

## О МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЯХ СМЕШАННОГО ТИПА

М. Н. К о г а н

(Москва)

В гидродинамике имеется лишь один тип смешанных течений, связанный с переходом от эллиптических дозвуковых течений к гиперболическим (сверхзвуковым).

Как будет показано ниже, в магнитной гидродинамике имеется несколько типов смешанных течений, описываемых как уравнением Трикоми  $\varphi_{1y} - y\varphi_{xx} = 0$ , так и существенно отличным от него по своим свойствам уравнением  $\varphi_{xx} - y\varphi_{yy} = 0$ . Краевые задачи для этих уравнений формулируются иначе, чем для уравнения Трикоми в обычной газодинамике, так как им удовлетворяют функции, имеющие иной физический смысл.

Ниже рассматриваются некоторые типы смешанных течений. Для каждого из них выведены уравнения и законы подобия. Приведены простые примеры смешанных течений в соплах.

§ 1. Уравнения магнитной гидродинамики для идеального газа с бесконечной электропроводностью имеют вид

$$\operatorname{div} \rho \mathbf{V} = 0, \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \operatorname{rot} (\mathbf{H} \times \mathbf{V}) = 0 \quad (1.1)$$

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\frac{\nabla p}{\rho} = \frac{1}{4\pi\rho} \mathbf{H} \times \operatorname{rot} \mathbf{H} \quad \frac{\rho}{\rho^y} = \text{const} \quad (1.2)$$

Здесь  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{V}$  — векторы магнитного поля и скорости,  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность и  $\kappa$  — отношение удельных теплоемкостей.

При  $\mathbf{V} \parallel \mathbf{H}$  из первых двух уравнений (1.1) следует

$$\frac{H}{\rho V} = \frac{H_x}{\rho V_x} = \frac{H_y}{\rho V_y} = \text{const} \quad (1.3)$$

где  $H_x, H_y, V_x, V_y$  — составляющие векторов поля и скорости по декартовым осям  $x, y$ .

Соотношения (1.3) позволяют исключить из (1.2) магнитное поле, а справедливое в рассматриваемом течении уравнение Бернулли [1] позволяет исключить из уравнений  $p$  и  $\rho$ .

В результате получим

$$(a^2 - V_x^2) \frac{\partial V_x}{\partial x} + (a^2 - V_y^2) \frac{\partial V_y}{\partial y} - V_x V_y \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) = 0 \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} [a^2(M^2 - N^2) + V_x^2 N^2] \frac{\partial V_x}{\partial y} - [a^2(M^2 - N^2) + V_y^2 N^2] \frac{\partial V_y}{\partial x} + \\ + N^2 V_x V_y \left( \frac{\partial V_y}{\partial y} - \frac{\partial V_x}{\partial x} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\left( M = \frac{V}{a}, N = \frac{V^0}{a} = \frac{H/\sqrt{4\pi\rho}}{a} \right)$$

где  $a$  — скорость звука и  $V^0$  — скорость Альфвена. Направим ось  $x$  вдоль

линии тока. Тогда уравнения (1.4) можно представить в виде

$$(1 - M^2) \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0, \quad [M^2(1 + N^2) - N^2] \frac{\partial V_x}{\partial y} - (M^2 - N^2) \frac{\partial V_y}{\partial x} = 0 \quad (1.5)$$

Уравнения меняют свой тип [1], когда один из коэффициентов при производных переходит через нуль. Очевидно, это имеет место при  $M = 1$ ,  $M = N$  и  $M = N/\sqrt{1 + N^2}$ . Характер перехода при  $M = 1$  и  $M = N$  различен в зависимости от того  $N > 1$  или  $N < 1$ . Интересен так же случай, когда  $M = N = 1$ .

Ниже дается разбор шести указанных случаев.

Заметим, что согласно (1.3),

$$N^2/M^2 = (N^2/M^2)_0 (\rho/\rho_0) \quad (1.6)$$

где  $(N^2/M^2)_0$  — предельное значение отношения  $N^2/M^2$  при  $M \rightarrow 0$  и  $\rho_0$  — плотность торможения. Если  $(N^2/M^2)_0 < 1$ , то во всем потоке  $N < M$ , и, следовательно, единственно возможным переходом будет переход при  $M = 1$  и  $N < 1$ . Такой переход качественно подобен околосзвуковому переходу классической газодинамики, разобранным в работах Ф. И. Франкля, С. В. Фальковича, Гудерлея и других работах.

Таким образом, новые типы смешанных течений могут появиться только при  $(N^2/M^2)_0 > 1$ , т. е. при большей плотности магнитной энергии.

Все величины, относящиеся к точкам, в которых  $M = 1$ , будем отмечать, как обычно, звездочкой. Величины относящиеся к точкам, в которых  $M = N/\sqrt{1 + N^2}$ , будем отмечать двумя звездочками. Величины же, относящиеся к точкам, в которых  $M = N$ , т. е. скорость равна скорости Альфвена:  $V = V^\circ$ , будем отмечать верхним индексом  $^\circ$ .

§ 2. Течение вблизи линии  $M = M_{**}$ . Пусть  $V_x = V_{**}(1 + u)$  и  $V_y = V_{**}v$ , где  $u$  и  $v$  — малые величины. Оставляя в уравнениях (1.4) лишь члены низшего порядка, получим

$$(1 - M_{**}^2)u_x + v_y = 0, \quad [3 + (\kappa - 2)M_{**}^2]uu_y + v_x = 0 \quad (2.1)$$

где индексы  $x$  и  $y$  означают дифференцирование по соответствующим переменным. Заменой переменных

$$u = \frac{1 - M_{**}^2}{3 + (\kappa - 2)M_{**}^2} \xi, \quad v = \frac{(1 - M_{**}^2)^2}{3 + (\kappa - 2)M_{**}^2} \eta \quad (2.2)$$

система (2.1) сводится к каноническому виду:

$$\xi_x + \eta_y = 0, \quad \xi\xi_y + \eta_x = 0 \quad (2.3)$$

Первое из уравнений (2.3) позволяет ввести функцию  $\psi$  такую, что

$$\xi = \psi_y, \quad \eta = -\psi_x \quad (2.4)$$

Тогда из второго уравнения (2.3) имеем

$$\psi_y\psi_{yy} - \psi_{xx} = 0 \quad (2.5)$$

Введем лежандрову функцию

$$\Psi(\xi, \eta) = -\psi(x, y) + \xi y - \eta x \quad (2.6)$$

Очевидно, что

$$x = -\Psi_\eta, \quad y = \Psi_\xi \quad (2.7)$$

Переходя во втором уравнении (2.3) к плоскости годографа  $\xi, \eta$ , получим  $y_\xi + \xi x_\eta = 0$  или

$$\Psi_{\xi\xi} - \xi\Psi_{\eta\eta} = 0 \quad (2.8)$$

Уравнение (2.5) по своему виду аналогично уравнению для потенциала скоростей классического околосвукового течения. Аналогично, уравнение (2.8) совпадает с уравнением для функции тока или лежандрова потенциала околосвукового течения. Очевидно, что полученные для околосвуковых течений решения уравнений типа (2.5) или (2.8)

описывают совершенно другие течения в рассматриваемом случае. Иную формулировку приобретают и граничные задачи.

Уравнения характеристик в физической плоскости и в плоскости годографа имеют соответственно вид

$$dy = \sqrt{\xi} dx, \quad d\eta = \pm \sqrt{\xi} d\xi \quad \text{или} \quad \eta = c \pm \frac{2}{3}\xi^{3/2} \quad (2.9)$$

Характеристики действительны и уравнения имеют гиперболический тип при  $\xi > 0$ . Предельные линии течения могут появляться лишь в гиперболической области, так как определитель

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)} = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi = \xi\Psi_{\eta\eta}^2 - \Psi_{\xi\xi}^2$$

может обратиться в нуль лишь при  $\xi > 0$ .

Рассмотрим простой пример течения рассматриваемого смешанного типа.

Легко видеть, что  $\psi = cxy$  является решением уравнения (2.5). Согласно (2.4) имеем  $\xi = cx$  и  $\eta = -cy$ . Линии тока и характеристики этого течения имеют соответственно вид

$$y = c_1/(1 + cx), \quad y = c_2 \pm \frac{2}{3}\sqrt{cx^{3/2}}$$

Это течение показано на фиг. 1. Отметим, что оно обладает прямой линией перехода.

Введем новые переменные

$$x = x_0 x^*; \quad y = x_0 \tau^{1/3} \gamma^{1/3} \beta^{-1/3} y^*; \quad v = \tau v^*, \quad u = \tau^{2/3} \beta^{-2/3} \gamma^{-1/3} u^* \quad (2.10)$$

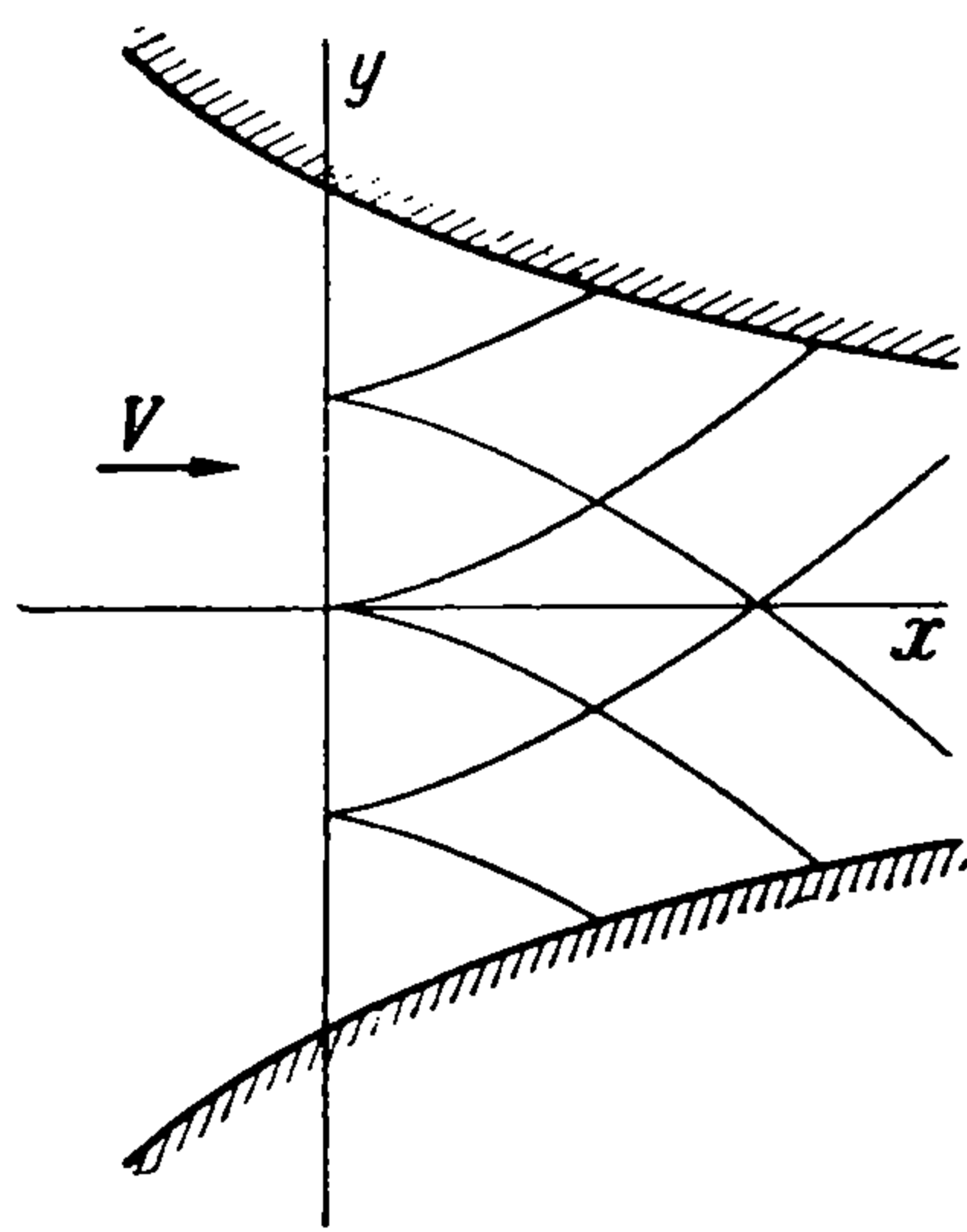
$$(\gamma = 3 + (\kappa - 2)M_{**}^2, \quad \beta^2 = 1 - M_{**}^2)$$

где  $x_0$  — характерный продольный размер течения и  $\tau$  — характерный наклон вектора скорости. Легко видеть, что функции, отмеченные звездочкой, удовлетворяют канонической системе (2.3). Два течения, у которых в точках с одинаковыми  $x^*, y^*$  функции  $u^*$  и  $v^*$  равны, назовем подобными. Очевидно, что у подобных течений должны быть равны на бесконечности величины

$$u_\infty^* = \tau^{-2/3} \beta^{2/3} \gamma^{1/3} M_{**}^{-1} (1 + \frac{\kappa-1}{2} M_{**}^2)^{-1} \varepsilon = k \quad (2.11)$$

где  $\varepsilon = M_\infty - M_{**}$  — малая величина,  $M_\infty$  — число Маха течения на бесконечности.

Соотношения (2.10) — (2.11) дают закон подобия для рассматриваемых течений, а величина  $k$  является параметром подобия.



Фиг. 1

Коэффициент давления на тонком теле определяется выражением

$$c_p = \frac{p - p_{**}}{\frac{1}{2}\rho_{**}v_{**}^2} = -2u = -2\tau^{1/2}\beta^{-1/2}\gamma^{-1/2}u^*(k, x^*) \quad (2.12)$$

Если  $x_0$  — длина тела, то коэффициенты сопротивления и подъемной силы будут

$$c_x = \frac{1}{x_0} \oint c_p \tau dx = -2\tau^{1/2}\beta^{-1/2}\gamma^{-1/2} \oint u^*(k; x^*) v^* dx^* = -\tau^{1/2}\beta^{-1/2}\gamma^{-1/2} F_1(k)$$

$$c_y = \frac{1}{x_0} \oint c_p dx = -2\tau^{1/2}\beta^{-1/2}\gamma^{-1/2} \oint u^* dx^* = -2\tau^{1/2}\beta^{-1/2}\gamma^{-1/2} F_2(k)$$

§ 3. Околоальфвеновские течения. Пусть теперь  $V_x = V^0(1 + u)$  и  $V_y = V^0v$ . Тогда упрощенная система уравнений (1.4) имеет вид

$$(1 - M^{\circ 2})u_x + v_y = 0, \quad u_y^* - uv_x^* = 0 \quad (3.1)$$

При  $M^{\circ} = N^{\circ} < 1$  канонической системой будет

$$\begin{aligned} \xi_x + \eta_y = 0, \quad \xi_y - \xi\eta_x = 0 \\ (\xi = u(1 - M^{\circ 2}), \quad \eta = v) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Вводя функции  $\psi$  и  $\Psi$  соотношениями (2.4), (2.6) и (2.7), получим

$$\psi_{yy} + \psi_y \psi_{xx} = 0, \quad \Psi_{\eta\eta} + \xi \Psi_{\xi\xi} = 0 \quad (3.3)$$

Здесь уравнения имеют гиперболический тип при  $\xi < 0$ . Вдоль характеристик (при  $\xi < 0$ ) имеем

$$dy = \pm (-\xi)^{-1/2} dx, \quad d\eta = \pm (-\xi)^{-1/2} d\xi \quad \text{или} \quad \eta = c_1 \pm \sqrt{-\xi} \quad (3.4)$$

Очевидно, что функция  $\psi = cxy$  удовлетворяет первому уравнению (3.3) и, следовательно,  $\xi = cx$ ,  $\eta = -cy$ . Линии тока этого течения (фиг. 2) совпадают с линиями тока течения, показанного на фиг. 1. Уравнение характеристик  $y = c_1 \pm \pm 2c^{-1/2}\sqrt{-x}$ . Здесь опять линия перехода прямая.

При  $M^{\circ} = N^{\circ} > 1$  каноническая система имеет вид

$$\xi_x - \eta_y = 0, \quad \xi_y - \xi\eta_x = 0 \quad (3.5)$$

Вводя функции  $\psi$  и  $\Psi$  соотношениями

$$\xi = \psi_y, \quad \eta = \psi_x, \quad \Psi = -\psi + \xi y + \eta x, \quad x = \Psi_{\eta}, \quad y = \Psi_{\xi} \quad (3.6)$$

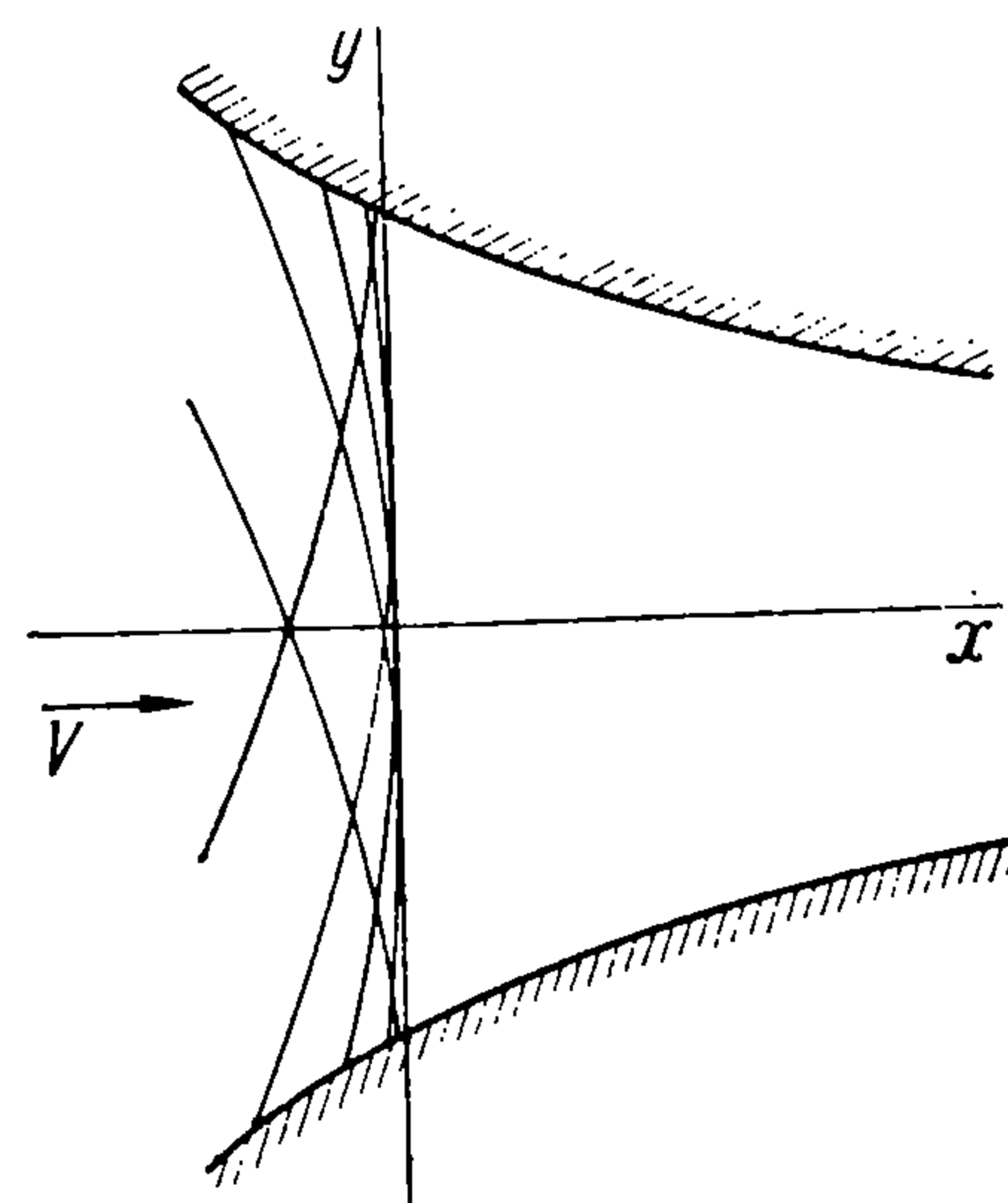
получим

$$\psi_{yy} - \psi_y \psi_{xx} = 0, \quad \Psi_{\eta\eta} - \xi \Psi_{\xi\xi} = 0 \quad (3.7)$$

Эти уравнения гиперболически при  $\xi > 0$ , так что вдоль характеристик при  $\xi > 0$  имеем

$$dy = \pm \xi^{-1/2} dx, \quad d\eta = \pm \xi^{-1/2} d\xi \quad \text{или} \quad \eta = c \pm 2\sqrt{\xi} \quad (3.8)$$

Решение  $\psi = cxy$  описывает здесь течение в коническом сопле (фиг. 3) с линиями тока  $y = c_1(1 + cx)$  и характеристиками  $y = c_1 \pm 2c^{-1/2}\sqrt{x}$ .



Фиг. 2

Закон подобия для околоальфвеновских скоростей ( $V \sim V^\circ$ ) дается соотношениями

$$x = x_0 x^*, \quad y = x_0 \tau^{-1} y^*, \quad v = \tau v^*, \quad u = \beta^{-2} \tau^2 u^* \quad (3.9)$$

$$k = \tau^{-2} \beta^2 M^{\circ-1} \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} M^{\circ 2}\right)^{-1} \varepsilon \quad (\varepsilon = M_\infty - M^\circ) \quad (3.10)$$

где  $\beta^2 = 1 - M^{\circ 2}$  при  $M^\circ < 1$  и  $\beta^2 = M^{\circ 2} - 1$  при  $M^\circ > 1$ .

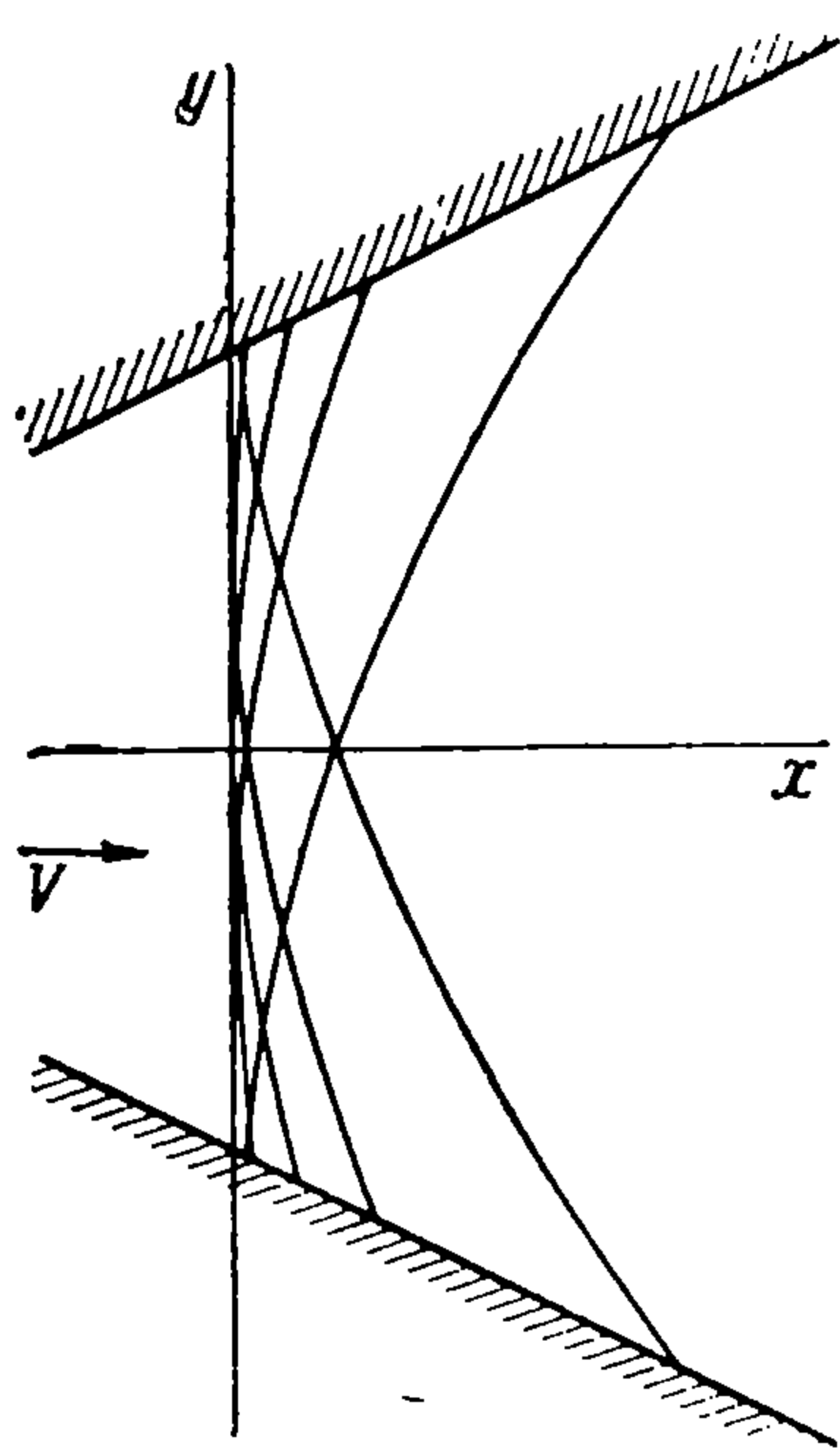
Функции со звездочками удовлетворяют соответствующим каноническим системам (3.2) и (3.5). Для давления и сил имеем

$$c_p = -2\tau^2 \beta^{-2} v^*(k, x^*), \quad c_x = \tau^3 \beta^{-2} F_1(k), \quad c_y = \tau^2 F_2(k)$$

где  $c_p = (p - p^\circ) / \frac{1}{2} \rho^\circ v^{\circ 2}$ . Зависимость сопротивления от толщины тела получается более сильная, чем в классическом околозвуковом течении.

§ 4. Околозвуковые течения. Пусть теперь  $V_x = V_* (1 + u)$ ,  $V_y = V_* v$  и  $M_* = 1 \neq N_*$ . Упрощенная система (1.4), (1.5) принимает в этом случае вид

$$-(\kappa + 1) u u_x + v_y = 0, \quad u_y - (1 - N_*^2) v_x = 0 \quad (4.1)$$



Фиг. 3

Легко видеть, что при  $N_* < 1$  уравнения (4.1) отличаются лишь множителем  $(1 - N_*^2)$  при  $v_x$  во втором уравнении от системы уравнений классических околозвуковых течений. В этом случае картина течения качественно совпадает с обычными околозвуковыми течениями.

При  $N_* > 1$  эллиптическая и гиперболическая области меняются местами, т. е. течение гиперболично в дозвуковой области ( $u < 0$ ) и эллиплично в сверхзвуковой ( $u > 0$ ). Поэтому заменой  $u_1 = -u$  систему (4.1) можно свести к обычному околозвуковому виду.

На фиг. 4 приведена картина такого течения, соответствующая решению

$$u = cx - \frac{c^2(\kappa+1)}{2} y^2, \quad v = c^2(\kappa+1)xy - \frac{(\kappa+1)^2 c^3}{6} y^3$$

являющегося аналогом известного немагнитного околозвукового течения. На фиг. 4 характеристики показаны пунктирными линиями, а линия  $v = 0$  — штрих-пунктиром.

Интересны течения при  $M_* = N_* = 1$ . В этом случае упрощенная система уравнений имеет вид

$$+(\kappa + 1) u u_x + v_y = 0, \quad u_y - u v_x = 0 \quad (4.2)$$

Здесь как при  $u > 0$ , так и при  $u < 0$  течение имеет гиперболический тип. В плоскости годографа система (4.2) переходит в

$$-(\kappa + 1) u y_v + x_u = 0, \quad x_v - u y_u = 0 \quad (4.3)$$

Исключая перекрестным дифференцированием  $x$ , получим

$$u [(\kappa + 1) y_{vv} - y_{uu}] + y_u = 0$$

Характеристиками в плоскости годографа и в физической плоскости будут

$$v = c \pm \sqrt{\kappa + 1} u, \quad dy = \pm (\kappa + 1)^{-1/2} u^{-1} dx \quad (4.4)$$

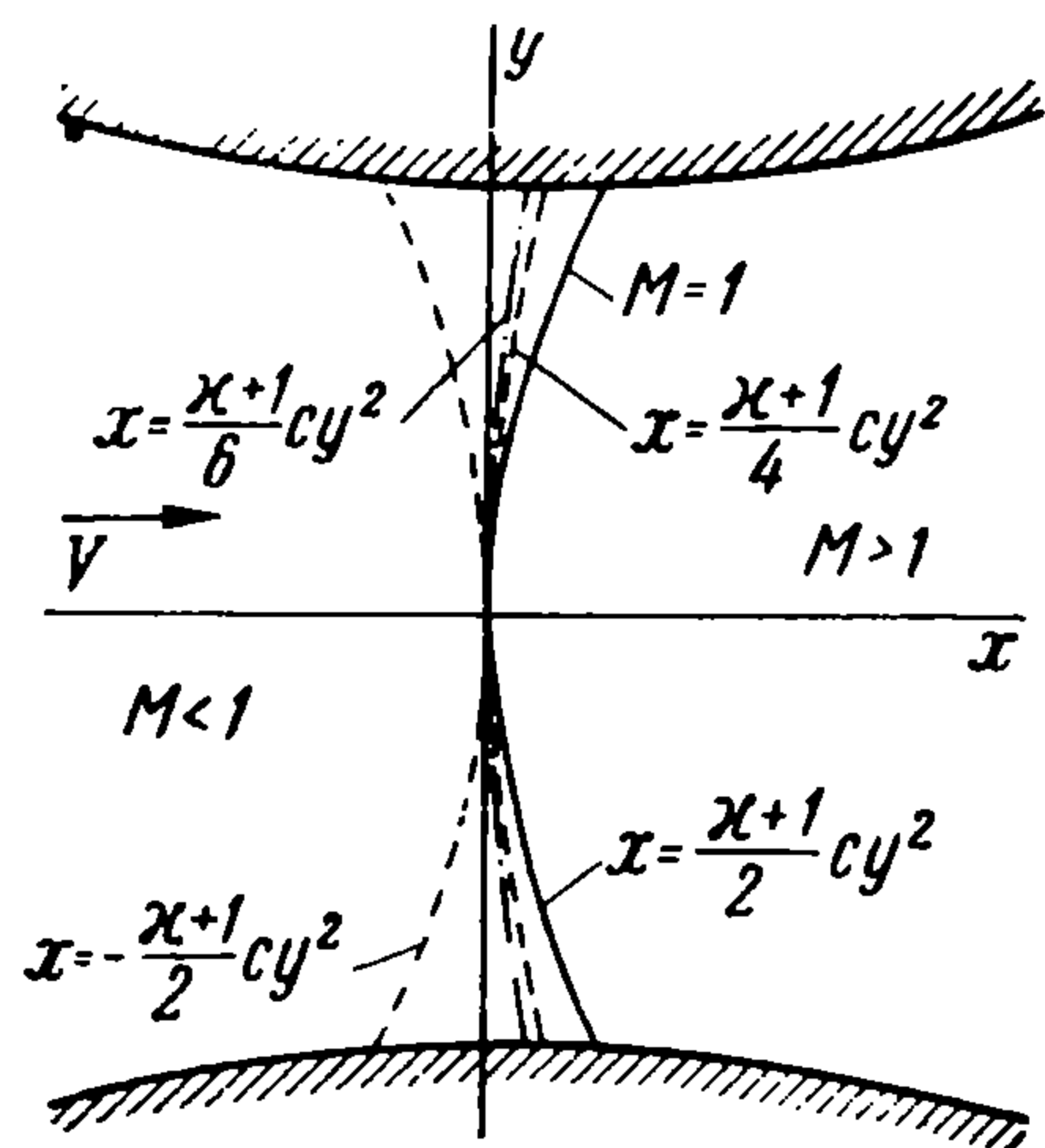
Легко видеть, что система (4.2) допускает решение вида

$$u = (x/c) \varphi(y/c), \quad v = (x/c) \psi(y/c)$$

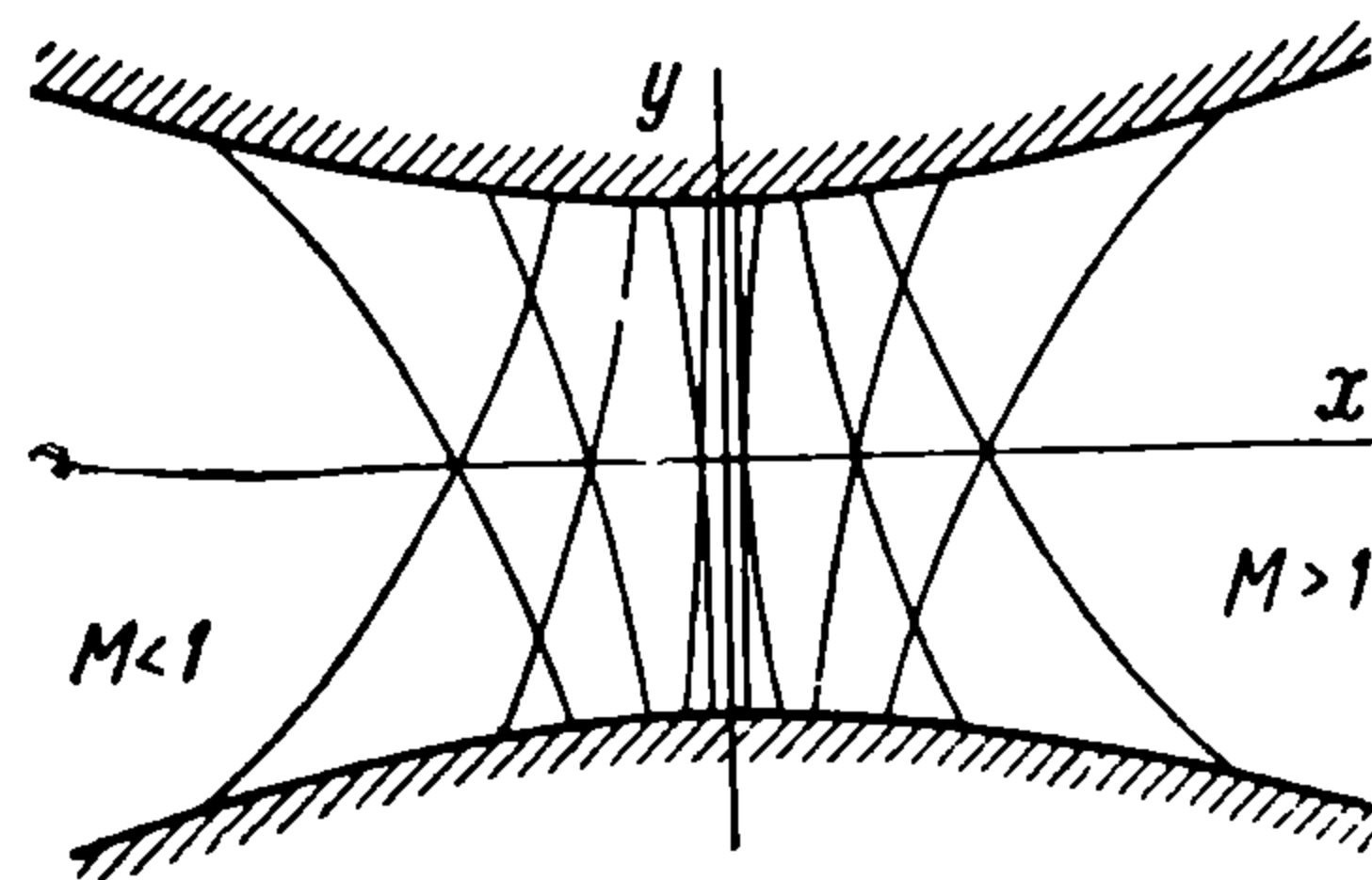
В частности, имеем

$$u = \sqrt{\kappa + 1} (x/c) \sec(y/c), \quad v = (x/c) \operatorname{tg}(y/c)$$

Этим решением описывается течение, показанное на фиг. 5. Картина течения получается симметричной относительно прямой перехода  $x = 0$ . Очевидно, в таком течении совершенно безразлично, течет ли газ из дозвуковой области в сверхзвуковую или наоборот.



Фиг. 4



Фиг. 5

Подобие течений определяется следующими соотношениями:

$$x = x_0 x^*, \quad y = x_0 \tau^{-1} y^*, \quad u = \tau (1 + \kappa)^{-1/2} u^*, \quad v = \tau v^* \quad (4.5)$$

$$k = 2\tau^{-1} (1 + \kappa)^{-1/2} \varepsilon \quad (\varepsilon = M_\infty - 1) \quad (4.6)$$

Соответственно для давления и сил имеем

$$c_p = -2\tau (1 + \kappa)^{-1/2} u^*, \quad c_x = \tau^2 F_1(k), \quad c_y = \tau F_2(k), \quad c_p = \frac{P - P_*}{1/2 \rho_* v_*^2} \quad (4.7)$$

§ 5. Разобранные выше течения смешанного типа могут встречаться в соплах в следующих сочетаниях.

1. При  $(N^2/M^2)_0 < 1$  в сопле имеется лишь одна область смешанных течений вблизи звуковой линии. Это течение качественно подобно околосзвуковым течениям обычной газодинамики.

2. При  $(N^2/M^2)_0 < \rho_0/\rho_*$  к околосзвуковому переходу обычного типа добавляются разобранные в § 2 и 3 переходы при  $M = N/\sqrt{1+N^2}$  и  $M = N$ , ограничивающие дозвуковую гиперболическую пробку.

3. При  $(N^2/M^2)_0 > \rho_0/\rho_*$  дозвуковая гиперболическая пробка простирается от  $M = N/\sqrt{1+N^2}$  до звуковой линии, где имеет место разобранный в § 4 переход к эллиптическому сверхзвуковому течению. Сверхзвуковая эллиптическая пробка заканчивается разобранным в § 3 околоальфвеновским переходом к гиперболическому течению.

4. При  $(N^2/M^2)_0 = \rho_0/\rho_*$  переход от эллиптических течений к гиперболическим происходит при  $M = N/\sqrt{1+N^2} < 1$ . Все течение при больших скоростях имеет гиперболический тип с параболическим вырождением на звуковой линии (см. § 4).

Поступила 14 IX 1960

#### ЛИТЕРАТУРА

1. К о г а н М. Н. Магнитодинамика плоских и осесимметричных течений газа с бесконечной электрической проводимостью. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 1.