости значительно увеличивается, ибо при этом $\gamma_n \rightarrow 1/2\pi$ (фиг. 1) и в связи с этим $\cos \gamma_n \rightarrow 0$, причем $C_n \rightarrow 1$, $[R_1 - (R_2 - 1)] \rightarrow 1$. Отсюда следует, что числитель сохраняет некоторое конечное значение, а знаменатель быстро уменьшается и, следовательно, величина φ_t быстро возрастает. Следует отметить, что $\gamma_n \rightarrow n\pi$ с ростом числа n ; ввиду этого $\cos \gamma_n \rightarrow 1$ (фиг. 1), а поэтому ряд, содержащийся в формуле (23), быстро сходится. Это позволяет легко получить распределение динамического давления P^* вдоль плотины. В качестве примера, взяв первые два члена суммы из (23), имеем на дне плотины при глубине жидкости, равной 200 м, максимальное значение.

1) $\varphi_t = 96720U_0$ (для $\omega = 20$), если $U_0 \geq 0.021$ м, то динамическое давление $P^* = 2031\rho$ больше статического давления $P^0 = 1960\rho$, 2) $\varphi_t = 11502U_0$ (для $\omega = 10$), если $U_0 \geq 0.18$ м, то $P^* = 2070\rho$, 3) $\varphi_t = 5756U_0$ ($\omega = 6$), если $U_0 \geq 0.35$ м, то $P^* \geq 2015\rho$. Сравнение 1) и 2) показывает, что при увеличении ω вдвое величина φ_t возрастает больше чем в 8 раз.

Из сейсмических законов знаем, что последний случай приближается к случаю разрушительного землетрясения. Очевидно, при этом дополнительное динамическое давление превосходит статическое, так как $\beta = 103, 150$ и 158% при $y = -h, -0.5h$ и $-0.1h$ соответственно, где β обозначает безразмерный параметр P^* / P^0 .

Во втором случае при $U_0 = 0.10$ м приближаемся к случаю сильного землетрясения, при этом имеем $\beta = 59\%$ ($y = -h$), $\beta = 84\%$ ($y = -0.5h$), $\beta = 92\%$ ($y = -0.1h$). При увеличении глубины жидкости до 300 м будем иметь $\varphi_t = 13470U_0$ ($\omega = 10$) и $\varphi_t = 6740U_0$ ($\omega = 6$). Исходя из вышеуказанного анализа, видно, что при разрушительном, а также и сильном землетрясении динамическое давление жидкости, вызванное колеблющейся плотиной, оказывает большое влияние на ее нагрузку, в особенности для верхних сечений плотины.

Подставляя (18), (20) и (21) в формулу (22), видим, что максимальное давление появится в тот момент времени, при котором колеблющаяся плотина, дойдя до $x = -U_0$, приобретает максимальное ускорение и движется навстречу направлению движения жидкости, а минимальное давление возникает тогда, когда плотина, дойдя до $x = U_0$, движется с максимальным ускорением от жидкости.

По заданным h, ω, U_0, V_0 , нетрудно с помощью формул (18) — (22) построить графики распределения максимального давления жидкости вдоль плотины. В качестве примера в случае $h = 200$ м, $\omega = 10$, $U_0 = 0.1$ м и $\omega = 6$, $U_0 = 0.35$ м построим графики, изображенные на фиг. 2 и 3 соответственно, где пунктирная линия выражает статическое давление, а сплошная линия — дополнительное динамическое давление, W_{01}, W_{02} — максимальное ускорение плотины. Из фиг. 3 видно, что для этого случая при $x = U_0$ плотина подвергается отрицательной нагрузке, равной 4500 и 5500 кг/м² (при $y = -200$ и -10 м соответственно), но меньшей атмосферного давления 1×10^4 кг/м².

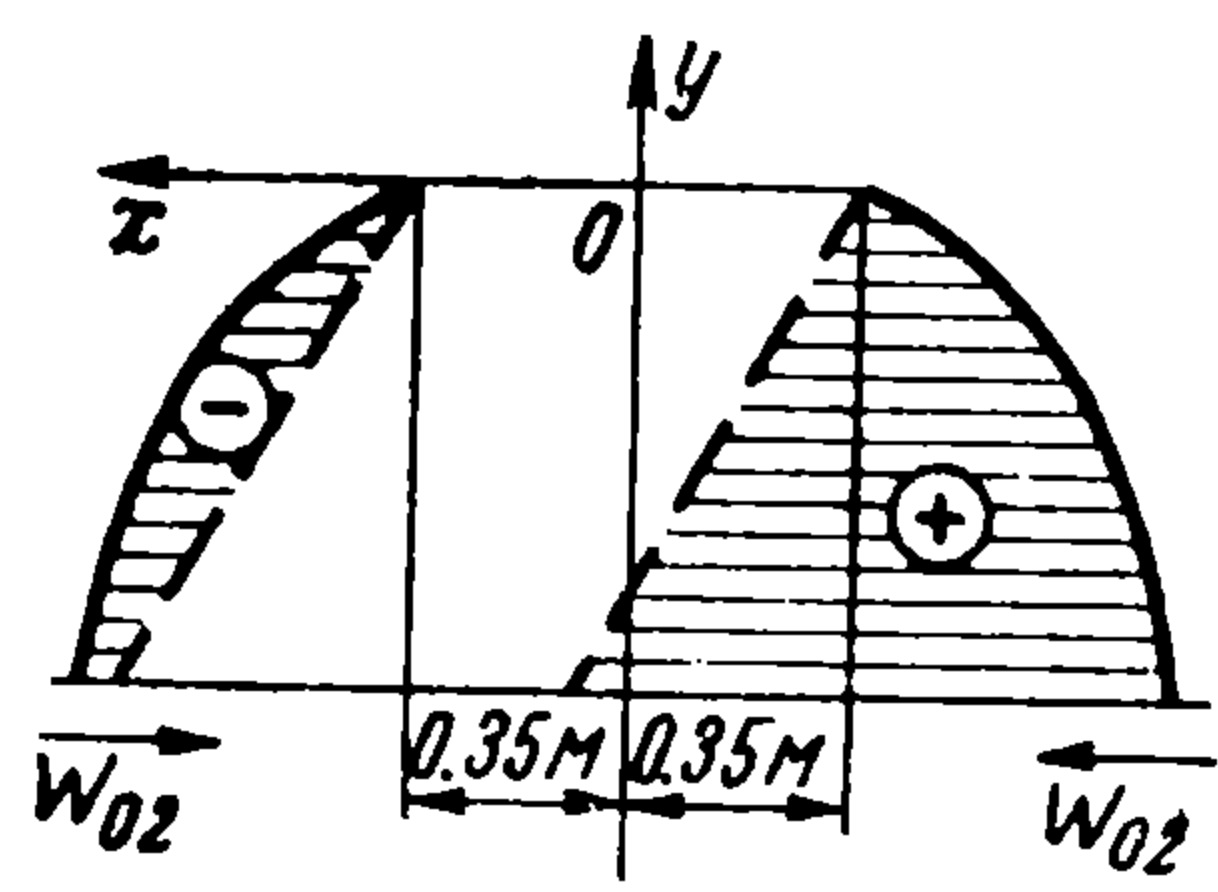
Чтобы избежать возникновения разрушительного давления жидкости, или чтобы не позволить их максимальному значению превзойти некоторый предел, назначенный при проектировании, можно при известном ω уменьшать глубину жидкости h , чтобы γ_n не стремилось к $1/2\pi$, а сохраняло некоторое значение, соответствующее нашему назначенному значению. Зависимость γ_n от ω и h можно получить из уравнения $\gamma_n \operatorname{tg} \gamma_n = -Qh$ с достаточной степенью точности.

Теперь перейдем к рассмотрению волн жидкости. Уравнение, определяющее вид волновой поверхности, таково

$$\zeta(x, t) = -\frac{1}{g} \frac{\partial\varphi(x, 0, t)}{\partial t} = \frac{4V_0}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\omega f(\alpha) \cos kX \sin \omega t \, d\alpha \, dk}{(\alpha^2 + Q^2)(\alpha^2 + k^2)(kg \operatorname{sh} kh - \omega^2 \operatorname{ch} kh)} +$$

$$+ \frac{2V_0}{g\pi} \omega \sin \omega t \int_0^\infty \frac{N(\alpha) e^{-\alpha X}}{\alpha(\alpha^2 + Q^2)} \, d\alpha \quad (24)$$

Обозначая через η двойной интеграл и сначала интегрируя его по переменному α , имеем соотношение (15). Подставив (15) в (24), получим



Фиг. 3

$$\eta = \frac{Q\pi R_0}{8i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J(k, x, t) dk}{(k^2 - Q^2)(kg \operatorname{sh} kh - \omega^2 \operatorname{ch} kh)} - \quad (25)$$

$$- \frac{\pi}{8i} \int_0^{\infty} \frac{[Q(1 - \operatorname{ch} kh) + k \operatorname{sh} kh] e^{-kh} J(k, x, t)}{k(k - Q)(kg \operatorname{sh} kh - \omega^2 \operatorname{ch} kh)} dk$$

где

$$J(k, x, t) = \exp[i(\omega t + kX)] + \exp[i(\omega t - kX)] - \exp[-i(\omega t - kX)] - \exp[-i(\omega t + kX)]$$

Выбирая пути интегрирования, указанные на фиг. 1, где толстая сплошная линия есть путь первой интеграции (25), а пунктирная — путь второй интеграции, причем обход полюсов для первых двух слагаемых $J(k, x, t)$ указан сплошной линией, а для последних двух слагаемых обход указан стрелками (при таком выборе пути интегрирования обеспечивается уход волн от плотины на бесконечность [5]), и пользуясь теорией вычетов, вычислим η . После подстановки этих результатов интегрирования в (24), получим (при $t > 0$)

$$\zeta(x, t) = 2U_0 Q^2 h^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n \exp(-\gamma_n X/h) \sin \omega t}{\gamma_n [\gamma_n^2 - (1 - Qh) Qh]} + \frac{2U_0 Q^2 h^2 C_s \cos[(\gamma_s' h)(X - \omega h t / \gamma_s)]}{(\gamma_s - Qh) [\gamma_s^2 + (1 - Qh) Qh] \operatorname{ch} \gamma_s} \quad (26)$$

где $C_s = e^{-\gamma_s} - C_s'$, $C_s' = 2R_0 \gamma_s / (\gamma_s + Qh)$. Формула (26) показывает, что вслед за движением плотины вблизи нее уровень жидкости периодически поднимается и опускается, вследствие чего образуются прогрессивные волны уходят от плотины на бесконечность со скоростью $\omega h / \gamma_s$, длина волн равна $2\pi h / \gamma_s$.

Замечание: При определении произвольной функции $D(\alpha, k)$ подынтегральная функция в (12) по переменному α полагалась равной нулю. Мы знаем, эта функция аperiодическая (аргумент α изменяется от 0 до ∞), и поэтому, хотя интеграл по α тождественно равен нулю, но подынтегральная функция может быть равной нулю, но и может быть не нулем. Итак, представим второй член (4) однократным интегралом по переменному k . Удовлетворяя прежним условиям, получим функции $D(k)$ и $C(k)$, которые будут функциями k , умноженными на некоторые постоянные, являющиеся интегралами по α . Например,

$$D(k) = I(k) \int_0^{\infty} L(\alpha) d\alpha$$

Подставляя эти коэффициенты в $\varphi(x, y, t)$, получим прежний результат, поэтому в данном случае подынтегральная функция равна нулю.

Автор приносит глубокую благодарность Х. А. Рахматулину и Л. Н. Сретенскому за их ценные советы, а также и С. С. Войту, Н. П. Сомову за их помощь.

Поступила 3 X 1960

Институт механики АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Напетваридзе Ш. Г. Гидродинамическое давление при сейсмическом воздействии. Тр. Ин-та строит. дела АН ГрузССР, Тбилиси, 1955.
2. Лейбензон Л. С. О натуральных периодах колебаний плотины, подпирающей реку. Уч. зап. МГУ, 1935, № 2.
3. Уразбаев М. Т. Сейсмостойкость гидроупругих систем. Строительная механика и расчет сооружений, 1959, вып. 5.
4. Левитан Б. М. Разложение по собственным функциям линейного дифференциального уравнения. ГИТТИ, 1950.
5. Сретенский Л. Н. О направленном излучении волн из области, подверженной внешнему давлению. ПММ, 1956, т. XX, вып. 3.
6. Войт С. С. Волны на поверхности жидкости, возникающие от перемещающейся периодической системы давлений. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 1.
7. Черкесов Л. В. О волнах на поверхности жидкости. Изв. АН СССР. ОТН, Механика и машиностроение, 1959, вып. 2.