

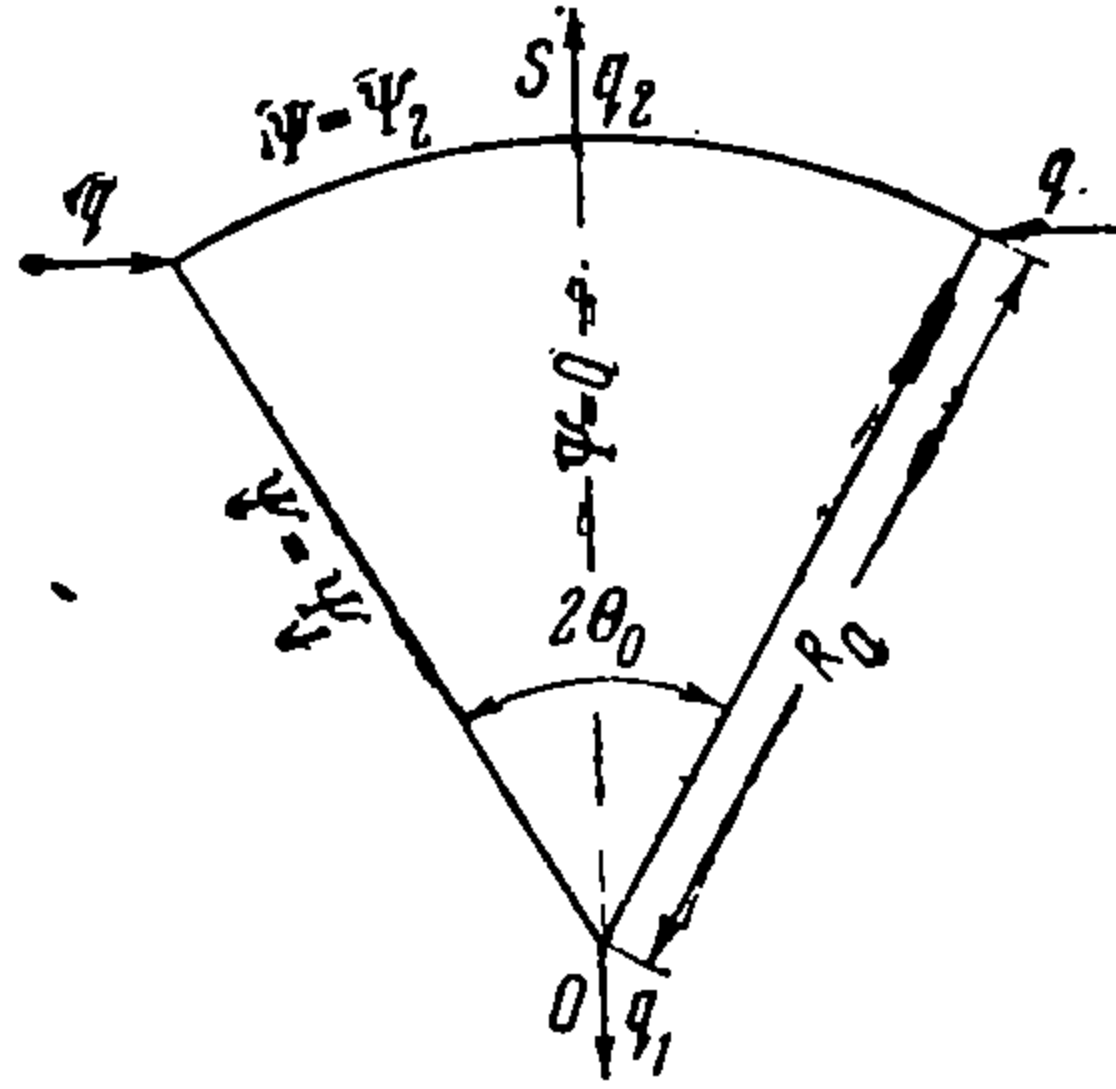
ОДНОРОДНОЕ ВИНТОВОЕ ДВИЖЕНИЕ В КОНУСЕ

С. А. Бостанджиян

(Москва)

Рассматривается задача об однородном винтовом движении в конусе конечных размеров (такая задача для бесконечного конуса ставилась О. Ф. Васильевым [1]).

Будем считать, что жидкость идеальная, несжимаемая, поток внутри конуса является однородным винтовым, симметричным относительно оси конуса. Через кольцевую щель жидкость поступает в конус в количестве q единиц в секунду, а через вершину и через точку S вытекает в количестве q_1 и q_2 единиц, соответственно.



Фиг. 1

Длина образующей конуса равна R_0 , половина угла при вершине θ_0 . Сверху конус ограничен сферической поверхностью радиуса R_0 , имеющей на оси конуса отверстие S , через которое вытекает жидкость (фиг. 1). Такая схема приближенно отражает принцип действия гидроциклона.

Задача приводится к решению неоднородного дифференциального уравнения [1]

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + k^2 \psi = -kC \quad (k, C = \text{const}) \quad (1)$$

в области $0 \leq r \leq R_0$, $0 \leq \theta \leq \theta_0$ при граничных условиях

$$\psi(r, 0) = 0, \quad \psi(r, \theta_0) = \psi_1, \quad \psi(R_0, \theta) = \psi_2 \quad \left(\psi_1 = -\frac{q_1}{2\pi}, \quad \psi_2 = +\frac{q_2}{2\pi} \right) \quad (2)$$

Вместо функции тока $\psi(r, \theta)$ введем новую функцию $u(r, \theta)$, связанную с $\psi(r, \theta)$ соотношением

$$u(r, \theta) = \psi(r, \theta) - \psi_1 \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta_0} \quad (3)$$

Уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + k^2 u = -kC - \frac{\psi_1}{\sin^2 \theta_0} \left(k^2 - \frac{2}{r^2} \right) \sin^2 \theta \quad (4)$$

Для функции $u(r, \theta)$ граничные условия примут вид

$$u(r, 0) = 0, \quad u(r, \theta_0) = 0, \quad u(R_0, \theta) = \psi_2 - \psi_1 \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta_0} \quad (5)$$

Функцию $u(r, \theta)$ будем искать в виде ряда

$$u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} M_n(r) N_n(\theta) \quad (6)$$

расположенного по собственным функциям $N_n(\theta)$. Определим вид собственных функций. Разделяя переменные в однородном уравнении, соответствующем неоднородному уравнению (4), для определения функции $N(\theta)$ получим дифференциальное уравнение

$$\sin \theta \left(\frac{1}{\sin \theta} N' \right)' + \nu(\nu+1) N = 0 \quad (7)$$

которое подстановкой $x = \cos \theta$ приводится к виду

$$\frac{d^2 N}{dx^2} + \frac{\nu(\nu+1)}{1-x^2} N = 0$$

Общий интеграл этого уравнения при ν , не равном нулю или целому отрицательному числу, записывается так:

$$N_\nu(x) = \sqrt{1-x^2} [A_\nu P_\nu^1(x) + B_\nu Q_\nu^1(x)]$$

или, переходя к переменной θ ,

$$N_\nu(\theta) = \sin \theta [A_\nu P_\nu^1(\cos \theta) + B_\nu Q_\nu^1(\cos \theta)]$$

где $P_\nu^1(\cos \theta)$ и $Q_\nu^1(\cos \theta)$ — присоединенные функции Лежандра.

Поскольку функция $u(r, \theta)$ при $\theta = 0$ обращается в нуль, а произведение $Q_{\nu}^1(\cos \theta) \sin \theta$ при $\theta \rightarrow 0$ стремится к постоянной, то для удовлетворения граничного условия на оси должны положить $B_{\nu} = 0$.

Для удовлетворения граничного условия на боковой поверхности конуса необходимо выполнение условия $P_{\nu}^1(\cos \theta_0) = 0$; из этого трансцендентного уравнения определяются собственные числа ν_n .

Собственными функциями рассматриваемой краевой задачи являются функции

$$N_n(\theta) = \sin \theta P_{\nu_n}^1(\cos \theta)$$

Умножая обе части (6) на $\rho(\theta) N_n(\theta) d\theta$, где $\rho(\theta)$ — весовая функция, и интегрируя в пределах от 0 до θ_0 , получим

$$M_n(r) = \frac{1}{N_n^2} \int_0^{\theta_0} u(r, \theta) \rho(\theta) N_n(\theta) d\theta \quad \left(N_n^2 = \int_0^{\theta_0} \rho(\theta) [N_n(\theta)]^2 d\theta \right) \quad (8)$$

где N_n^2 — норма собственных функций. Из уравнения (7) видно, что $\rho(\theta) = \cos \theta$.

Для определения коэффициентов ряда $M_n(r)$ умножим уравнение (4) на

$$N_n^{-2} \rho(\theta) \sin \theta P_{\nu_n}^1(\cos \theta) d\theta$$

и проинтегрируем от 0 до θ_0 ; используя первые два условия (5) и (8), получим

$$\frac{d^2 M_n}{dr^2} + \left[k^2 - \frac{\nu_n(\nu_n + 1)}{r^2} \right] M_n = - (kC\alpha_n + k^2\psi_1\beta_n) + \psi_1\beta_n \frac{2}{r^2} \quad (9)$$

Здесь и в дальнейшем введены обозначения

$$\alpha_n = \frac{1}{N_n^2} \int_0^{\theta_0} P_{\nu_n}'(\cos \theta) d\theta, \quad \beta_n = \frac{1}{\sin^2 \theta_0 N_n^2} \int_0^{\theta_0} \sin^2 \theta P_{\nu_n}^1(\cos \theta) d\theta \quad (10)$$

Функция $M_n(r)$ подчинена граничным условиям:

- 1) при $r \rightarrow 0$ функция $M_n(r)$ должна быть конечной величиной
- 2) при $r = R_0$, согласно (8), (10) и третьему условию (5)

$$M_n(R_0) = \alpha_n \psi_2 - \beta_n \psi_1 \quad (11)$$

Уравнение (9) заменой $M_n(r) = \sqrt{r} L_n(r)$ и $z = kr$ приводится к виду

$$\frac{d^2 L_n}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dL_n}{dz} + \left[1 - \frac{(\nu_n + 1/2)^2}{z^2} \right] L_n = - \left(\frac{C\alpha_n}{k} + \psi_1\beta_n \right) k^{1/2} z^{-1/2} + 2\psi_1 k^{1/2} \beta_n z^{-3/2}$$

Общее решение этого уравнения записывается так [2]

$$L_n(z) = A_n J_{\mu_n}(z) + B_n J_{-\mu_n}(z) - \left(\frac{C\alpha_n}{k} + \psi_1\beta_n \right) k^{1/2} s_{1/2, \mu_n}(z) + 2\psi_1 \beta_n k^{1/2} s_{-3/2, \mu_n}(z) \quad (12)$$

где $s_{\mu, \nu}(z)$ — функция Ломмеля; для краткости введено обозначение $\mu_n = \nu_n + 1/2$

$$s_{\mu, \nu}(z) = \frac{z^{\mu+1}}{(\mu+1)^2 - \nu^2} - \frac{z^{\mu+3}}{[(\mu+1)^2 - \nu^2][(\mu+3)^2 - \nu^2]} + \dots =$$

$$= z^{\mu-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma\left(\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu + m + \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu + m + \frac{3}{2}\right)} \left(\frac{1}{2}z\right)^{2m+2}$$

Перейдем в (12) к функции $M_n(z)$ и к переменной r

$$M_n(r) = A_n \sqrt{r} J_{\mu_n}(kr) + B_n \sqrt{r} J_{-\mu_n}(kr) -$$

$$- \left(\frac{C\alpha_n}{k} + \psi_1\beta_n \right) \sqrt{kr} s_{1/2, \mu_n}(kr) + 2\psi_1 \beta_n \sqrt{kr} s_{-3/2, \mu_n}(kr)$$

При $\nu_n > 0$ функция

$$\sqrt{r} J_{-\mu_n}(kr) \rightarrow -\infty, \text{ при } r \rightarrow 0$$

Поэтому нужно положить $B_n = 0$. Используя условие (11), определяем постоянную интегрирования

$$A_n = \frac{1}{\sqrt{R_0} J_{\mu_n}(kR_0)} \left[\alpha_n \psi_2 - \beta_n \psi_1 + \left(\frac{C\alpha_n}{k} + \beta_n \psi_1 \right) \sqrt{kR_0} s_{1/2, \mu_n}(kR_0) - \right. \\ \left. - 2\psi_1 \beta_n \sqrt{kR_0} s_{-1/2, \mu_n}(kR_0) \right]$$

Теперь можно выписать окончательное выражение для функции тока

$$\psi(r, \theta) = \varphi_1 \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta_0} + \\ + \psi_1 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\alpha_n \frac{\psi_2}{\psi_1} - \beta_n (1 + 2\sqrt{kR_0} s_{-1/2, \mu_n}(kR_0) - \sqrt{kR_0} s_{1/2, \mu_n}(kR_0)) \right] \sqrt{\frac{r}{R_0}} \frac{J_{\mu_n}(kr)}{J_{\mu_n}(kR_0)} + \right. \\ \left. + \beta_n \sqrt{kr} (2s_{-1/2, \mu_n}(kr) - s_{1/2, \mu_n}(kr)) \right\} \sin \theta P_{\nu_n}^1(\cos \theta) + \\ + \frac{C}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left[\sqrt{kR_0} s_{1/2, \mu_n}(kR_0) \sqrt{\frac{r}{R_0}} \frac{J_{\mu_n}(kr)}{J_{\mu_n}(kR_0)} - \sqrt{kR_0} s_{1/2, \mu_n}(kr) \right] \sin \theta P_{\nu_n}^1(\cos \theta) \quad (13)$$

Составляющие скорости выражаются через $\psi(r, \theta)$ по формулам

$$v_\varphi = \frac{C + k\psi}{r \sin \theta}, \quad v_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

Из первой формулы видно, что окружная скорость на оси конуса при $C \neq 0$ обращается в бесконечность. Это объясняет образование воздушного столба у оси конуса, что в действительности наблюдается в гидроциклоне.

Введя безразмерные величины $\rho = r/R_0$, $\kappa = kR_0$, $\gamma = \psi_2/\psi_1$, формулу (13) можно переписать в более удобной для расчетов форме

$$\frac{\psi(\rho, \theta)}{\psi_1} = \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\alpha_n \gamma - \beta_n (1 + 2\sqrt{\kappa} s_{-1/2, \mu_n}(\kappa) - \sqrt{\kappa} s_{1/2, \mu_n}(\kappa)) \right] \sqrt{\rho} \frac{J_{\mu_n}(\kappa\rho)}{J_{\mu_n}(\kappa)} + \right. \\ \left. + \beta_n \sqrt{\kappa\rho} (2s_{-1/2, \mu_n}(\kappa\rho) - s_{1/2, \mu_n}(\kappa\rho)) \right\} \sin \theta P_{\nu_n}^1(\cos \theta) + \\ + \frac{c}{k\psi_1} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left[\sqrt{\kappa} s_{1/2, \mu_n}(\kappa) \sqrt{\rho} \frac{J_{\mu_n}(\kappa\rho)}{J_{\mu_n}(\kappa)} - \sqrt{\kappa\rho} s_{1/2, \mu_n}(\kappa\rho) \right] \sin \theta P_{\nu_n}^1(\cos \theta) \quad (14)$$

Если в найденном решении перейти к пределу при $k \rightarrow 0$, то получим решение задачи о потенциальном движении жидкости в конусе. Для получения такого решения можно было бы положить $k = 0$ в (9), а затем из полученного дифференциального уравнения определить функцию $M_n(r)$. Оба пути приводят к одному и тому же результату, а именно

$$\frac{\psi(\rho, \theta)}{\psi_1} = \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\alpha_n \gamma - \beta_n + \frac{2\beta_n}{\nu_n(\nu_n + 1)} \right] \rho^{\nu_n + 1} - \frac{2\beta_n}{\nu_n(\nu_n + 1)} \right\} \sin \theta P_{\nu_n}^1(\cos \theta). \quad (15)$$

Из (14) можно получить также решение задачи в других частных случаях. Так, $\gamma = 0$ соответствует отсутствию отверстия в точке S , а $\gamma = 1$ соответствует отсутствию кольцевой щели. Остается указать способ определения собственных чисел ν_n и вычислить N_n^2 , α_n , β_n .

При целых m справедлива формула

$$P_\nu^m(\cos \theta) = (-1)^m \frac{\Gamma(\nu + m + 1)}{\Gamma(\nu - m + 1)} P_\nu^{-m}(\cos \theta)$$

Из этой формулы видно, что функции $P_\nu^1(\cos \theta)$ и $P_\nu^{-1}(\cos \theta)$ имеют одни и те же корни ν_n . Способ определения корней уравнения $P_\nu^{-1}(\cos \theta_0) = 0$ изложен в работе Макдональда [3].

При малых θ_0 для определения корней трансцендентного уравнения $P_\nu^{-1}(\cos \theta_0) = 0$ можно пользоваться следующей приближенной формулой

$$\nu_n + \frac{1}{2} = \frac{x_n}{2 \sin^{1/2} \theta_0} \left[1 - \frac{1}{6} \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \left(1 - \frac{3}{x_n^2} \right) \right]$$

где x_n есть n -ый, отличный от нуля корень уравнения $J_1(x) = 0$.

Если же θ_0 не мало, то для этой же цели можно пользоваться формулой [3]

$$\nu_n + \frac{1}{2} = x_n + \frac{b_1}{\theta_0(1 + x_n)} + \frac{b_2}{\theta_0(1 + x_n)(2 + x_n)} - \frac{a_1 b_1}{\theta_0(1 + x_n)^2} + \dots \quad (16)$$

где

$$x_n = \frac{\pi}{2\theta_0} \left(2n + m + \frac{3}{2} \right)$$

$$a_1 = \frac{1^2 - 4m^2}{2^2} \frac{\cos(1/2\pi - \theta_0)}{2 \sin \theta_0},$$

$$b_1 = \frac{1^2 - 4m^2}{2^2} \frac{\sin(1/2\pi - \theta_0)}{2 \sin \theta_0}$$

$$a_2 = \frac{(1^2 - 4m^2)(3^2 - 4m^2)}{2^4 (2 \sin \theta_0)^2 2!} \cos(\pi - 2\theta_0),$$

$$b_2 = \frac{(1^2 - 4m^2)(3^2 - 4m^2)}{2^4 (2 \sin \theta_0)^2 2!} \sin(\pi - 2\theta_0), \dots$$

В рассматриваемом случае $m = 1$. Путем несложных вычислений находим, что

$$N_n^2 = - \frac{\sin \theta_0 P_{\nu_n}(\cos \theta_0)}{2\nu_n + 1} \nu_n (\nu_n + 1) \frac{\partial P_{\nu_n}^{-1}(\cos \theta_0)}{\partial \nu_n} \quad (17)$$

$$\alpha_n = \frac{P_{\nu_n}(\cos \theta_0) - 1}{N_n^2}, \quad \beta_n = \frac{(\nu_n + 1) P_{\nu_n - 1}^{-1}(\cos \theta_0)}{\sin \theta_0 (\nu_n + 2) (\nu_n - 1) N_n^2}.$$

Для вычисления производной $\partial P_{\nu_n}^{-1}(\cos \theta_0) / \partial \nu_n$ рассмотрим тождество

$$P_{\nu_n}^{-1}(\cos \theta) = 0$$

Считая левую часть функцией от θ и ν_n , найдем полный дифференциал

$$\frac{\partial P_{\nu_n}^{-1}(\cos \theta)}{\partial \nu_n} d\nu_n + \frac{\partial P_{\nu_n}^{-1}(\cos \theta)}{\partial \theta} d\theta = 0$$

Отсюда имеем

$$\frac{\partial P_{\nu_n}^{-1}(\cos \theta_0)}{\partial \nu_n} = - \frac{\partial P_{\nu_n}^{-1}(\cos \theta)}{\partial \theta} \frac{1}{d\nu_n / d\theta} \Big|_{\theta=\theta_0}$$

Используя рекуррентную связь

$$\sin \theta \frac{dP_{\nu_n}^{-1}(\cos \theta)}{d\theta} = - \nu_n (\nu_n + 1) \sin \theta P_{\nu_n}(\cos \theta) - \cos \theta P_{\nu_n}^{-1}(\cos \theta)$$

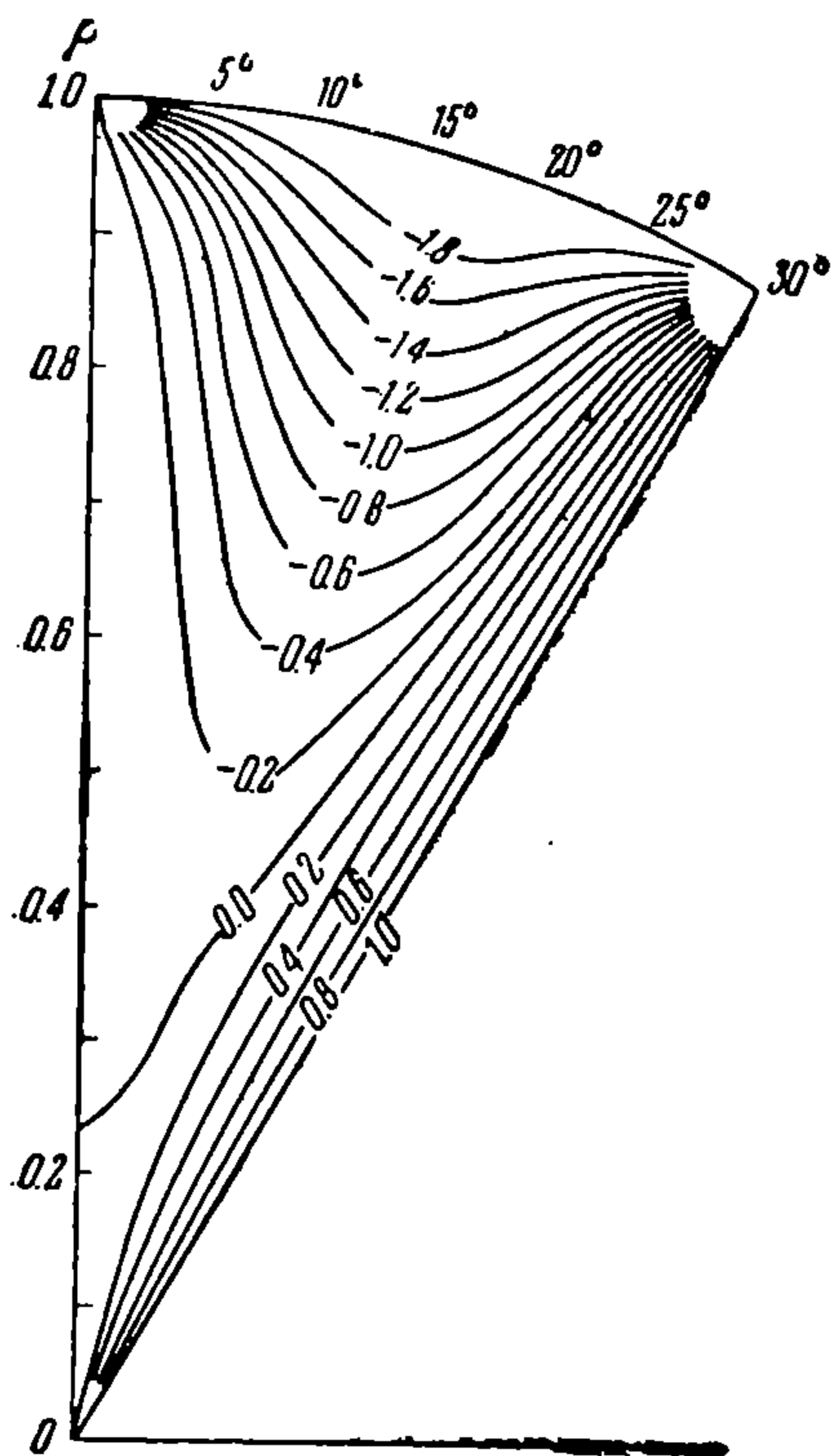
учитывая, что $P_{\nu_n}^{-1}(\cos \theta_0) = 0$, получаем

$$\frac{dP_{\nu_n}^{-1}(\cos \theta)}{d\theta} \Big|_{\theta=\theta_0} = - \nu_n (\nu_n + 1) P_{\nu_n}(\cos \theta_0)$$

Формула (16) дает ν_n как функцию от θ , для этого в ней нужно θ_0 заменить через θ и учесть, что x_n, a_1, b_1, \dots , в свою очередь, зависят от θ . Теперь, в силу (17),

$$N_n^2 = - \sin \theta_0 \frac{\nu_n^2 (\nu_n + 1)^2}{2\nu_n + 1} [P_{\nu_n}(\cos \theta_0)]^2 \frac{1}{d\nu_n / d\theta} \Big|_{\theta=\theta_0} \quad (18)$$

Протабулированы только присоединенные функции Лежандра с целыми индексами. А в рассматриваемой задаче нижний индекс этих функций может быть любым числом. Вычислять эти функции с помощью гипергеометрических рядов, через которые они выражаются, не представляется возможным вследствие слабой сходимости этих рядов. При нецелых ν_n функции $P_{\nu_n}^{-1}(\cos \theta)$ можно вычислить интерполированием, например при помощи парабол.



Фиг. 2

Расчеты значительно упрощаются, если воспользоваться асимптотическим представлением функции $P_{\nu_n}^{-1}(\cos \theta)$ и $P_{\nu_n}(\cos \theta)$ при больших ν_n . В работе [4] выведены асимптотические формулы

$$P_l^m(\cos \theta) = \left(l + \frac{1}{2}\right)^m \left(\frac{\theta}{\sin \theta}\right)^{1/2} J_{-m} \left[\left(l + \frac{1}{2}\right) \theta\right]$$

$$P_l(\cos \theta) = \left(\frac{\theta}{\sin \theta}\right)^{1/2} J_0 \left[\left(l + \frac{1}{2}\right) \theta\right]$$

Хорошие результаты получаются уже при $l=10$. При $l = \nu_n$ и $m=1$ имеем

$$P_{\nu_n}^{-1}(\cos \theta) = -\mu_n \left(\frac{\theta}{\sin \theta}\right)^{1/2} J_1(\mu_n \theta) \quad (19)$$

$$P_{\nu_n}(\cos \theta) = \left(\frac{\theta}{\sin \theta}\right)^{1/2} J_0(\mu_n \theta)$$

Из первой формулы видно, что ν_n можно определить из простого соотношения

$$\left(\nu_n + \frac{1}{2}\right) \theta_0 = x_n \quad (20)$$

где x_n — n -ый, отличный от нуля корень уравнения $J_1(x) = 0$.

Если воспользоваться выражением (19) для $P_{\nu_n}^{-1}(\cos \theta)$, то для N_n^2 получаем

$$N_n^2 = \mu_n^2 \int_0^{\theta_0} \theta J_1^2(\mu_n \theta) d\theta = \mu_n^2 \frac{\theta_0^2}{2} J_0^2(\mu_n \theta_0)$$

Для больших аргументов справедлива асимптотическая формула

$$J_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Принимая во внимание это выражение и то обстоятельство, что в точках $\mu_n \theta_0$ функция $J_0(\mu_n \theta_0)$ достигает экстремума, получаем очень простую формулу

$$N_n^2 = \mu_n \frac{\theta_0}{\pi} \quad (21)$$

Относительная ошибка в вычислении величины N_n^2 для первого корня по формулам (18) и (21) при наибольшем угле, представляющем интерес для практики, $\theta_0 = 1/6\pi$ не превышает 3%. С увеличением номера корня эта ошибка уменьшается, она уменьшается также с уменьшением угла θ_0 .

Разница в величинах ν_n , вычисленных по формулам (16) и (20) при $\theta_0 = 1/6\pi$, обнаруживается в третьем десятичном знаке после запятой. Все это подтверждает то, что при расчетах можно пользоваться формулами (19) — (21). При помощи формул (19) и (21) можно упростить выражение (14) для функции тока

$$\begin{aligned} \frac{\psi(\rho, \theta)}{\psi_1} = & \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta_0} \frac{\pi}{\theta_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ [a_n \lambda - b_n (1 + 2\sqrt{\kappa} s_{-1/2, \mu_n}(\kappa) - \sqrt{\kappa} s_{1/2, \mu_n}(\kappa))] \sqrt{\rho} \frac{J_{\mu_n}(\kappa \rho)}{J_{\mu_n}(\kappa)} + \right. \\ & \left. + b_n \sqrt{\kappa \rho} (2s_{-1/2, \mu_n}(\kappa \rho) - s_{1/2, \mu_n}(\kappa \rho)) \right\} \sqrt{\theta \sin \theta} J_1(\mu_n \theta) - \\ & - \frac{C}{k \psi_1} \frac{\pi}{\theta_0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\sqrt{\kappa} s_{1/2, \mu_n}(\kappa) \sqrt{\rho} \frac{J_{\mu_n}(\kappa \rho)}{J_{\mu_n}(\kappa)} - \sqrt{\kappa \rho} s_{1/2, \mu_n}(\kappa \rho) \right] \sqrt{\theta \sin \theta} J_1(\mu_n \theta) \quad (22) \end{aligned}$$

Здесь

$$a_n = \left(\frac{\theta_0}{\sin \theta_0} \right)^{1/2} J_0(\mu_n \theta_0) - 1$$

$$b_n = - \frac{(v_n + 1)(v_n - 1/2)}{(v_n + 2)(v_n - 1) \sin \theta_0} \left(\frac{\theta_0}{\sin \theta_0} \right)^{1/2} J_1 \left[\left(v_n - \frac{1}{2} \right) \theta_0 \right]$$

При помощи этих формул были проделаны расчеты при следующих входных данных: $\theta_0 = 1/6 \pi$, $\kappa = 4$, $C/k\psi_1 = -4$, $\gamma = -2$. На основании полученных результатов построены линии тока (фиг. 2). На фигуре видно, что полученные поверхности тока правильно отражают картину движения частиц жидкости в гидроциклоне.

С ростом параметра $C/k\psi_1$ по абсолютной величине линия раздела опускается, а вблизи крышки образуются замкнутые линии тока — застойная зона. В этой зоне жидкость циркулирует, не выходя из конуса.

Следует отметить, что ряды (22) сходятся быстро примерно до $\rho = 0.9$, а при $\rho > 0.9$ сходимость слабая и тем слабее, чем ближе к крышке.

Поступила 4 III 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. В а с и л ь е в О. Ф. Основы механики винтовых и циркуляционных потоков. Госэнергоиздат, М.—Л., 1958.
2. В а т с о н Г. Н. Теория бесселевых функций, ч. 1. ИИЛ, 1949.
3. M a s d o n a l d Н. М. Zeroes of the spherical harmonics $P_n^m(\mu)$ considered as a function of n . The London Mathematical Society. Proceedings, 1899, vol. XXXI.
4. М у р а д я н Р. М. Асимптотические формулы для обобщенных функций Лежандра и функций Гегенбауэра. ДАН, 1957, т. 115, № 5.

О РЕШЕНИИ ПЛОСКОЙ БЕЗВИХРЕВОЙ ЗАДАЧИ ГИДРОДИНАМИКИ ДЛЯ ДВУХСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

Н. В. Курдюмова

(Ленинград)

Случай плоского движения и обтекания одного тела, когда внешность или внутренность круга конформно отображается на внешность контура тела, подробно рассмотрен в литературе и не вызывает особых математических затруднений. Значительно сложнее решается задача о плоском течении в двухсвязных областях; даже при условии, что известна функция, конформно отображающая круговое кольцо Σ радиусов ρ_1 и ρ_2 на двухсвязную область S , занятую потоком (мы предполагаем, что область S содержит бесконечно удаленную точку), решение довольно громоздко. Покажем, что коль скоро известна функция

$$z = \omega(\zeta) \quad (z = x + iy, \zeta = \rho e^{i\vartheta}) \quad (1)$$

дающая конформное отображение кругового кольца на внешность двух заданных контуров, потенциал скоростей φ может быть найден непосредственно.

Полагаем, что контуры C_1 области S соответствует окружность радиуса $\rho = 1$ области Σ . Отношение радиусов $\rho_1/\rho_2 = 1/\rho_2$ определяется геометрическим видом области S .

Отделяя в (1) вещественную часть от мнимой, получим $x = x(\rho, \vartheta)$, $y = y(\rho, \vartheta)$, где ρ и ϑ — криволинейные координаты в области S . Потенциал скоростей φ удовлетворяет уравнению Лапласа, которое в криволинейных координатах имеет вид

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{H_\vartheta}{H_\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{H_\rho}{H_\vartheta} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right) = 0 \quad (2)$$

Здесь H_ρ и H_ϑ — параметры Ляме в направлении ρ и ϑ (под направлением ρ подразумевается направление нормали к кривой $\rho = \text{const}$ в сторону увеличения ρ);

$$H_\rho^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho} \right)^2, \quad H_\vartheta^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \vartheta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \vartheta} \right)^2 \quad (3)$$