

## О СТРУКТУРЕ НАКЛОННОЙ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

А. Г. Куликовский, Г. А. Любимов

(Москва)

Задачей о структуре магнитогиродинамической ударной волны называется задача об отыскании решений уравнений магнитной гидродинамики неидеального газа, которые при  $x = \pm \infty$  принимают значения, удовлетворяющие известным законам сохранения, имеющим место при переходе через поверхность сильного разрыва в идеальном газе. При изучении структуры ударной волны считают, что в системе координат, в которой волна покоится, движение внутри зоны, представляющей ударную волну, является стационарным одномерным движением неидеального газа. В этой постановке задача о структуре параллельной ударной волны рассматривалась в работе [1]. Некоторые общие вопросы структуры наклонной ударной волны при учете всех диссипативных коэффициентов были рассмотрены в работе [2]. Данная работа представляет собой исследование течения внутри зоны ударной волны в том случае, когда диссипация энергии в волне происходит за счет магнитной вязкости и второй кинематической вязкости. В аналогичной постановке структура некоторых частных видов ударных волн была рассмотрена в работе [3].

Уравнения стационарных одномерных течений совершенного газа, описывающие задачу о структуре ударной волны, когда отличны от нуля только магнитная вязкость и вторая вязкость, имеют вид

$$\begin{aligned} v_m \frac{dH}{dx} &= uH - vH_n + cE, & \mu \frac{du}{dx} &= p + \rho u^2 + \frac{1}{8\pi} H^2 - J_1 \\ \rho uv - \frac{1}{4\pi} H_n H &= J_2, & \rho u &= M, & H_n &= \text{const} \\ \rho u \left[ \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \right] - \frac{cEH}{4\pi} &= U \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $H_n$ ,  $H$ ,  $u$ ,  $v$  — соответственно составляющие магнитного поля и скорости вдоль осей  $x$  и  $y$ ,  $E$  —  $z$ -овая составляющая электрического поля,  $c$  — скорость света,  $J_1$ ,  $J_2$  — потоки  $x$ -ой и  $y$ -ой компонент импульса,  $U$  — поток энергии,  $M$  — поток массы. Уравнения (1) выписаны в системе координат, в которой течение можно считать плоским. При  $x = \pm \infty$  течение, представляющее структуру ударной волны, должно переходить в поступательный поток с параметрами, удовлетворяющими законам сохранения. При этом в уравнениях (1) имеем  $du/dx = dH/dx = 0$  и постоянные  $U$ ,  $J_1$ ,  $J_2$ ,  $E$ ,  $H_n$ ,  $M$  могут быть определены по значениям параметров перед ударной волной. Без ограничения общности можно считать  $J_2 = 0$ . Введем безразмерные переменные по следующим формулам (все величины относим к параметрам перед ударной волной):

$$u = u_0 \tau, \quad v = u_0 q, \quad p = \rho_0 u_0^2 \theta, \quad H = \sqrt{4\pi \rho_0 u_0^2} h \quad (2)$$

В новых переменных уравнения (1) можно представить в следующем виде:

$$\frac{v_m}{u_0} \frac{dh}{dx} = h(\tau - h_n^2) - e, \quad \frac{\mu}{\rho_0 u_0} \frac{d\tau}{dx} = \theta + \tau + \frac{1}{2} h^2 - P \quad (3)$$

$$q - h_n h = 0, \quad k\theta\tau + \frac{1}{2} \tau^2 + \frac{1}{2} h_n^2 h^2 + eh = \varepsilon$$

$$\left( k = \frac{\gamma}{\gamma - 1}, \quad h_n = \frac{H_n}{\sqrt{4\pi\rho_0 u_0^2}}, \quad e = -\frac{cE}{\sqrt{4\pi\rho_0 u_0^2}}, \quad P = \frac{J_1}{\rho_0 u_0^2}, \quad \varepsilon = \frac{U}{\rho_0 u_0^3} \right)$$

В первом и последнем равенствах (3) было исключено  $q$  при помощи третьего равенства. Из условия, что при  $x = -\infty$  производные  $dh/dx$  и  $d\tau/dx$  равны нулю и  $\tau = 1$ , следует

$$e = h_0(1 - h_n^2), \quad P = 1 + \theta_0 + \frac{1}{2} h_0^2, \quad \varepsilon = k\theta_0 + \frac{1}{2} + h_0^2 \left(1 - \frac{1}{2} h_n^2\right)$$

Всюду в дальнейшем будем считать  $e > 0$ , т. е. будем считать, что знак  $h_0$  совпадает со знаком  $(1 - h_n^2)$ . Из последних соотношений получим

$$\frac{1}{2} h_0^2 = \frac{k(P - 1) - (\varepsilon - 1/2)}{h_n^2 + k - 2}, \quad \theta_0 = \frac{(\varepsilon - 1/2) - (2 - h_n^2)(P - 1)}{h_n^2 + k - 2} \quad (4)$$

В дальнейшем для простоты будем рассматривать случай  $\gamma < 2$ . При этом

$$k > 2, \quad h_0^2 + k - 2 > 0$$

Так как  $h_0^2 \geq 0$  и  $\theta_0 \geq 0$ , то из (4) можно получить неравенства, ограничивающие интервал возможных значений постоянной  $\varepsilon$

$$(2 - h_n^2)(P - 1) \leq \varepsilon - \frac{1}{2} \leq k(P - 1) \quad (5)$$

После этих предварительных замечаний перейдем к исследованию изоклины  $d\tau/dx = 0$ . Исключая  $\theta$  из второго и четвертого уравнений (3), получим ее уравнение

$$h^2(k\tau - h_n^2) - 2eh + (2k - 1)\tau^2 - 2kP\tau + 2\varepsilon = 0 \quad (6)$$

Легко проверить, что точка  $\tau = 1$ ,  $h = h_0$ , соответствующая состоянию перед волной, удовлетворяет уравнению (6).

Разрешим равенство (6) относительно  $h$

$$h_{1,2} = \frac{e}{k\tau - h_n^2} \pm \frac{\sqrt{e^2 - (k\tau - h_n^2)[(2k - 1)\tau^2 - 2kP\tau + 2\varepsilon]}}{k\tau - h_n^2} \quad (7)$$

Таким образом, действительные точки изоклины  $d\tau/dx = 0$  лежат по обе стороны гиперболы  $h = e/(k\tau - h_n^2)$ . Минимумы и максимумы изоклины лежат на этой гиперболе в тех точках  $\tau$ , где дискриминант уравнения (6) обращается в нуль. Непосредственно из уравнения (7) видно, что изоклина  $d\tau/dx = 0$  имеет асимптоту  $\tau = h_n^2/k$ .

Вводя вместо  $\varepsilon$  величину  $\alpha$  посредством равенства

$$2\varepsilon - 1 = 2k(P - 1) - 2\alpha(h_n^2 + k - 2)(P - 1)$$

и используя выражение для  $e$ , дискриминант уравнения (6) представим в виде

$$D(\tau) = 2\alpha(P-1)[(1 - kh_n^2) + k(h_n^2 + k - 2)\tau] - (k\tau - h_n^2)[(2k-1)\tau^2 - 2kP\tau + 2k(P-1) + 1]$$

Величина  $\alpha$  изменяется в пределах

$$0 \leq \alpha = \frac{1/2 h_0^2}{1/2 h_0^2 + \theta_0} \leq 1$$

При  $\alpha = 0$  уравнение  $D(\tau) = 0$  имеет три действительных корня

$$\tau = \frac{h_n^2}{k}, \quad \tau = 1, \quad \tau = \tau_1 \equiv \frac{2k}{2k-1}(P-1) + \frac{1}{2k-1}$$

При увеличении  $\alpha$  корни  $D(\tau) = 0$ , которые являются точками пересечения прямой

$$D(\tau) - D(\tau)|_{\alpha=0} = 2\alpha k(h_n^2 + k - 2)(P-1)(\tau - \tau_*)$$

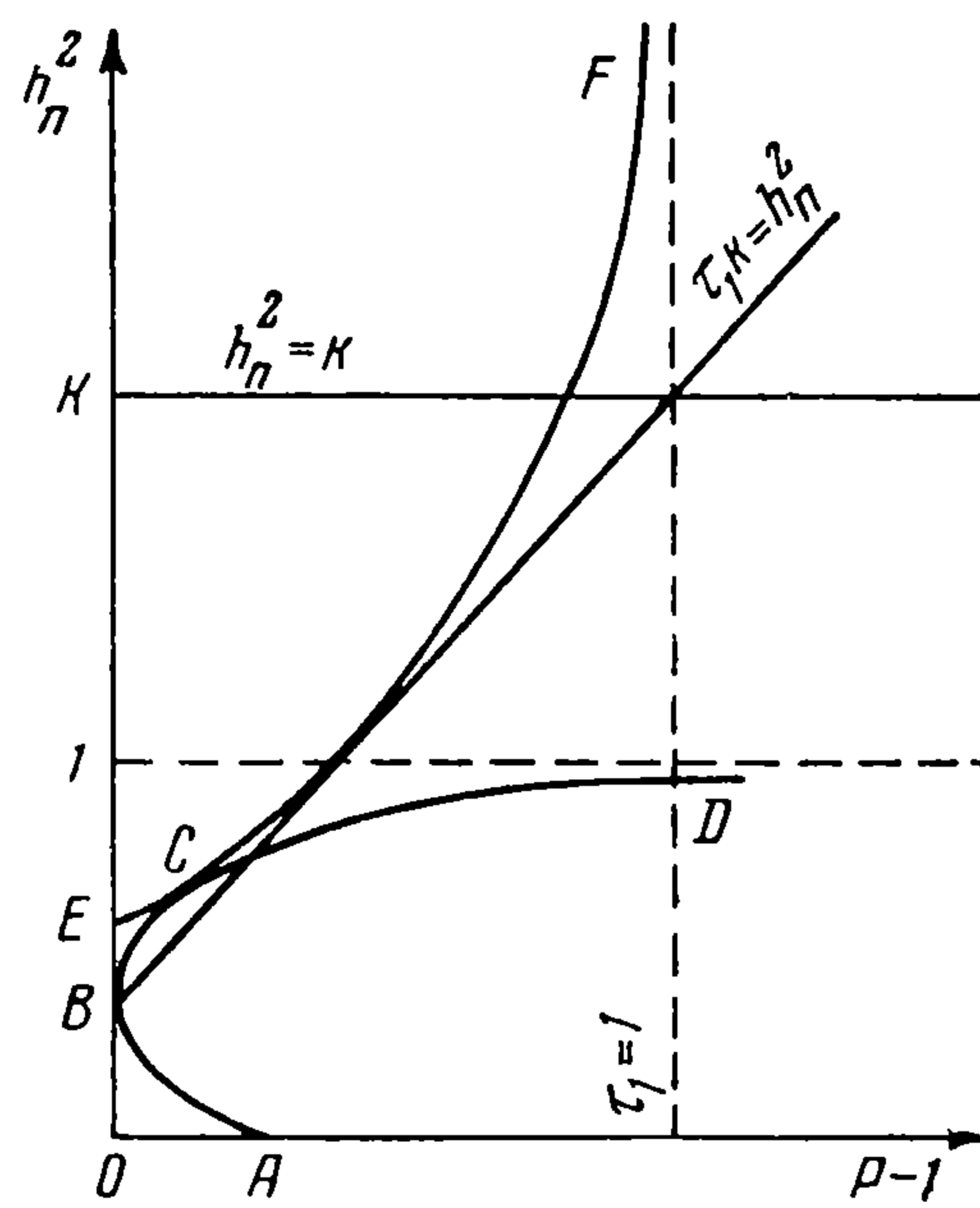
$$\left( \tau_* = \frac{h_n^2 - 1/k}{h_n^2 + k - 2} \right)$$

с кубической параболой

$$-D(\tau)|_{\alpha=0} = (2k-1)(k\tau - h_n^2)(\tau - \tau_1)(\tau - 1)$$

изменяются монотонно. Это позволяет качественно исследовать вопрос о числе и расположении корней дискриминанта.

Результаты этого исследования можно изложить следующим образом. На плоскости переменных  $P-1 = 1/2 h_0^2 + \theta_0$  и  $h_n^2$  может быть проведена кривая, отделяющая при  $\theta_0 = 0$  ( $\alpha = 1$ ) область существования трех корней дискриминанта от области существования одного корня. Она имеет вид, изображенный на фиг. 1 (кривая  $ABCD$ ). Кривая  $ESF$ , уравнение которой  $\tau_1 = \tau_*$ , касается кривой  $ABCD$  в точке  $C$ . Для точек, лежащих левее кривой  $ABCF$ , дискриминант всегда (при любых  $\alpha$ ) имеет три корня.



Фиг. 1

Для точек, лежащих правее кривой  $ABCD$ , дискриминант при малых значениях  $\alpha$  имеет три корня, а при больших значениях  $\alpha$  — один корень. Для остальных точек плоскости переменных  $P-1$ ,  $h_n^2$  при малых и при больших значениях  $\alpha$  дискриминант имеет три корня, а при промежуточных значениях  $\alpha$  дискриминант имеет один корень.

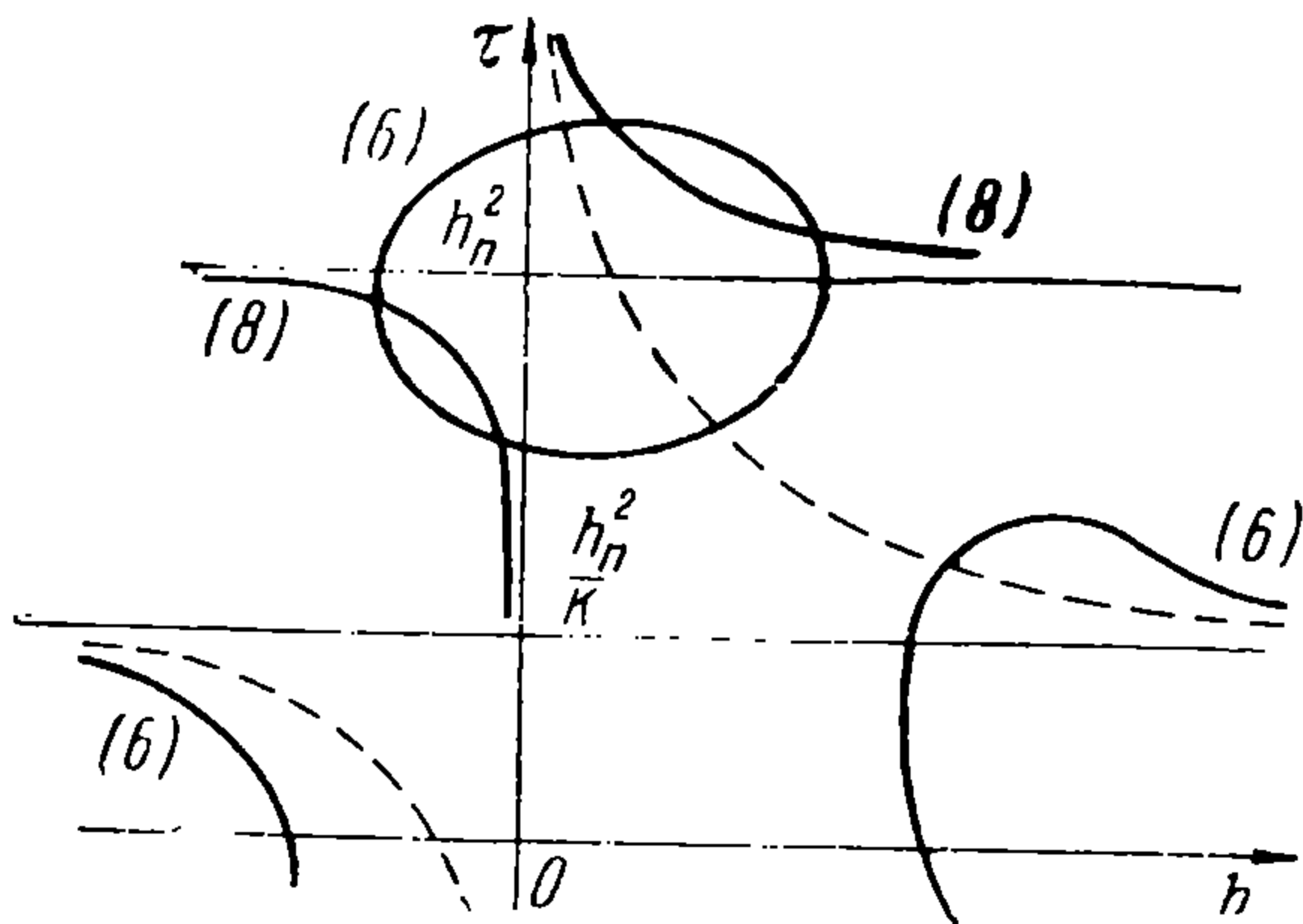
Проведем, кроме того, на плоскости  $P-1$ ,  $h_n^2$  прямые

$$\frac{h_n^2}{k} = 1, \quad \tau_1 = 1, \quad \tau_1 = \frac{h_n^2}{k} \quad \left( \tau_1 \equiv \frac{2k}{2k-1}(P-1) + \frac{1}{2k-1} \right)$$

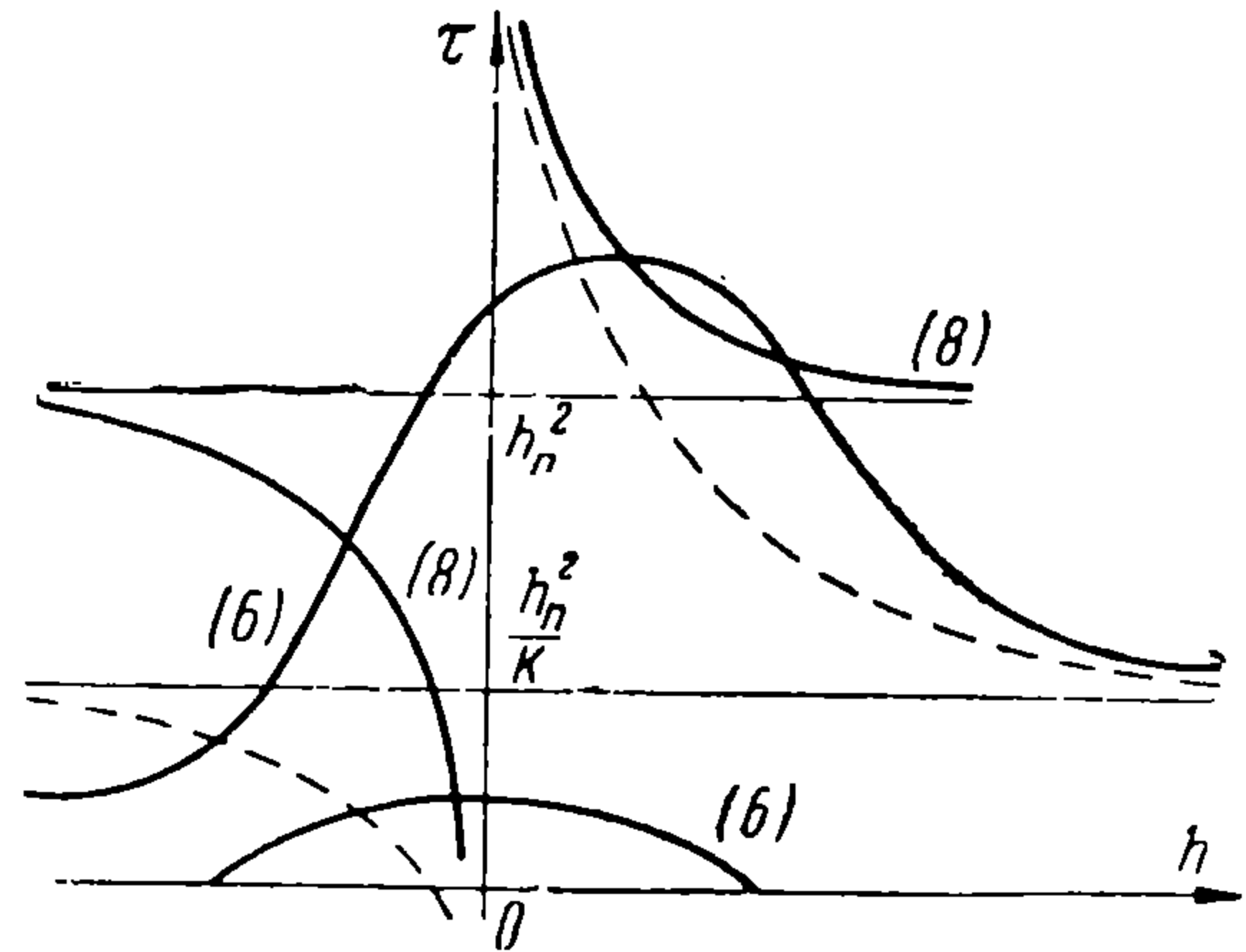
В случае, когда  $h_0 = 0$ , величины  $1$ ,  $\tau_1$  и  $h_n^2/k$  представляют собой корни  $D(\tau)$ . Прямая  $\tau_1 = h_n/k$  проходит через точку  $B$  и касается кривой  $ESF$  при  $h_n^2 = 1$ . Прямая  $\tau_1 = 1$  является асимптотой для кривой  $ESF$ .

Можно показать, что

(а) для точек, лежащих одновременно ниже прямых  $\tau_1 = h_n^2/k$  и  $h_n^2/k = 1$  в тех случаях, когда число корней равно трем и не менялось при увеличении  $\alpha$  от нуля до рассматриваемого значения, два корня дискриминанта больше, чем  $h_n^2/k$ , а один корень меньше, чем  $h_n^2/k$ ;



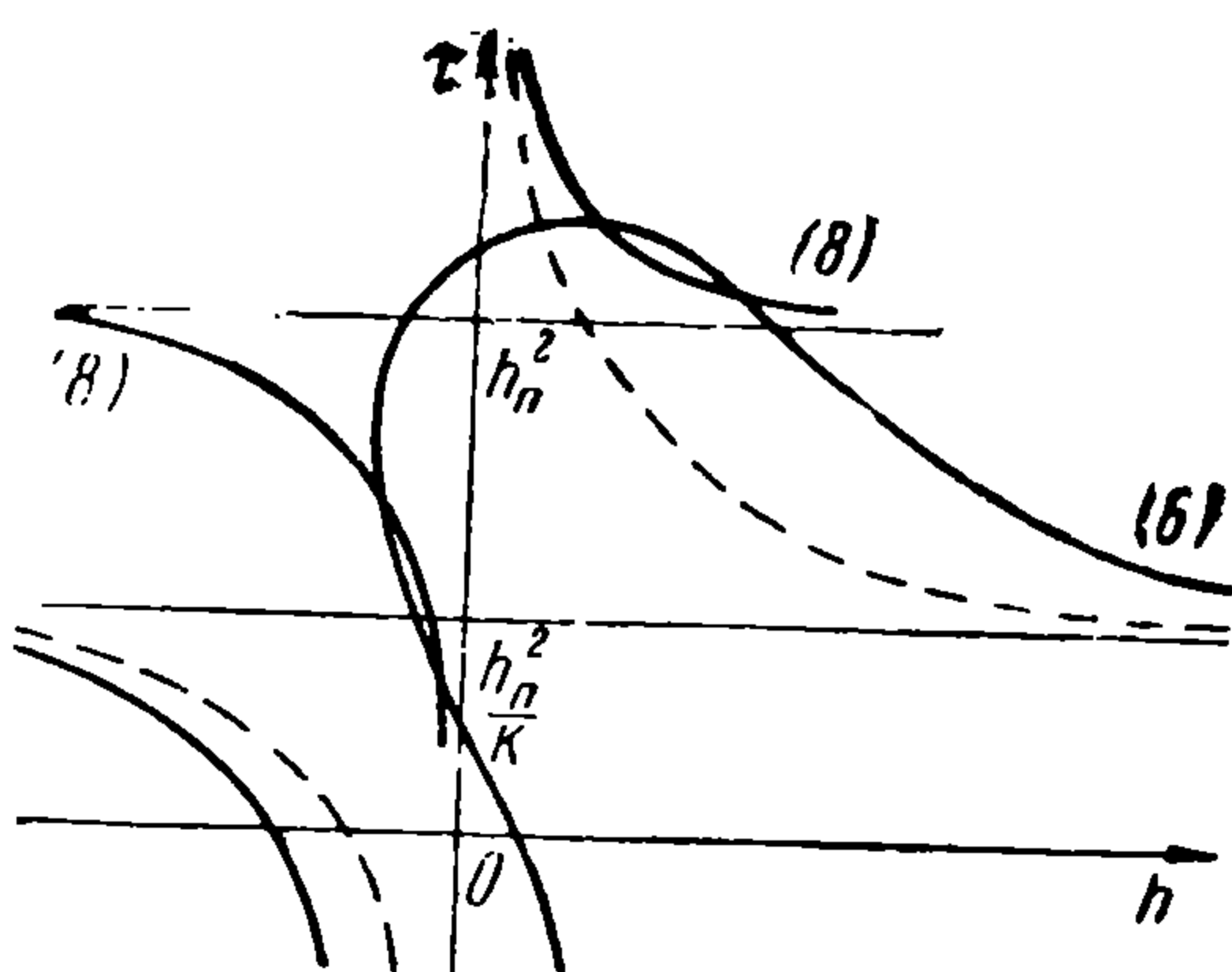
Фиг. 2



Фиг. 3

(б) во всех остальных случаях, когда имеется три корня, один корень больше, чем  $h_n^2/k$ , а два других — меньше.

Эти свойства дискриминанта позволяют качественно построить по формуле (7) изоклину  $d\tau/dx = 0$  на плоскости  $h, \tau$ . Если имеется три



Фиг. 4

корня, то в случае (а) изоклина будет иметь вид кривой (6) на фиг. 2. Пунктиром обозначена гипербола  $h = e / (k\tau - h_n^2)$ . Точка  $(1, h_0)$ , соответствующая начальному состоянию, всегда лежит на замкнутой ветви. В случаях (б) изоклина будет иметь вид кривой (6) на фиг. 3.

Заметим, что начальная точка в этом случае может лежать как выше, так и ниже асимптоты  $\tau = h_n^2/k$ , а точка пересечения изоклины с асимптотой может

быть правее и левее оси  $\tau$ . Если же у дискриминанта имеется только один корень, то изоклина имеет вид кривой (6) на фиг. 4. Изоклина  $dh/dx = 0$  на плоскости  $h\tau$  является гиперболой

$$h(\tau - h_n^2) = e \quad (8)$$

с асимптотами  $h = 0$  и  $\tau = h_n^2$ ; она обозначена цифрой (8) на фиг. 2, 3, 4.

Из определения  $h_n$  следует, что для точек выше прямой  $\tau = h_n^2$  скорость газа больше альфвеновской скорости  $a_A = H_n / \sqrt{4\pi\rho_0}$ , а для точек ниже прямой  $\tau = h_n^2$  — меньше ее.

Так как при  $x = \pm \infty$  течение, соответствующее задаче о структуре ударной волны, должно переходить в поступательный поток ( $dh/dx = d\tau/dx = 0$ ), то точкам, соответствующим состояниям за и перед удар-

ной волной, соответствуют точки пересечения изоклин (6) и (8). Эти точки пересечения являются особыми точками уравнения

$$\frac{d\tau}{dh} = \frac{h^2(k\tau - h_n^2) - 2eh + (2k - 1)\tau^2 - 2kP\tau + 2e}{2k\tau[h(\tau - h_n^2) - e]} \quad (9)$$

эквивалентного двум дифференциальным уравнениям (3). Решению задачи о структуре ударной волны соответствует интегральная кривая уравнения (9), соединяющая особые точки, лежащие в области  $\tau > 0$ . Чтобы исследовать поле интегральных кривых, необходимо прежде всего изучить характер этих особых точек.

В работе [2] показано, что характер особых точек уравнения (9) плоскости  $h, \tau$  зависит от величины скорости, соответствующей данной особой точке. При этом возможны следующие особые точки (пронумеруем их в порядке убывания скорости):

Точка 1 — узел, из которого при увеличении  $x$  выходят интегральные кривые. В этой точке выполняется неравенство  $a_+ < u$ , или

$$\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\gamma\theta\tau + h^2\tau + 2h_n\tau} \sqrt{\gamma\theta} + \sqrt{\gamma\theta\tau + h^2\tau - 2h_n\tau} \sqrt{\gamma\theta} \right\} \equiv \frac{a_+}{u_0} < \tau$$

Точка 2 — седло. В этой точке выполняется неравенство

$$a_A < u < a_+ \quad \text{или} \quad h_n^2\tau^{-\frac{1}{2}} < \frac{a_+}{u_0}$$

Точка 3 — седло. В этой точке выполняется неравенство

$$a_- < u < a_A$$

или

$$\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\gamma\theta\tau + h^2\tau + 2h_n\tau} \sqrt{\gamma\theta} - \sqrt{\gamma\theta\tau + h^2\tau - 2h_n\tau} \sqrt{\gamma\theta} \right\} \equiv \frac{a_-}{u_0} < \tau < h_n^2\tau^{-1/2}$$

Точка 4 — узел, в который входят интегральные кривые. В этой точке выполняется неравенство

$$u < a, \quad \text{или} \quad \tau < \frac{a_-}{u_0}$$

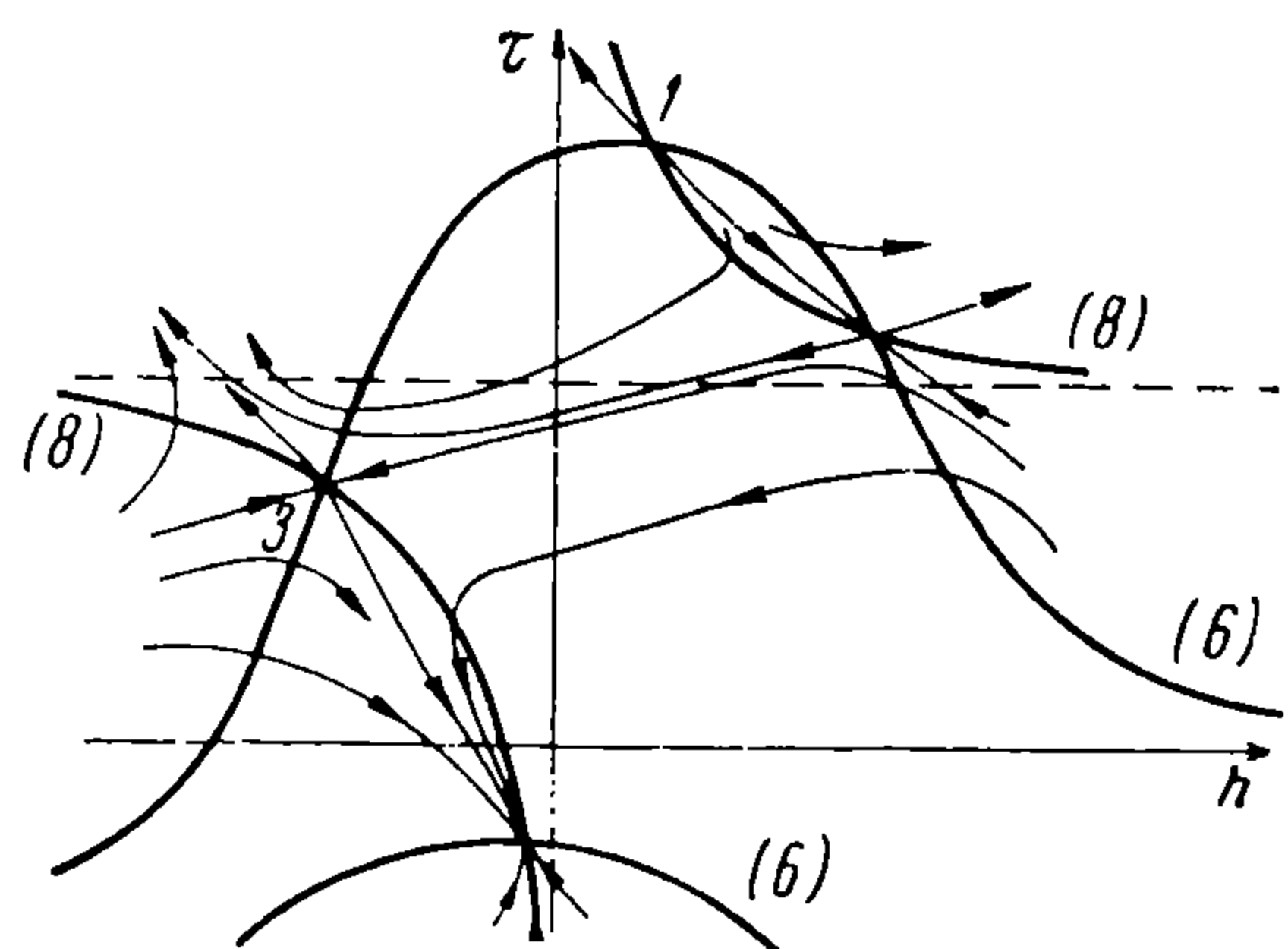
Здесь  $a_+$ ,  $a_-$  — быстрая и медленная магнитозвуковые скорости.

Если имеются все четыре особые точки, то две из них лежат выше прямой  $\tau = h_n^2$ , а две другие — ниже ее. Если имеются только две особые точки, то они лежат по одну сторону от этой прямой. Переход  $1 \rightarrow 2$  называется быстрой магнитогидродинамической ударной волной, переход  $3 \rightarrow 4$  называется медленной магнитогидродинамической ударной волной, а все остальные переходы — промежуточными ударными волнами. Если две особые точки сливаются в одну (изоклины (6) и (8) касаются), то скорость потока в этой точке равна одной из магнитозвуковых скоростей и ударная волна выражается в слабое возмущение.

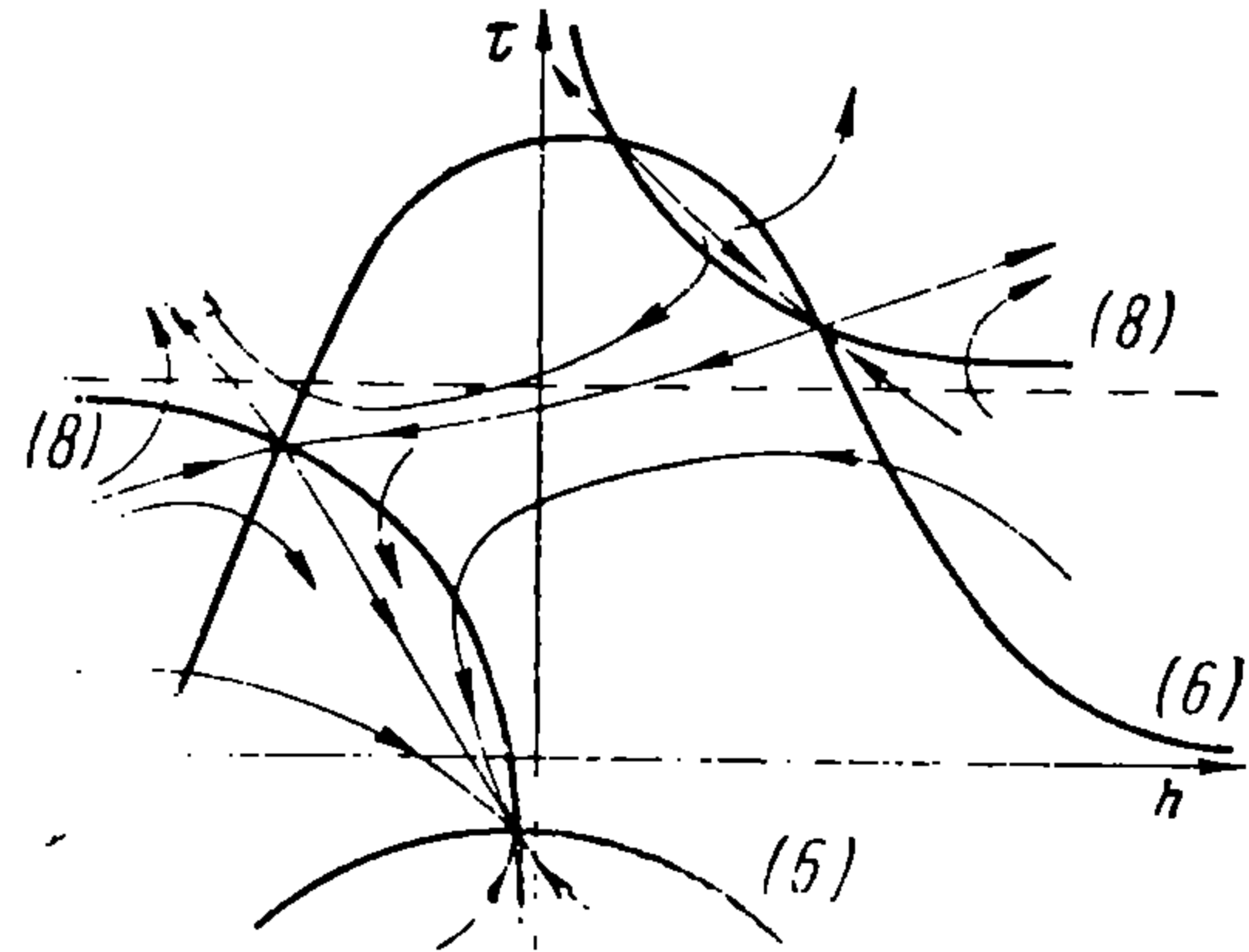
Можно показать, что если кривые (6) имеют вид, представленный на фиг. 2 и 4, то все особые точки лежат на одной ветви кривой (6).

Проведенное исследование изоклин (6) и (8) позволяет качественно построить поле интегральных кривых системы дифференциальных уравнений (3). Если изоклины (6) и (8) имеют вид, представленный на фиг. 3, то соответствующее поле интегральных кривых в зависимости

от величины отношения диссипативных коэффициентов  $\mu/\rho_0 v_m$  имеет вид, представленный на фиг. 5, 6 и 7. Во всех остальных случаях, если имеются четыре особые точки, характер интегральных кривых не меняется<sup>1</sup>. Если имеются две особые точки (та или другая пара), то поведение интегральных кривых в окрестности этих точек остается тем же самым, что и при наличии четырех особых точек.

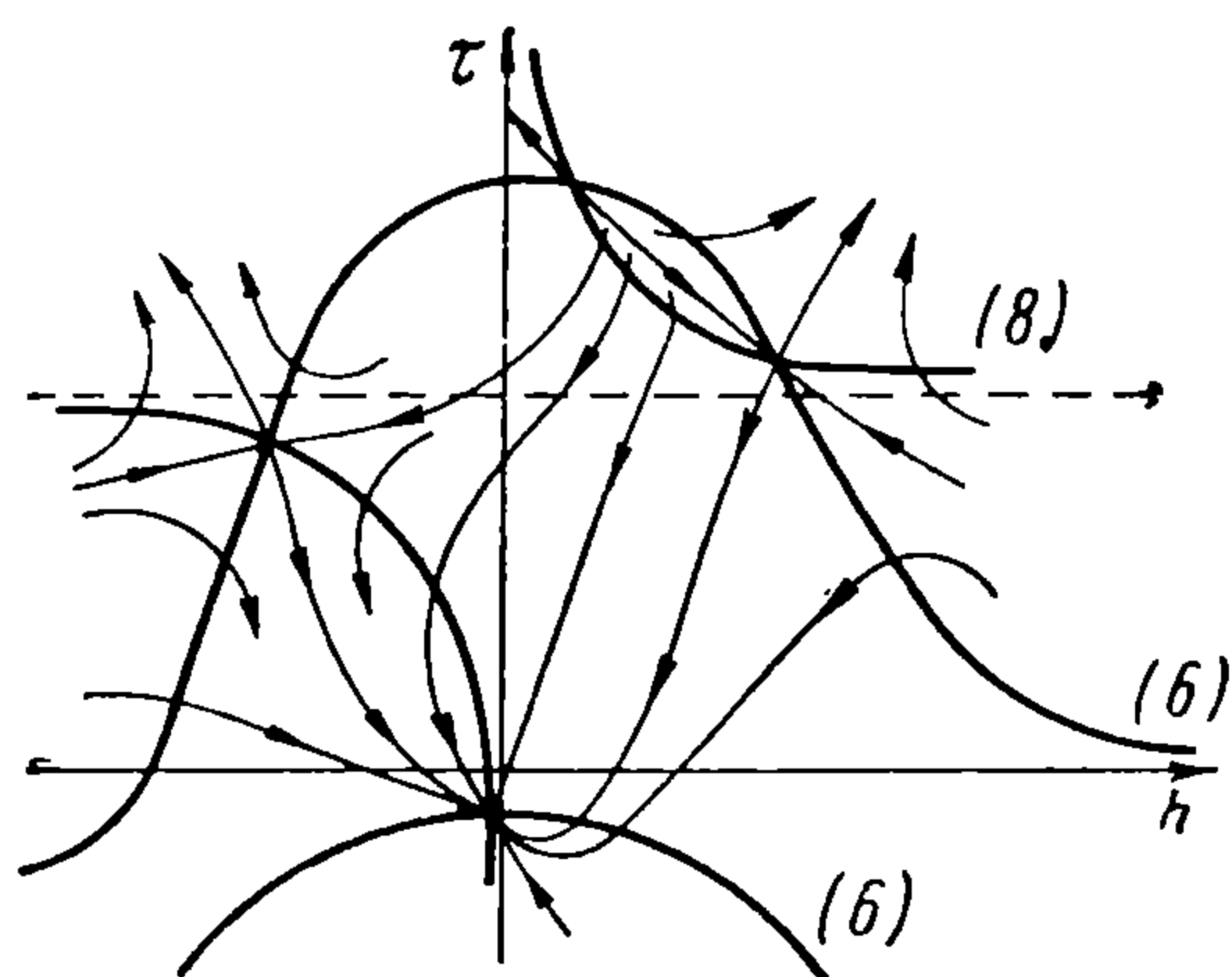


Фиг. 5



Фиг. 6

Картина интегральных кривых, представленная на фиг. 5, соответствует случаю, когда отношение  $\mu/\rho_0 v_m$  мало. В этом случае точки 1 и 2, 3 и 4 соединяются между собой попарно единственными интегральными кривыми, представляющими соответственно структуру быстрой и медленной ударных волн. Точки из первой пары и точки из второй



Фиг. 7

пары не соединяются между собой интегральными кривыми, что соответствует отсутствию структуры у промежуточных ударных волн. Если  $\mu/\rho_0 v_m \rightarrow 0$ , то интегральные кривые, представляющие структуру быстрой и медленной ударных волн, стремятся к совпадению с соответствующими отрезками изоклины  $dh/dx = 0$ .

Фиг. 6 соответствует одному единственному значению отношения  $\mu/\rho_0 v_m = (\mu/\rho_0 v_m)_*$ , при котором интегральная кривая, выходящая из точки 2, входит в точку 3. Это значение  $\mu/\rho_0 v_m$  разделяет случаи, представленные на фиг. 5 и 7. При этом интегральными кривыми соединены точки  $1 \rightarrow 2$  (быстрая волна),  $3 \rightarrow 4$  (медленная волна) и  $2 \rightarrow 3$  (промежуточная волна), причем интегральные кривые, соединяющие эти особые точки, — единственные. Возможны также сложные переходы  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ ,  $2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ ,  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ .

При больших значениях  $\mu/\rho_0 v_m$  осуществляется случай, представленный на фиг. 7, когда интегральными кривыми соединены следующие пары особых точек:  $1 \rightarrow 2$ ,  $3 \rightarrow 4$ ,  $1 \rightarrow 3$ ,  $1 \rightarrow 4$ ,  $2 \rightarrow 4$ , причем все эти пары точек соединяются единственными интегральными кривыми, за исключением пары  $1 \rightarrow 4$ , которая соединяется бесчисленным множеством

<sup>1</sup> В случае расположения изоклин, представленном на фиг. 2, поведение интегральных кривых уравнения (9) было изучено в дипломной работе А. Н. Воинова (Московский Гос. ун-т, механ.-мат. факультет, 1960).

интегральных кривых. Из сложных переходов имеют место следующие:  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4$ ,  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ .

Если  $\mu / \rho_0 v_m \rightarrow \infty$ , то интегральные кривые стремятся к совпадению с изоклиной  $d\tau/dx = 0$ . Однако в тех случаях, когда в начальной точке движение сверхзвуковое, а в конечной точке — дозвуковое, внутри структуры ударной волны возникает газодинамическая ударная волна, в которой  $H = \text{const}$ . Отметим, что если такая ударная волна существует, то структура быстрой магнитогидродинамической ударной волны завершается газодинамическим скачком, а структура медленной ударной волны начинается с газодинамического скачка. Структура промежуточных ударных волн также может содержать газодинамические скачки, причем в волне  $1 \rightarrow 3$  газодинамический скачок может находиться в начале, в волне  $2 \rightarrow 4$  — в конце, в волне  $1 \rightarrow 4$  — в произвольной точке структуры.

Таким образом, в рассматриваемой постановке быстрые и медленные волны при любом отношении диссипативных коэффициентов обладают структурой.

В тех случаях, когда имеются четыре особые точки, структурой могут обладать и промежуточные ударные волны.

Переход  $2 \rightarrow 3$  возможен только при

$$\frac{\mu}{\rho_0 v_m} = \left( \frac{\mu}{\rho_0 v_m} \right)_*$$

Переходы  $1 \rightarrow 3$  и  $2 \rightarrow 4$  существуют и единственны при

$$\frac{\mu}{\rho_0 v_m} > \left( \frac{\mu}{\rho_0 v_m} \right)_*$$

Переход  $1 \rightarrow 4$  возможен при

$$\frac{\mu}{\rho_0 v_m} > \left( \frac{\mu}{\rho_0 v_m} \right)_*$$

и может происходить по бесчисленному множеству интегральных кривых.

Интересно отметить, что при данной постановке задачи о структуре ударных волн эволюционные в смысле [4] ударные волны отличаются от неэволюционных тем, что только они обладают структурой при любом соотношении между диссипативными коэффициентами.

*Замечание.* Утверждение П. Жермена [2] о том, что в рассматриваемой постановке медленные ударные волны не всегда обладают структурой, неверно. Оно основано на предположении, что точка пересечения нижней ветви изоклины  $d\tau/dx = 0$  с прямой  $h = h_0$ , проходящей через точку 3, может лежать ниже оси  $h$ . Однако эта точка связана с точкой 3 обычным газодинамическим ударным переходом и должна лежать в области  $\tau > 0$ , если давление в точке 3 положительно.

Поступила 16 VII 1960

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Marshall W. The structure of magnetohydrodynamic shock waves. Proc. Roy. Soc. A, 1955, vol. 233. а). Есть русск. пер. Проблемы современной физики. 1957, №7.
2. Germain P. Contribution a la théorie des ondes de choc en magnétodynamique des fluides. OFFICL. National. D'études et de Recherches Aeronautiques, 1959, № 97.
3. Ludford C. S. S. The structure of a hydromagnetic shock in steady plane motion. J. Fluid Mechanics, 1959, vol. 5. part 1.
4. А х и з е р А. И., Л ю б а р с к и й Г. Я., П о л о в и н Р. В. Об устойчивости ударных волн в магнитной гидродинамике. ЖЭТФ, 1958, т. 35, № 3.