Здесь

$$a_n = \left(\frac{\theta_0}{\sin\theta_0}\right)^{1/2} J_0(\mu_n\theta_0) - 1$$

$$b_n = -\frac{(\nu_n+1)(\nu_n-{}^1/_2)}{(\nu_n+2)(\nu_n-1)\sin\theta_0}\left(\frac{\theta_0}{\sin\theta_0}\right)^{1/2} J_1\left[\left(\nu_n-\frac{1}{2}\right)\theta_0\right]$$

При помощи этих формул были проделаны расчеты при следующих входных данных: $\theta_0 = {}^1/_6\,\pi$, $\varkappa = 4$, $C\,/\,k\psi_1 = -4$, $\gamma = -2$. На основании полученных результатов построены линии тока (фиг. 2). На фигуре видно, что полученные поверхности тока правильно отражают картину движения частиц жидкости в гидроциклоне.

С ростом параметра $C/k\psi_1$ по абсолютной величине линия раздела опускается, а вблизи крышки образуются замкнутые линии тока — застойная зона. В этой зоне жидкость циркулирует, не выходя из конуса.

Следует отметить, что ряды (22) сходятся быстро примерно до $\rho = 0.9$, а при $\rho > 0.9$ сходимость слабая и тем слабее, чем ближе к крышке.

Поступила 4 III 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев О. Ф. Основы механики винтовых и циркуляционных потоков. Госэнергоиздат, М.— Л., 1958.
2. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций, ч. 1. ИИЛ, 1949.
3. Macdonald H. M. Zeroes of the spherical harmonics $P_n^m(\mu)$ considerad as a function of n. The London Mathematical Society. Proceedings, 1899, vol. XXXI.
4. Мурадян Р. М. Асимптотические формулы для обобщенных функций Лежандра и функций Гегенбауэра. ДАН, 1957, т. 115, № 5.

О РЕШЕНИИ ПЛОСКОЙ БЕЗВИХРЕВОЙ ЗАДАЧИ ГИДРОДИНАМИКИ ДЛЯ ДВУХСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

Н. В. Курдюмова

(Ленинград)

Случай плоского движения и обтекания одного тела, когда внешность или внутренность круга конформно отображается на внешность контура тела, подробно рассмотрен в литературе и не вызывает особых математических затруднений. Значительно сложнее решается задача о плоском течении в двухсвязных областях; даже при условии, что известна функция, конформно отображающая круговое кольцо Σ радиусов ρ_1 и ρ_2 на двухсвязную область S, занятую потоком (мы предполагаем, что область S содержит бесконечно удаленную точку), решение довольно громоздко. Покажем, что коль скоро известна функция

$$z = \omega(\zeta) \qquad (z = x + iy,\ \zeta = \rho e^{i\vartheta}) \tag{1}$$

дающая конформное отображение кругового кольца на внешность двух заданных контуров, потенциал скоростей φ может быть найден непосредственно.

Полагаем, что контуру C_1 области S соответствует окружность радиуса $\rho = 1$ области Σ. Отношение радиусов $\rho_1\,/\,\rho_2 = 1\,/\,\rho_2$ определяется геометрическим видом области S.

Отделяя в (1) вещественную часть от мнимой, получим $x = x(\rho, \vartheta)$, $y = y(\rho, \vartheta)$, где ρ и ϑ — криволинейные координаты в области S. Потенциал скоростей φ удовлетворяет уравнению Лапласа, которое в криволинейных координатах имеет вид

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{H_\vartheta}{H_\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{H_\rho}{H_\vartheta}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\right) = 0 \tag{2}$$

Здесь H_ρ и H_ϑ — параметры Ляме в направлении ρ и ϑ (под направлением ρ подразумевается направление нормали к кривой $\rho = \text{const}$ в сторону увеличения ρ);

$$H_\rho{}^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial\rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\rho}\right)^2, \qquad H_\vartheta{}^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial\vartheta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\vartheta}\right)^2 \tag{3}$$

Так как отображение (1) конформное, то $x(\rho, \vartheta)$ и $y(\rho, \vartheta)$ связаны условиями Коши — Римана

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial y}{\partial \vartheta}, \qquad \frac{\partial y}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \tag{4}$$

На основании (3) и (4) имеем $H_\rho / H_\vartheta = 1/\rho$, и уравнение (2) примет вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \vartheta^2} = 0 \tag{5}$$

В дальнейшем будет показано, что граничные условия при рассмотрении задачи об обтекании двух цилиндрических тел плоским безвихревым потоком (или о движении двух тел в безграничной жидкости) имеют такой же вид, как и в задаче Неймана для кругового кольца, причем в разложении $\partial\varphi / \partial\rho$ на контурах в тригонометрический ряд отсутствует свободный член, поэтому решение уравнения (5) ищем в виде [5]

$$\varphi = B_0 \vartheta + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \rho^m + A_{-m} \rho^{-m}) \cos m\vartheta + \sum_{m=1}^{\infty} (B_m \rho^m + B_{-m} \rho^{-m}) \sin m\vartheta \tag{6}$$

Задачу об определении потенциала скоростей будем решать в криволинейной координатной сетке, положение которой фиксируется таким образом, чтобы контуры цилиндров C_1 и C_2 определялись криволинейными координатами $\rho = 1$ и $\rho = \rho_2$.

1. Рассмотрим сперва случай плоско-параллельного движения двух тел в безграничном потоке. Мы ограничимся поступательным движением с равными векторами скоростей $\mathbf{V}$. В общем случае движения отношение $\rho_1 / \rho_2 = 1 / \rho_2$ будет некоторой функцией времени t. Потенциал скоростей φ удовлетворяет уравнению (5) и следующим граничным условиям:

На контурах цилиндров имеем условия непроницаемости

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{1}{H_\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = V_x \cos(\rho, x) + V_y \cos(\rho, y) \tag{7}$$

так как

$$\text{os}(\rho, x) = \frac{1}{H_\rho} \frac{\partial x}{\partial \rho}, \qquad \cos(\rho, y) = \frac{1}{H_\rho} \frac{\partial y}{\partial \rho} \qquad \left(\frac{1}{H_\rho} \neq 0, \quad H_\rho = |\omega'(\zeta)|\right) \tag{8}$$

то, подставляя (8) в (7), получим

при $\rho = \rho_1 = 1$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = V_x \frac{\partial y}{\partial \vartheta} - V_y \frac{\partial x}{\partial \vartheta} = \mu_1(\vartheta) = \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_m^{(1)} \cos m\vartheta + \beta_m^{(1)} \sin m\vartheta) \tag{9}$$

при $\rho = \rho_2$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho_2} \left(V_x \frac{\partial y}{\partial \vartheta} - V_y \frac{\partial x}{\partial \vartheta}\right) = \mu_2(\vartheta) = \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_m^{(2)} \cos m\vartheta + \beta_m^{(2)} \sin m\vartheta) \tag{10}$$

$\mu_1(\vartheta)$ и $\mu_2(\vartheta)$ могут быть легко найдены, если задана отображающая функция (1).

Постоянные в рядах (9) и (10) отсутствуют; в этом нетрудно убедиться, разложив $\omega(\zeta) = x(\rho, \vartheta) + iy(\rho, \vartheta)$ в ряд Фурье при $\rho = 1$ и $\rho = \rho_2$.

Подставляя (6) в (9) и (10), сравнивая коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях, получим две системы двух уравнений с двумя неизвестными, определяющие A_m, A_{-m}, B_m, B_{-m}.

Для потенциала скоростей получим

$$\varphi = B_0 \vartheta + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\alpha_m^{(1)} \rho_2^{-m-1} - \alpha_m^{(2)}) \rho^m + (\alpha_m^{(1)} \rho_2^{m-1} - \alpha_m^{(2)}) \rho^{-m}}{m (\rho_2^{-m-1} - \rho_2^{m-1})} \cos m\vartheta +$$
$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\beta_m^{(1)} \rho_2^{-m-1} - \beta_m^{(2)}) \rho^m + (\beta_m^{(1)} \rho_2^{m-1} - \beta_m^{(2)}) \rho^{-m}}{m (\rho_2^{-m-1} - \rho_2^{m-1})} \sin m\vartheta = B_0 \vartheta + \varphi_0(\rho, \vartheta) \tag{11}$$

Очевидно, нахождение $\varphi_0(\rho, \vartheta)$ свелось к решению задачи Неймана для кругового кольца [2]. Функция $\varphi_0(\rho, \vartheta)$, представленная рядом (11), — гармоническая в кольце $(1, \rho_2)$, следовательно, она однозначна и непрерывна вместе со своими производными до второго порядка включительно. Постоянная B_0 определяется заданием циркуляции на одном из контуров; при $\rho = 1$

$$\Gamma = \int\limits_{s} \frac{\partial \varphi}{\partial s}\, ds = \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta}\, d\vartheta = 2\pi B_0 \quad \text{или} \quad B_0 = \frac{\Gamma}{2\pi} \tag{12}$$

При решении задачи о движении двух тел в безграничной жидкости скорости, соответствующие выбранному потенциалу φ, должны на бесконечности обращаться в нуль. Проверим, выполняется ли это условие. Пусть точке λ области Σ соответствует бесконечно удаленная точка области S. Так как отображение (1) взаимно однозначно, то функция $\zeta = F(z)$ совершает конформное отображение двухсвязной области S на круговое кольцо Σ. Известно, что изолированную особую точку $\zeta = \lambda$ (полюс) функции $\omega(\zeta)$ определяет точка скрещивания ($\partial F / \partial z = 0$) обратной функции [4], так что при $|z| \to \infty$

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{1}{\omega'(\zeta)} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = 0 \quad (\text{при } \zeta = \rho e^{i\vartheta}) \tag{13}$$

Докажем теперь, что скорости, соответствующие потенциалу φ, определяемому по формуле (13), действительно равны на бесконечности нулю, т. е. при $|z| \to \infty$

$$V_x^{\infty} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta}\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 0, \quad V_y^{\infty} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta}\frac{\partial \vartheta}{\partial y} = 0 \tag{14}$$

Так как $\varphi(\rho, \vartheta)$ — функция, гармоническая в кольце, то $\partial\varphi / \partial\rho$, $\partial\varphi / \partial\vartheta$ принимают во всех точках кольца (а следовательно, и области S), включая точку $\zeta = \lambda$ конечные значения, и на основании (13) нетрудно убедиться в справедливости соотношений (14).

2. Аналогично решается задача о потенциальном обтекании двух цилиндров потоком, проекции скорости которого на оси равны на бесконечности V_x^{∞}, V_y^{∞}.

Будем искать φ в виде

$$\varphi = V_x^{\infty} x + V_y^{\infty} y + \varphi_1 \tag{15}$$

где φ_1 удовлетворяет уравнению (5) и ищется в виде (6). Постоянные

$$A_m,\ A_{-m},\ B_m,\ B_{-m}$$

определяются из граничных условий. На контурах цилиндров

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{1}{H_\rho}\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = 0, \quad \text{при } \rho = 1 \text{ и } \rho = \rho_2 \tag{16}$$

Подставляя (15) в (16), получим

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \rho} = -V_x^{\infty}\frac{\partial y}{\partial \vartheta} + V_y^{\infty}\frac{\partial x}{\partial \vartheta} \quad \text{при } \rho = 1 \tag{17}$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho_2}\left(-V_x^{\infty}\frac{\partial y}{\partial \vartheta} + V_y^{\infty}\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\right) \quad \text{при } \rho = \rho_2 \tag{18}$$

Сравнивая (17) и (18) с (9) и (10), приходим к выводу, что нахождение φ_1 идентично предыдущей задаче, только V_x и V_y следует заменить на $-V_x^{\infty}, -V_y^{\infty}$, причем, согласно вышеизложенному, скорости, соответствующие φ_1, равны на бесконечности нулю. Зная $\varphi(\rho, \vartheta)$, нетрудно найти проекции вектора скорости на направления ρ и ϑ в любой точке

$$V_\rho = \frac{1}{H_\rho}\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = \frac{1}{|\omega'(\zeta)|}\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}, \qquad V_\vartheta = \frac{1}{H_\vartheta}\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} = \frac{1}{\rho\,|\omega'(\zeta)|}\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \tag{19}$$

Из формул (19) видно, что задача решена в криволинейных координатах, получаемых при конформном отображении кругового кольца на заданную область.

Поступила 16 VI 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. С е д о в Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. Гостехтеоретиздат, 1950.
2. К а н т о р о в и ч Л. В., К р ы л о в В. И. Методы приближенного решения уравнений в частных призводных. Гостехтеоретиздат, 1949.
3. С м и р н о в В. И. Курс высшей математики, Гостехтеоретиздат, т. 3, ч. 2, 1949.
4. К у р а н т Р. Геометрическая теория функций комплексной переменной. ОНТИ, 1934.
5. S. C i s o t t i U. Jdromeccanica piana p. I, Milan, 1921.