ПЛОСКО-ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ТЕЧЕНИЕ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В СЛЕДЕ ЗА ТЕЛОМ

В. Н. Архипов

(Москва)

Пусть плоско-параллельный поток вязкой сжимаемой жидкости набегает со скоростью $u_\infty = \text{const}$ на неподвижное тело, симметричное относительно направления потока. На большом расстоянии от тела в следе давление приблизительно постоянно по поперечному сечению следа, поперечная скорость мала по сравнению с продольной, а быстрота изменения продольной скорости вдоль оси следа мала сравнительно с быстротой изменения ее по сечению. Кроме того, в неограниченной жидкости градиент давления вдоль оси следа пренебрежимо мал. Тогда имеем следующие основные уравнения:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right) \quad \left(\begin{matrix}\text{уравнение} \\ \text{движения}\end{matrix}\right) \tag{1}$$

$$\rho u \frac{\partial (C_p t)}{\partial x} + \rho v \frac{\partial (C_p t)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial t}{\partial y}\right) + \frac{\mu}{J}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \quad \left(\begin{matrix}\text{уравнение} \\ \text{энергии}\end{matrix}\right) \tag{2}$$

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} = 0 \quad \left(\begin{matrix}\text{уравнение} \\ \text{неразрывности}\end{matrix}\right) \tag{3}$$

$$\rho t = \rho_\infty t_\infty \ (\text{уравнение состояния}) \tag{4}$$

Здесь координата x отсчитывается вдоль оси симметрии, u, v — составляющие скорости жидкости вдоль осей координат, ρ — плотность жидкости, μ — вязкость, t — температура, C_p — теплоемкость при постоянном давлении, k — коэффициент теплопроводности, J — механический эквивалент тепла. Индексом ∞ обозначаются параметры невозмущенного потока. Предположим, что

$$C_p = \text{const}, \qquad Pr = \frac{C_p \mu}{k} = 1, \qquad \frac{\mu}{\mu_\infty} = \left(\frac{t}{t_\infty}\right)^m \qquad (m = \text{const}) \tag{5}$$

В таком случае уравнение энергии допускает интеграл (Крокко):

$$t = A + Bu - \frac{u^2}{2C_p J} \tag{6}$$

где A, B — неопределенные постоянные. Введем функцию тока по формулам

$$u = \frac{\rho_\infty}{\rho}\frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\rho_\infty}{\rho}\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

и перейдем от переменных x, y к переменным x, ψ. Имеем

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_x = \frac{\rho u}{\rho_\infty}\left(\frac{\partial}{\partial \psi}\right)_x, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_y = -\frac{\rho v}{\rho_\infty}\left(\frac{\partial}{\partial \psi}\right)_x + \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_\psi$$

Тогда уравнение (1) примет вид

$$\rho_\infty \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \psi}\left(\mu u \frac{\rho}{\rho_\infty}\frac{\partial u}{\partial \psi}\right) \tag{7}$$

На большом расстоянии от тела в следе $u \approx u_\infty + u_1$, $v \approx v_1$, где u_1, v_1 малы. Ограничиваясь главными членами, имеем вместо (7)

$$\rho_\infty \frac{\partial u_1}{\partial x} = u_\infty \frac{\partial}{\partial \psi}\left(\frac{\mu\rho}{\rho_\infty}\frac{\partial u_1}{\partial \psi}\right) \tag{8}$$

Введем безразмерные величины по формулам

$$U_1 = \frac{u_1}{u_\infty}, \qquad T = \frac{t}{t_\infty}, \qquad X = \frac{x}{L}, \qquad \Psi = \frac{\psi}{\sqrt{u_\infty \nu_\infty L}} \qquad \left(\nu = \frac{\mu}{\rho}\right)$$

Здесь L — характерный размер. В силу (4) и (5)

$$\frac{\mu\rho}{\rho_\infty} = \mu_\infty T^{m-1}$$

Тогда (8) примет вид

$$\frac{\partial U_1}{\partial X}=\frac{\partial}{\partial \Psi}\left(T^{m-1}\frac{\partial U_1}{\partial \Psi}\right) \tag{9}$$

Это уравнение допускает аналитическое решение, если $m=1$. В этом случае

$$\frac{\partial U_1}{\partial X}=\frac{\partial^2 U_1}{\partial \Psi^2} \tag{10}$$

Граничные условия к уравнениям (1) — (4):

$$v=0,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=0 \quad \text{при } y=0, \qquad u\to u_\infty,\quad v\to 0,\quad t\to t_\infty \quad \text{при } y\to\pm\infty \tag{11}$$

Отсюда

$$U_1=0 \quad \text{при } \Psi=\infty, \qquad \frac{\partial U_1}{\partial \Psi}=0 \quad \text{при } \Psi=0 \tag{12}$$

если ось симметрии принять за линию тока $\psi=0$.

Окружим тело некоторым контрольным контуром AA_1B_1B таким, что AB и A_1B_1 расположены вдали от тела в невозмущенном потоке на расстоянии h от оси симметрии и параллельны направлению скорости невозмущенного потока, AA_1 расположена перед телом в невозмущенном потоке перпендикулярно к направлению его скорости, BB_1 параллельна AA_1 и расположена далеко за телом.

Полный поток импульса через контрольную поверхность равен

$$\int_{-h}^{h}\rho u u_1 dy$$

Если D — сопротивление на единицу ширины препятствия, то по теореме импульсов

$$D=\int_{-h}^{h}\rho u u_1 dy, \quad \text{или} \quad D=\int_{-\infty}^{\infty}\rho u u_1 dy\sim\int_{-\infty}^{\infty}U_1 d\Psi \tag{13}$$

Замена $\pm h$ на $\pm\infty$ допустима, так как $u_1=0$ при $|y|\geqslant h$.

Пусть

$$\zeta=\Psi/\sqrt{X}, \qquad U_1=CX^q g(\zeta) \tag{14}$$

где C, q — постоянные. Тогда

$$D\sim\int_{-\infty}^{\infty}X^q\sqrt{X}\,g(\zeta)\,d\zeta$$

Но D — величина постоянная; поэтому интеграл не должен зависеть от X. Следовательно, $q=-{}^1/_2$. Тогда согласно (14) имеем

$$U_1=CX^{-1/2}g(\zeta) \tag{15}$$

и вместо (10) получим

$$g''+\frac{1}{2}\zeta g'+\frac{1}{2}g=0 \tag{16}$$

Граничные условия

$$g'=0 \quad \text{при } \zeta=0, \qquad g\to 0 \quad \text{при } \zeta\to\infty \tag{17}$$

Проинтегрировав (16) два раза, с учетом граничных условий получаем

$$g=\exp\left(-\frac{1}{4}\zeta^2\right) \tag{18}$$

Постоянные A, B, C определяются из условия на бесконечности (11), уравнения (13), если D известно, и из теоремы об изменении энергии применительно к контуру AA_1B_1B. Температура t определится из формулы (6), а плотность ρ — из уравнения (4).

Аналогичная задача для несжимаемой жидкости была решена В. Тольмином [1].

Поступила 16 XI 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Tollmien W. Handb. d. Exper.— Physik, Band IV, Teil 1, 267, 1931, Leipzig.