

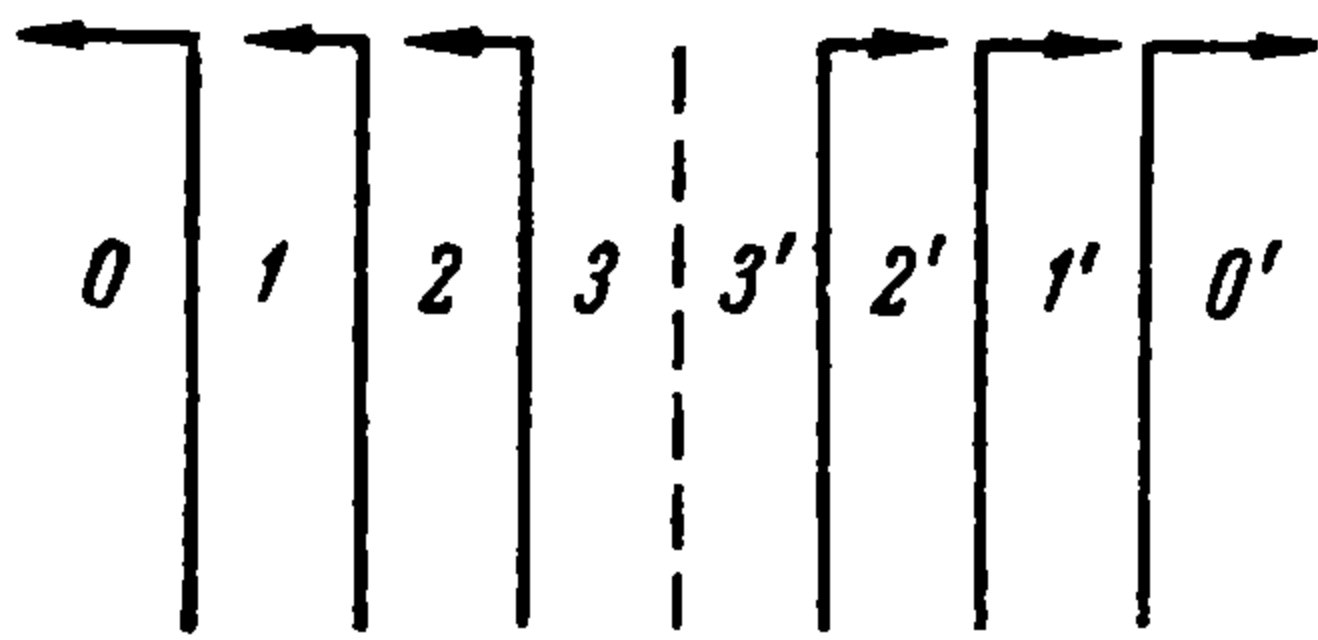
РАСПАД ПРОИЗВОЛЬНОГО РАЗРЫВА В МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

В. В. Гогосов

(Москва)

Пусть в момент времени $t = 0$ параметры среды p, ρ, H, \mathbf{b} терпят разрыв на плоскости $x = 0$. Поскольку на этой плоскости не выполняются соотношения законов сохранения, начальный разрыв не может существовать как таковой. Цель работы — определить движение среды в последующие моменты времени.

К задаче о распаде произвольного разрыва сводятся многочисленные задачи: о столкновениях масс газа, движущихся навстречу друг другу; о различных столкновениях плоских поверхностей разрывов; о разлете газов друг от друга; задачи о соприкосновении в начальный момент времени двух неподвижных масс газа, сжатых до различных давлений и находящихся в различных магнитных полях и т. д.



Фиг. 1

Поверхность начального разрыва может быть обязательно плоскостью. Тогда наше рассмотрение справедливо в начальный момент времени на отдельных, достаточно малых участках поверхности начального разрыва, каждый из которых можно считать плоским.

Из автомодельности задачи следует, что движение должно состоять из идущих в обе стороны различных комбинаций: быстрых (S^+) и медленных (S^-) ударных волн; быстрых (R^+) и медленных (R^-) автомодельных волн разрежения, вращательных разрывов (A), разделенных контактным разрывом (K). Символы S^+, S^-, R^+, R^-, A, K обозначают соответствующие волны и разрывы. Скорость распространения этих волн такова [1], что впереди идет S^+ - или R^+ -волна, за ней A -разрыв, за которым следует S^- - или R^- -волна, таким образом в обе стороны могут идти по три волны, разделенных контактным разрывом. Схематически задача о распаде произвольного разрыва изображена на фиг. 1. Если учесть, что какие-то из семи волн могут отсутствовать, то всего возможны 648 различных комбинаций волн и разрывов, которые могут осуществляться в зависимости от начальных параметров среды слева и справа от разрыва.

В газовой динамике задача о распаде произвольного разрыва была впервые решена Н. Е. Кочиным [2,3].

В работе [4] рассматривалась задача о распаде разрыва в проводящей среде, когда на плоскости разрыва терпит скачок только тангенциальная составляющая скорости. Все остальные величины непрерывны, а магнитное поле нормально к плоскости разрыва. Эта задача эквивалентна задаче о поршне, движущемся с известной скоростью параллельно самому и нормально полю. Перед поршнем может идти только одна комбинация волн $S^+ R^-$.

В работе [5] показано, что когда магнитное поле в начальный момент параллельно плоскости разрыва, задача сводится к газодинамической. В этих предположениях задача о распаде произвольного разрыва рассматривалась в работах [6,7,8].

Случай, когда начальный разрыв мал, а следовательно, и вторичные разрывы также малы, рассматривался в работе [9]. Задача решена в силу возможности из-за сделанных предположений решить систему семи уравнений с семью неизвестными, полученную путем приравнивания суммы скачков каждой магнито-гидродинамической величины на семи возникающих волнах первоначальному скачку.

Так как жидкость относительно контактного разрыва покоится, то в силу идеальной проводимости среды контактный разрыв можно рассматривать как идеально проводящий поршень, движущийся со скоростью, равной скорости контактного разрыва. В работе [10], предполагая $H^2/8\pi \ll p$, $|\Delta b| \ll c$, где c — скорость звука, Δb — скачок скорости на начальном разрыве, удалось выразить скорость контактного разрыва через параметры среды, лежащей по обе стороны от начального разрыва, и тем самым свести задачу к решенной в этой же работе задаче о поршне.

В общем случае распада произвольного разрыва не представляется возможным ни решить соответствующую систему уравнений, ни свести задачу о распаде к задаче о поршне [11].

В настоящей работе предлагается метод решения, состоящий в построении диаграмм в пространстве $\Delta u = u_0 - u_0'$, $\Delta v = v_0 - v_0'$, $\Delta w = w_0 - w_0'$, при помощи которых, зная Δu , Δv , Δw , можно определить комбинацию разрывов, являющуюся решением задачи, после чего, выписывая соотношения на разрывах, не представляет принципиальной трудности получить численно окончательное решение.

Параметры, характеризующие среду в начальный момент времени, будем обозначать значком 0. Параметры среды, расположенной в начальный момент справа от плоскости разрыва, а в последующие моменты времени справа от плоскости контактного разрыва, будут писаться со штрихом. Параметры среды, расположенной слева от соответствующих поверхностей, будут писаться без штриха.

Параметры среды за первой волной, идущей влево или вправо, будем обозначать цифрой 1, за второй — 2, за третьей — 3.

§ 1. Условия на ударных] волнах. А. Г. Куликовским¹ отмечено, что условия на ударной волне можно разрешать через параметры состояния перед волной и тангенциальную составляющую магнитного поля за волной. Соответствующие выражения были получены в работе [12] и ниже приводятся в виде, сообщенном автору А. А. Барминым

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{h_0 Z_{\pm} + 1}{h_1 Z_{\pm} + 1} \quad (1.1)$$

$$p_1 = p_{\pm}(p_0, H_{\tau_0}, H_{\tau_1}) \equiv \gamma(h_1 - h_0) \left[Z_{\pm} - \frac{1}{2}(h_1 + h_0) \right] \quad (1.2)$$

$$(U - u_0)^2 = 1 + h_1 Z_{\pm} \quad (1.3)$$

$$u_1 - u_0 = \pm f_+, \quad v_1 - v_0 = \mp \varphi_+ \operatorname{sign} H_{\tau_0} \quad (1.4)$$

$$u_1 - u_0 = \pm f_-, \quad v_1 - v_0 = \pm \varphi_- \operatorname{sign} H_{\tau_0} \quad (1.5)$$

Здесь

$$f_{\pm} = \frac{h_1 - h_0}{\sqrt{1 + h_1 Z_{\pm}}} Z_{\pm} V_0, \quad \varphi_+ = \left| \frac{h_1 - h_0}{\sqrt{1 + h_1 Z_+}} V_0 \right|$$

$$\varphi_- = \left| \frac{h_1 - h_0}{\sqrt{1 + h_1 Z_-}} V_0 \right|, \quad h = \frac{H_{\tau}}{H_n}, \quad P = \frac{4\pi\gamma p}{H_n^2} = \frac{c^2}{V^2}$$

Верхний знак в формулах (1.4) и (1.5) соответствует волне, идущей вправо, нижний — волне, идущей влево; $Z_{\pm}(h_1)$ — корень уравнения, имеющий физический смысл

$$Z^2 [(\gamma + 1)h_0 - (\gamma - 1)h_1] - 2Z \left(P_0 - 1 + \frac{\gamma}{2}h_0^2 - \frac{\gamma - 2}{2}h_1 h_0 \right) - (h_1 + h_0) = 0$$

¹ Куликовский А. Г. Диссертация, М., МГУ, 1958.

Корень Z_+ , которому соответствует неравенство $|h_1| - |h_0| > 0$, относится к S^+ -волне, корень Z_- , которому соответствует $|h_1| - |h_0| < 0$, относится к S^- -волне.

Если $H_{\tau_0} > 0$, то в S^+ -волне будет $h_1 - h_0 > 0$, $Z_+ > 0$, а в S^- -волне $h_1 - h_0 < 0$, $Z_- < 0$. Поэтому $f_{\pm} > 0$. Если $H_{\tau_0} < 0$, то в S^+ -волне $h_1 - h_0 < 0$, $Z_+ < 0$, в S^- -волне $h_1 - h_0 > 0$, $Z_- > 0$. И опять $f_{\pm} > 0$. Здесь и в дальнейшем u, v, w — абсолютные скорости газа, а U — скорость ударной волны, V — альфеновская скорость, нуль в индексе в этом и следующих двух параграфах относится к состоянию перед волной, индекс 1 — к состоянию за волной.

§ 2. Условия на волнах разрежения. Условия на волнах разрежения были разрешены Фридрихсом [4]

$$|H_{\tau_1}| = H_{\pm}(p_0, H_{\tau_0}, p_1) \equiv \sqrt{(q_{\pm} - 1)(P - q_{\pm}^{-1})H_n^2} \quad (2.1)$$

$$u_1 - u_0 = \mp \psi_{\pm}, \quad v_1 - v_0 = \pm \chi_{\pm} \text{sign } H_{\tau_0} \quad (2.2)$$

$$u_1 - u_0 = \mp \psi_{\pm}, \quad v_1 - v_0 = \mp \chi_{\pm} \text{sign } H_{\tau_0} \quad (2.3)$$

$$\psi_{\pm} = \frac{V_0}{\gamma P_0^{1/2}} \int_{P_1}^{P_0} \left(\frac{P}{P_0}\right)^{-\frac{\gamma+1}{2\gamma}} q(P_0, q_0, P) dP$$

$$\chi_{\pm} = \frac{V_0}{\gamma P_0^{1/2}} \int_{P_1}^{P_0} \left(\frac{P}{P_0}\right)^{-\frac{\gamma+1}{2\gamma}} \left(\frac{1 - q_{\pm}}{1 - Pq_{\pm}}\right)^{\frac{1}{2}} dP \quad \left(q_{\pm} = \frac{c_{\pm}^2}{c^2}\right) \quad (2.4)$$

где c_{\pm} — скорость распространения слабых, быстрых и медленных магнитогидродинамических волн, а $q_{\pm} = q(P_0, q_0, P)$ является решением уравнения

$$\frac{dP}{dq} + \frac{\theta P}{1 - q} = \frac{\theta}{q^2(1 - q)}, \quad \theta = \frac{\gamma^2}{2 - \gamma}$$

Причем q_+ — имеющие физический смысл значения $q(P_0, q_0, P)$, большие единицы, а q_- — имеющие физический смысл значения $q(P_0, q_0, P)$, меньшие единицы.

Верхний знак в (2.2) и в (2.3) соответствует волне разрежения, идущей вправо, нижний знак — волне, идущей влево.

Следует отметить, что давление за ударной волной или волной разрежения и Δu при фиксированной абсолютной величине H_{τ_0} не меняются от перемены знака у H_{τ_0} .

§ 3. Условия на вращательном и контактном разрывах. На вращательном разрыве [13] терпят скачок только \mathbf{H}_{τ} и \mathbf{b}_{τ} — тангенциальные, составляющие магнитного поля и скорости, а величина их остается без изменения. Изменение поля и скорости связано соотношением

$$\mathbf{b}_{\tau_1} - \mathbf{b}_{\tau_0} = \mp (\mathbf{h}_1 - \mathbf{h}_0) V_0 \quad (3.1)$$

Верхний знак соответствует волне, идущей вправо, нижний — волне, идущей влево. На контактном разрыве [13]

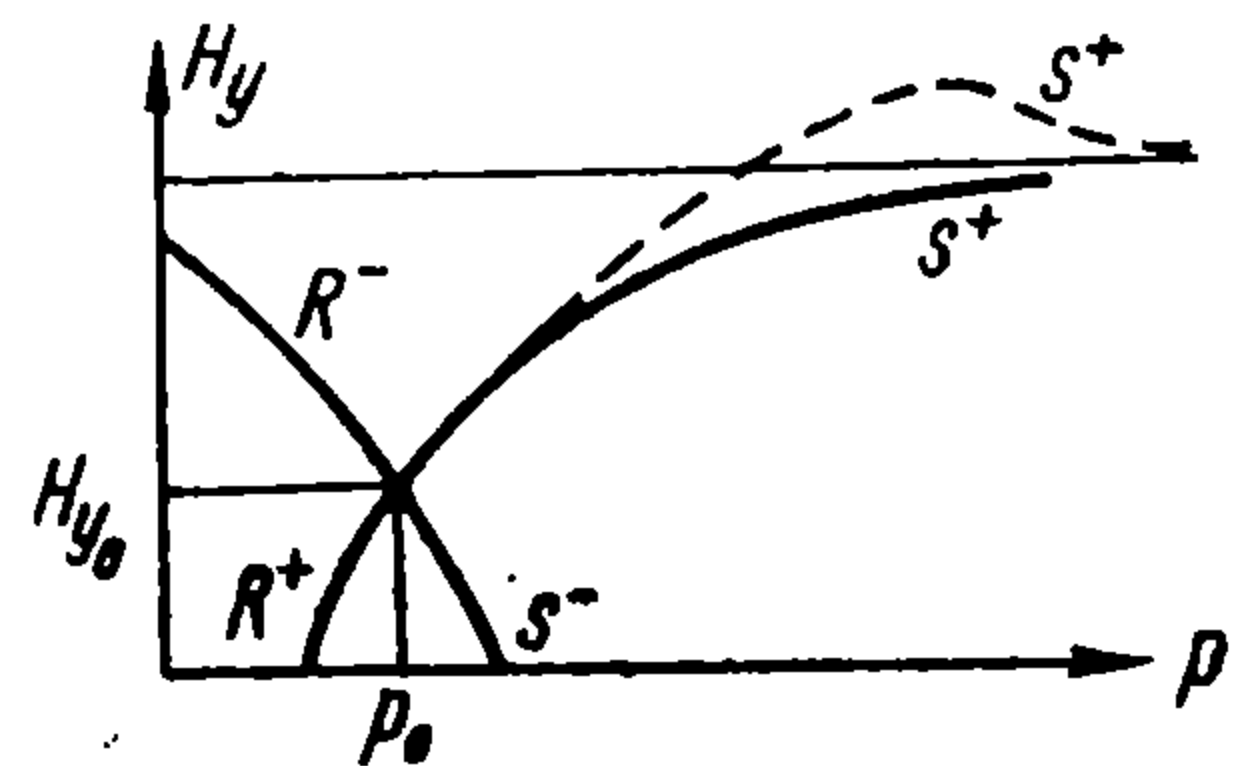
$$\mathbf{H}_{\tau_1} = \mathbf{H}_{\tau_0}, \quad p_1 = p_0, \quad \mathbf{b}_{\tau_1} = \mathbf{b}_{\tau_0} \quad (3.2)$$

Плотность и остальные термодинамические величины могут испытывать скачок.

В дальнейшем не будет рассматриваться случай тангенциального разрыва ($H_n = 0$), так как на всех разрывах нормальная составляющая магнитного поля непрерывна, а случай распада произвольного разрыва, когда поле при $t = 0$ параллельно поверхности разрыва, сводится к чистой газовой динамике [6].

Рассмотрим сначала плоскую задачу распада произвольного разрыва, когда $w_0 = w_0' = H_{z_0} = H_{z_0}' = 0$.

§ 4. Комбинации из двух волн и контактного разрыва. Рассмотрим возможность распада произвольного разрыва на две ударные или автомодельные волны, разделенные контактным разрывом. На контактном разрыве необходимо выполнение равенств (3.2). Посмотрим, можно ли удовлетворить этим равенствам с помощью каких-либо двух ударных или автомодельных волн.



Фиг. 2

Рассмотрим возможность комбинаций R^-KR^- и R^+KR^+ . Из условий на контактном разрыве (3.2) и из (2.1) следует: $(q_{\pm 1} - q_{\pm 1}') (P_1 q_{\pm 1} q_{\pm 1}' - 1) = 0$. Нетрудно видеть, что $P_1 q_{-1} q_{-1}' < 1$ в R^- -волне и $P_1 q_{+1} q_{+1}' > 1$ в R^+ -волне. Поэтому $q_{\pm 1} = q_{\pm 1}'$. Это означает, что R^-KR^- - и R^+KR^+ -комбинации возможны только в том случае, когда точка p_0', H_{y_0}' лежит на кривой, изображающей связь p и H_y соответственно в R^- -, R^+ -волнах, проходящих через точку p_0, H_{y_0} .

Ясно также, что эти комбинации исключают одна другую. Когда $p_0 > p_0', |H_{y_0}| > |H_{y_0}'|$, возможна R^+KR^+ -комбинация, когда $p_0 > p_0', |H_{y_0}| < |H_{y_0}'|$, возможна R^-KR^- -комбинация.

В дальнейшем будем предполагать для определенности, что

$$p_0 > p_0', \quad |H_{y_0}| > |H_{y_0}'|, \quad H_{y_0} H_{y_0}' > 0.$$

Рассмотрим кривые, изображающие связь H_y и p в S^+ -, S^- -, R^+ -, R^- -волнах (фиг. 2), описываемые соответственно уравнениями (1.2) и (2.1). Пунктиром на фиг. 2 отмечен возможный вид линии, соответствующей S^+ -волне. Из рассмотрения этих кривых следует, что из двух ударных или автомодельных волн и контактного разрыва возможны следующие комбинации (фиг. 3—6)

$$1) \quad R^-KS^+, \quad R^+KS^-, \quad S^+KS^+, \quad R^+R^-K, \quad KS^-S^+ \quad (4.1)$$

если $p_0 > p_+(p_0', H_{y_0}', H_y = H_{y_0}), \quad H_{y_0}' > H_+(p_0, H_{y_0}, p = p_0')$

$$2) \quad R^+KS^+, \quad S^-KS^+, \quad R^+KS^-, \quad R^+R^-K, \quad KR^-S^+ \quad (4.2)$$

если $p_0 < p_+(p_0', H_{y_0}', H_y = H_{y_0}), \quad H_{y_0}' > H_+(p_0, H_{y_0}, p = p_0')$

$$3) \quad R^+KR^-, \quad S^-KS^+, \quad KR^-S^+, \quad R^+S^-K \quad (4.3)$$

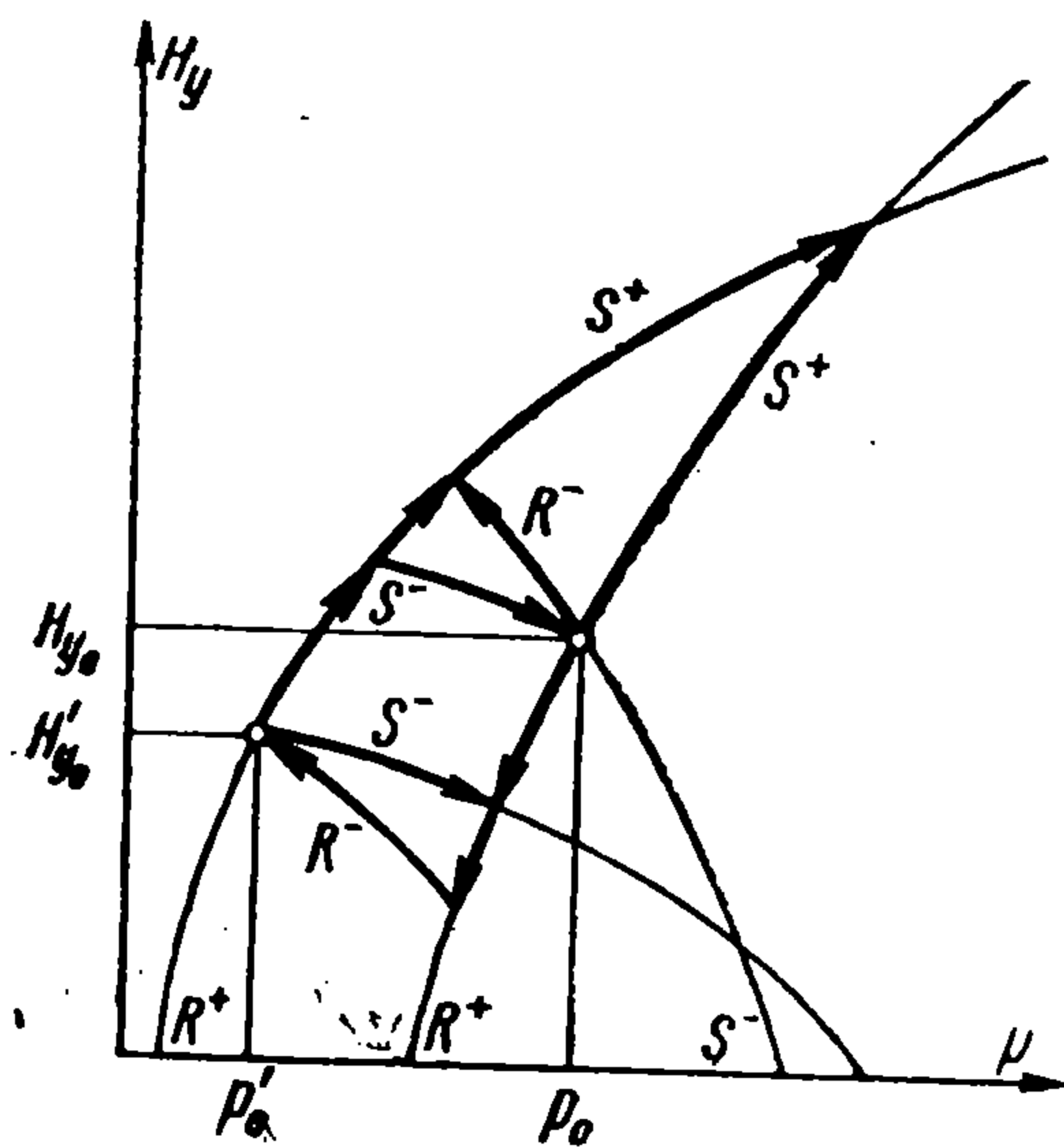
если $p_0 < p_+(p_0', H_{y_0}', H_y = H_{y_0}), \quad H_{y_0}' < H_+(p_0, H_{y_0}, p = p_0')$

$$4) \quad R^-KS^+, \quad S^+KS^+, \quad R^+KR^-, \quad R^+KS^+, \quad KS^-S^+, \quad R^+S^-K$$

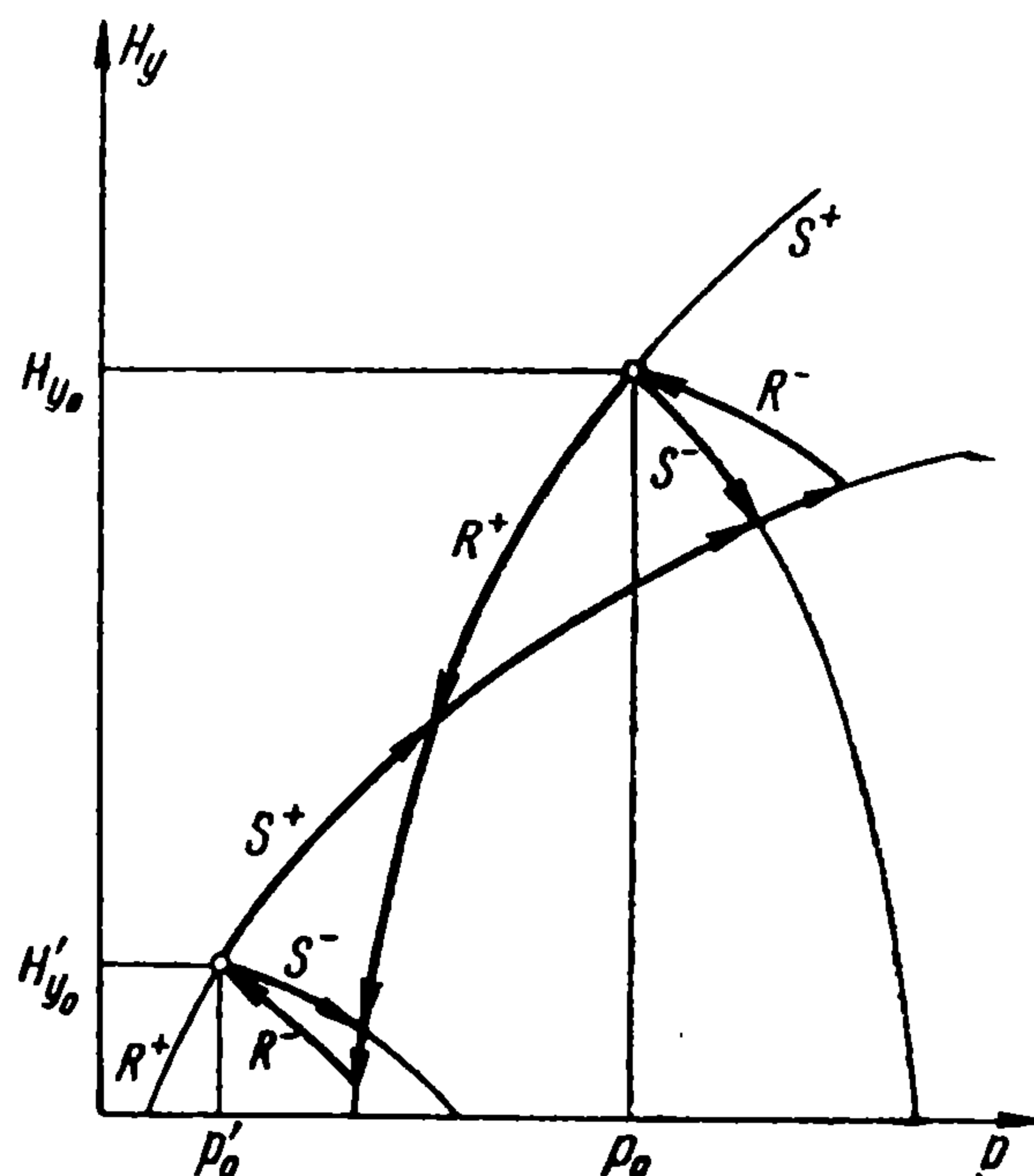
если $p_0 > p_+(p_0', H_{y_0}', H_y = H_{y_0}), \quad H_{y_0}' < H_+(p_0, H_{y_0}, p_0 = p_0')$ (4.4)

S^-KS^- -комбинация возможна, если $p_-(p_0', H_{y_0}', H_y = 0) > p_-(p_0, H_{y_0}, H_y = 0)$

В случае, описываемом неравенствами (4.2) и (4.3), точка $p_+(p_0', H_{y_0}', H_y = H_{y_0})$ (фиг. 4), а также в случае, описываемом неравенствами (4.1) и (4.2), точка $H_+(p_0, H_{y_0}, p = p_0')$ (фиг. 3, 4) могут и не существовать.

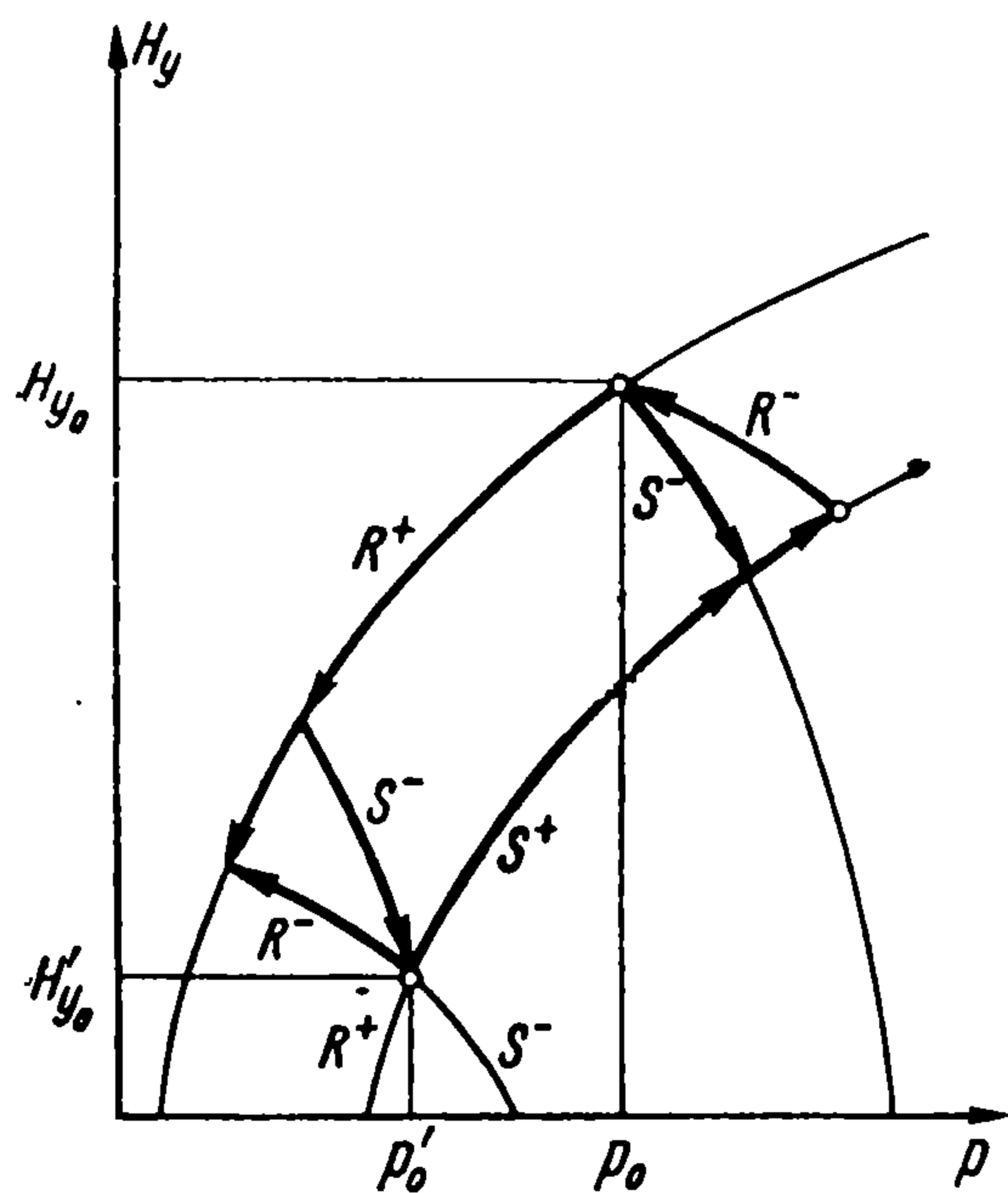


Фиг. 3

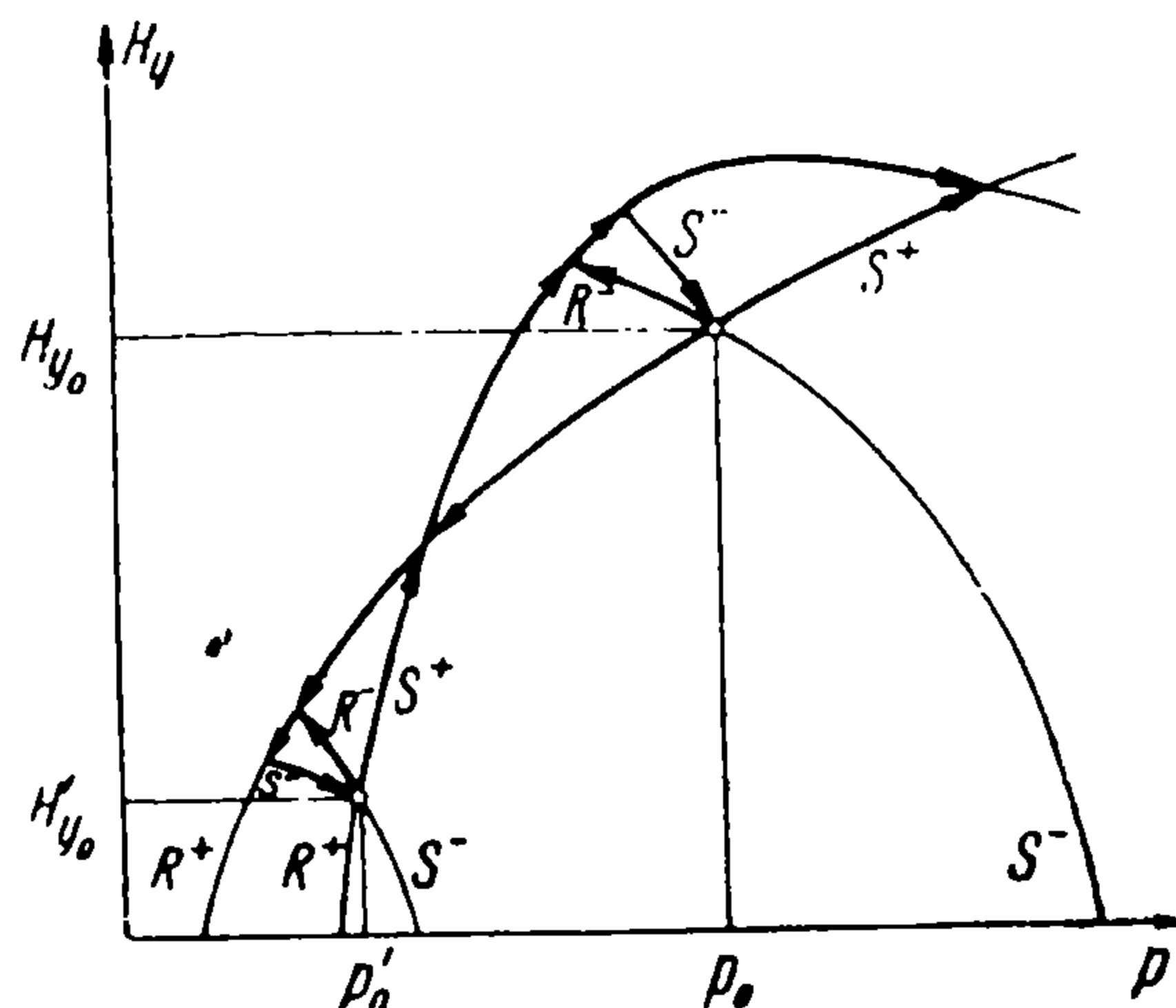


Фиг. 4

Фиг. 3—6 в плоскости $H_y p$ и фиг. 7—10 в плоскости $\Delta u \Delta v$ относятся соответственно к случаям, определяемым неравенствами (4.1) — (4.4). Для определенности предполагалось, что $H_{y_0} > 0, H_{y_0}' > 0$.



Фиг. 5

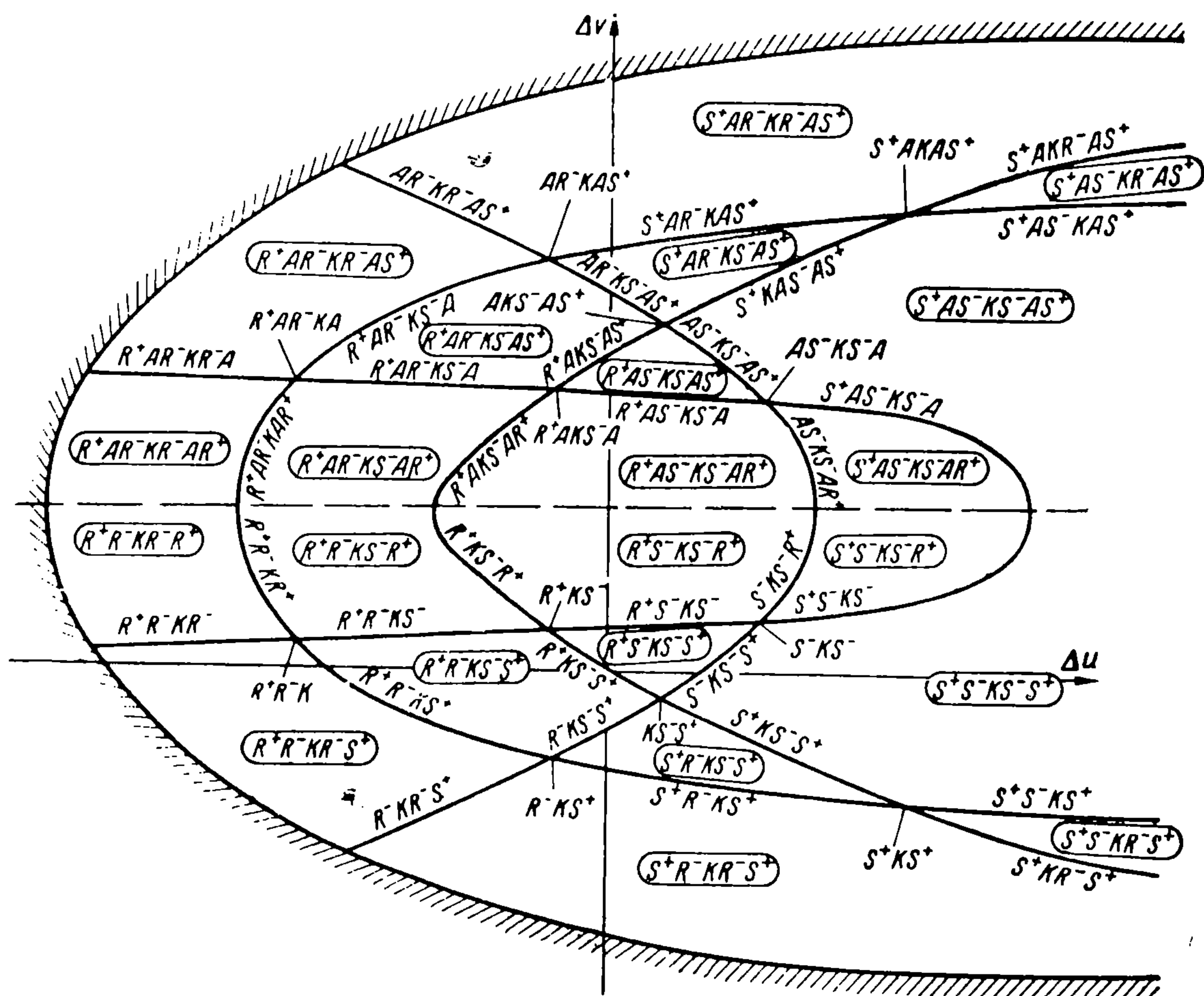


Фиг. 6

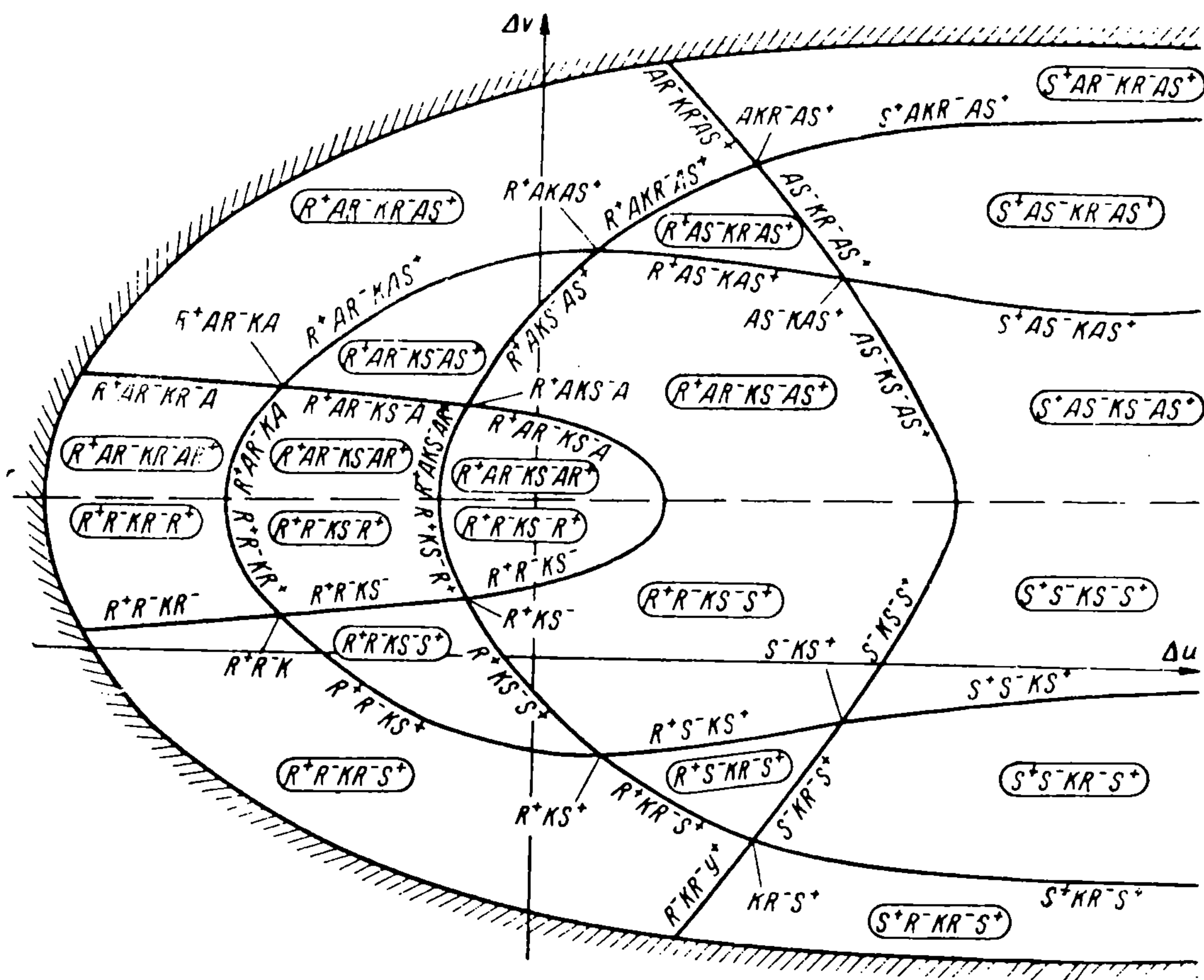
Если в случае, описываемом неравенствами (4.2) и (4.3), имеет место S^+KS^+ -комбинация, то на фиг. 4, 5, 8, 9 появится точка, ей соответствующая. См. замечание в конце § 6.

Если $H_{y_0} < 0, H_{y_0}' < 0$, то фиг. 3—6 и 7—10 не изменятся, если по вертикальной оси откладывать вместо значений H_y и Δv соответственно значения $-H_y$ и $-\Delta v$. Стрелками обозначены направления изменения величин в S^+, S^-, R^+, R^- -волнах.

Во всех этих случаях, если комбинация из двух волн возможна, то задание $p_0, H_{y_0}, p_0', H_{y_0}'$ однозначно определяет p_1, H_{y_1} , а значит, и $\Delta u, \Delta v$. В плоскости $\Delta u \Delta v$ комбинациям рассмотренного типа соответствуют точки.

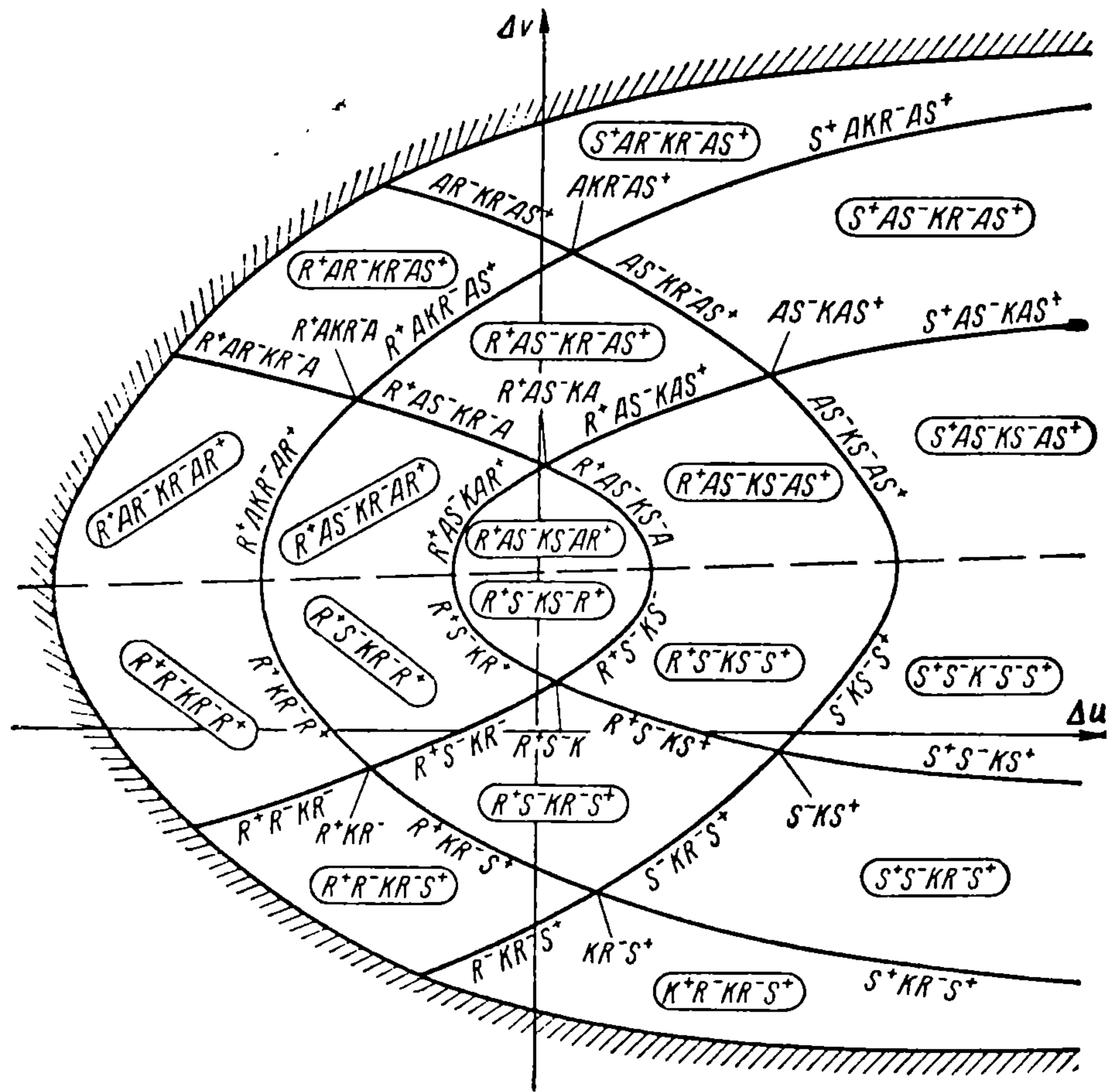


Фиг. 7

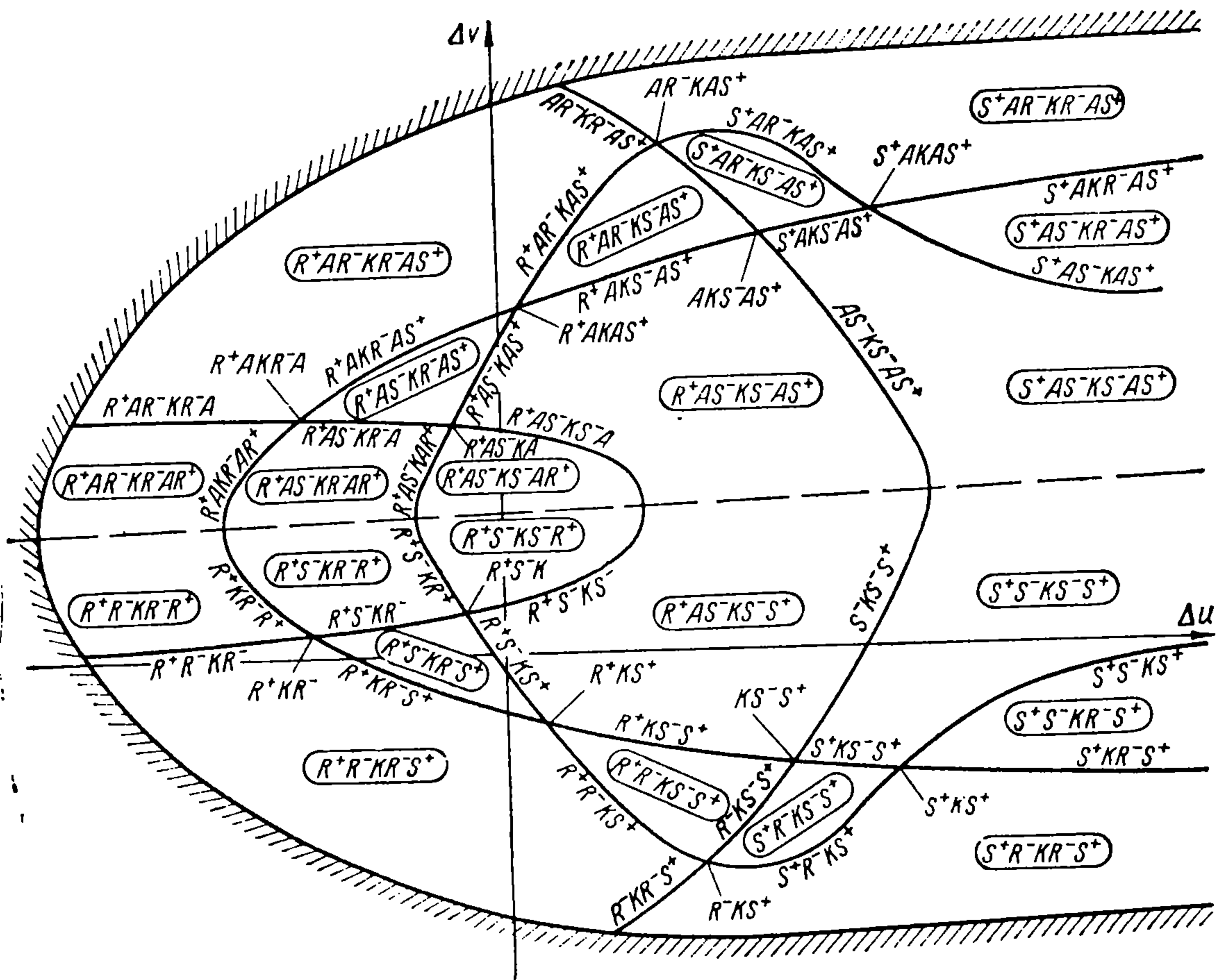


Фиг. 8

Если неравенства (4.1) — (4.4) переходят в равенства, то совокупности комбинаций, соответствующие этим равенствам, являются частными случаями рассмотренных, что легко видно из фигур в плоскости $H_{\nu\rho}$.



Фиг. 9



Фиг. 10

§ 5. Комбинации, состоящие из трех волн и контактного разрыва. Рассмотрим теперь комбинации, состоящие из трех ударных или авто- модельных волн и контактного разрыва. Покажем, что в плоскости $\Delta u \Delta v$ комбинациям такого типа соответствует линия.

В самом деле, комбинациям из двух волн на плоскости $\Delta u \Delta v$ соответствовали, точки, т. е. Δu и Δv были постоянными, зависящими

только от $p_0, H_{v_0}, p_0', H_{v_0}'$. Добавление еще одной волны означает добавление в уравнения для $\Delta u, \Delta v$ нового члена и нового независимого параметра, характеризующих интенсивность этой волны. Эти однопараметрические уравнения изображают линию на плоскости $\Delta u \Delta v$.

Покажем, как составить эти уравнения, на примере $R^-KR^-S^+$ -комбинации. Из формул (1.4), (1.5), (2.2), (2.3) имеем

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 + \psi_- = u_2' = u_1' - \psi_- = u_0' + f_+ - \psi_- \\ v_1 &= v_0 + \chi_- = v_2' = v_1' - \chi_- = v_0' - \varphi_+ - \chi_- \end{aligned}$$

Отсюда

$$\Delta u \equiv u_0 - u_0' = -\psi_- - \psi_- + f_+, \quad \Delta v \equiv v_0 - v_0' = -\chi_- - \chi_- - \varphi_+ \quad (5.1)$$

Из условий на контактном разрыве $p_1' = p_1'(p_0, H_{v_0}, p_0', H_{v_0}')$, а $p_1 = p_2'$ — в этих уравнениях независимый параметр, определяющий интенсивность R^- -волн. Когда $p_1 = p_1'$, интенсивность идущей вправо R^- -волны равна нулю. При этом значении параметра на кривой, описываемой уравнениями (5.1), находимся в точке, которой соответствует комбинация R^-KS^+ .

При $p_1 = 0$ получается точка, которой соответствует комбинация $R_{\max}^- KR_{\max}^- S^+$, когда интенсивность R^- -волн максимальна. После прохождения их образуется вакуум. Нетрудно видеть, что в точке R^-KS^+ кроме линии $R^-KR^-S^+$ оканчиваются линии, которым соответствуют комбинации $R^+R^-KS^+$, $S^+R^-KS^+$, $R^-KS^-S^+$, когда интенсивность соответственно R^+ , S^+ -волн, идущих влево, и S^- -волны равна нулю.

Из уравнений этих линий, составленных аналогично уравнениям (5.1), следует, что они расположены так, как показано на фиг. 7. Выясним, где оканчивается [линия $S^+R^-KS^+$, выходящая из точки R^-KS^- . Из фиг. 3 видно, что при движении по этой линии интенсивность R^- -волны будет уменьшаться до нуля. Таким образом, $S^+R^-KS^+$ -линия приходит в точку, соответствующую S^+KS^+ -комбинации. Из аналогичных рассуждений следует, что линии $R^+R^-KS^+$ и $R^-KS^-S^+$ оканчиваются соответственно в точках, которым соответствуют комбинации R^+R^-K и KS^-S^- . Во все эти точки могут приходиться еще по три линии и т. д.

Из сказанного следует: комбинациям, [состоящим из трех ударных или автотельных волн и контактного разрыва в плоскости $\Delta u \Delta v$, соответствуют линии. Точкам пересечения линий соответствуют рассмотренные выше комбинации, состоящие из двух ударных или автотельных волн и контактного разрыва. Каждая такая точка отделяет одну линию от другой. Линии могут простираться до бесконечности. Например, $S^+S^-KS^+$ -, $S^+KR^-S^+$ -линии на фиг. 7. Кроме того, линии могут оканчиваться в точках, соответствующих максимальной интенсивности волн. Так, например, из фиг. 3, 7 видно, что линия $R^+R^-KR^+$ продолжается до тех пор, пока интенсивность R^+ -волн не будет максимальной, а линии $R^+KS^-R^+$, $S^-KS^-R^+$, $S^+KS^-S^+$ оканчиваются в точках, где интенсивность R^+ , S^- -волн максимальна, т. е. когда тангенциальная, составляющая магнитного поля за R^+ -или S^- -волнами равна нулю. Линию, соединяющую точки, соответствующие максимальной интенсивности R^- -и S^- -волн, будем называть линией раздела.

§ 6. Комбинации с вращательными разрывами. Поскольку линии, соответствующие некоторым комбинациям, являются продолжением одна другой, имеются (фиг. 7—10) по четыре различных линии, соответствующих рассматриваемым комбинациям из трех волн и контактного разрыва. Например (фиг. 7), одной линии соответствуют комбинации $R^-KR^-S^+$, $R^-KS^-S^+$, $S^-KS^-S^+$, $S^-KS^-R^+$, другой — $R^+R^-KR^-$, $R^+R^-KS^-$, $R^+S^-KS^-$, $S^+S^-KS^-$ и т. д. Исследуя уравнения этих линий, легко видеть, что максимальной ординатой каждой линии являются точки линии раздела.

Выше этой линии наши кривые можно продолжить, только включая в рассматриваемые комбинации вращательный разрыв. Поскольку рассмотрение ведется для случая $H_{y_0}H'_{y_0} > 0$, вращательный разрыв должен существовать по обе стороны от контактного разрыва или отсутствовать вовсе. В рассматриваемом плоском случае вращательный разрыв поворачивает тангенциальную составляющую магнитного поля на 180° и, меняя тангенциальную составляющую скорости, оставляет остальные параметры без изменения. Для каждой линии или точки, лежащей ниже линии раздела, имеется линия или точка выше линии раздела, которым соответствует комбинация из тех же волн, что и для нижней точки плюс два вращательных разрыва.

Рассмотрим для примера линию, которой соответствует $R^+R^-KR^+$ -комбинация (фиг. 7). Ее уравнения, составленные так же, как уравнения (5.1), будут

$$\Delta u \equiv u_0 - u_0' = -\psi_- - \psi_+' - \psi_-, \quad \Delta v \equiv v_0 - v_0' = \chi_+ + \chi_+' - \chi_-$$

Составим уравнение линии, которой соответствует $R^+AR^-KAR^+$ -комбинация. Из (2.2), (2.3), (3.1) следует

$$\Delta u = -\psi_+ - \psi_+' - \psi_-, \quad \Delta v = \chi_+ + \chi_+' + \chi_- + 2h_1V_1 + 2h_1'V_1'$$

Как видно из рассмотрения составленных уравнений для одних и тех же начальных параметров, Δu у обеих линий одно и то же, так как давление и абсолютная величина поля в области между волнами не меняются, а Δv отличается на величину

$$2(\chi_- + h_1V_1 + h_1'V_1')$$

Можно показать, что эта же сумма выражает расстояние между линиями $R^+R^-KS^+$ и $R^+AR^-KAS^+$, $S^+R^-KS^+$ и $S^+AR^-KAS^+$, $S^+KR^-S^+$ и $S^+AKR^-AS^+$, только, конечно, χ_- , h_1 , h_1' , V_1 , V_1' будут другими. Расстояние между точками S^+KS^+ и S^+AKAS^+ равно $2h_1(V_1 + V_1')$, т. к. $\chi_- = 0$ и $h_1 = h_1'$.

Покажем, что линии $R^+R^-KR^-$ и $R^+AR^-KAR^+$ приходят в одну точку на линии раздела, т. е. расстояние между линиями по оси Δv равно нулю на линии раздела.

Из соотношений на волнах разряжения следует:

- 1) если в R^+ -волне $H_\tau = 0$, то в этой точке $P < 1$,
- 2) если $P < 1$ и $H_\tau = 0$ впереди R^- -волны, то эта волна чисто газодинамическая, т. е. скачок тангенциальной составляющей скорости равен нулю. Но ведь на линии раздела за R^+ -волной, идущей влево, тангенциальная составляющая поля равна нулю ($H_{\tau 1} = 0$), а значит

$P < 1$. Следовательно, за этой R^+ -волной идет газодинамическая волна разрежения, в которой $\chi_- = 0$, откуда следует, что в R^+ -волне, идущей вправо, H_τ также должно изменяться до нуля ($H_{\tau 1}' = 0$), т. е. линии $R^+R^-KR^+$ и $R^+AR^-KAR^+$ приходят в одну точку на линии раздела.

Можно показать, что на линии раздела совпадают координаты линий $R^+KS^-R^+$ и $R^+AKS^-AR^+$ и т. д. (фиг. 7), а также соответствующих линий на других фигурах.

Заметим, что в плоскости $\Delta u \Delta v$ может быть, вообще говоря, по две и более точек S^+KS^+ , S^+AKAS^+ , S^-KS^- , AS^-KS^-A , а значит, и линии $S^+KS^-S^+$, $S^+R^-KS^+$ и т. д., если соответственно линии S^+ , S^- , выходящие из точек p_0 , H_{y_0} , p_0' , H_{y_0}' , имеют две и более точек пересечения друг с другом.

Вопрос о пересечениях линий S^+ и S^- в плоскости $H_y p$ в общем виде не исследовался.

§ 7. Комбинации из четырех волн и контактного разрыва. Нетрудно видеть, что комбинациям, состоящим из четырех волн и контактного разрыва, в плоскости Δu и Δv соответствует область, так как каждой комбинации из четырех волн и контактного разрыва соответствует система из двух уравнений для Δu и Δv , зависящих от двух параметров, а рассмотренные ранее линии являются границами этих областей.

Совершенно аналогично каждой комбинации, состоящей из четырех ударных или автомодельных волн, двух вращательных разрывов и контактного разрыва, соответствует область в плоскости Δu и Δv , так как добавление плоского вращательного разрыва не вносит нового независимого параметра.

Границами таких областей являются линии, которым соответствуют комбинации из трех ударных или автомодельных волн, двух вращательных разрывов и контактного разрыва, рассмотренные в предыдущем разделе. Уравнения таких линий составляются совершенно аналогично уравнению (5.1).

§ 8. Линия раздела. Линия раздела разграничивает области $R^+R^-KS^-R^+$ и $R^+AR^-KS^-AR^+$, $R^+S^-KS^-R^+$ и $R^+AS^-KS^-AR^+$ и т. д. и на фиг. 7—10 нанесена пунктиром. Уравнение линии раздела удобно писать отдельно для каждой пары областей, разделяемых ею.

Напишем уравнение части линии раздела между областями $R^+R^-KR^-R^+$ и $R^+AR^-KR^-AR^+$. Δu и Δv в области $R^+R^-KR^-R^+$ удовлетворяют уравнениям

$$\Delta u = -\psi_+ - \psi_+' - \psi_- - \psi_-' , \quad \Delta v = \chi_+ + \chi_+' - \chi_- - \chi_-' \quad (8.1)$$

которые получены по аналогии с уравнениями (5.1). На линии раздела интенсивность R^+ -волн максимальна; R^- -волны — чисто газодинамические; поэтому p_1 выражается через p_0 , H_{y_0} , а p_1' выражается через p_0' , H_{y_0}' ; $p_2 = p_2'$ (независимый параметр, который меняется от нуля (точка пересечения линий раздела и линии вакуума) до p_1' (точка пересечения линии раздела с линиями $R^+R^-KR^+$ и $R^+AR^-KAR^+$)).

Из сказанного следует, что система (8.2).

$$\Delta u = -\psi_{+\max} - \psi_{+\max}' - \psi_- - \psi_-' , \quad \Delta v = \chi_{+\max} + \chi_{+\max}' \quad (8.2)$$

полученная из (8.1), и является системой однопараметрических уравнений исследуемой части линии раздела. Ясно, что эта часть линии раздела является прямой.

Точно так же составляются уравнения других участков линии раздела, которые уже не будут прямыми.

§ 9. Линия вакуума. Точкам линии вакуума, а также точкам, лежащим за линией вакуума, соответствуют комбинации, содержащие две R^- -волны максимальной интенсивности. После прохождения их образуется вакуум. Напишем уравнение части линии вакуума, ограничивающей область, которой соответствует $R^+R^-KR^-R^+$ -комбинация. Δu и Δv в этой области удовлетворяют уравнениям (8.1). На линии вакуума в этих уравнениях $p_2 = 0$, $p_1' = p_1'(p_0, H_{y0}, p_0', H_{y0}', p_1)$ (фиг. 7). Опять получаем однопараметрическую систему уравнений с независимым параметром p_1 , которая и будет уравнением рассматриваемого участка линии вакуума.

Уравнения остальных участков составляются аналогично. Линия вакуума в левой своей части ограничена, а вправо простирается до бесконечности вверх и вниз. На фиг. 7—10 линии вакуума отмечена штриховкой.

§ 10. Случай $p_0 > p_0'$, $|H_{y0}| < |H_{y0}'|$. Пусть по-прежнему $H_{y0}H_{y0}' > 0$.

Из рассмотрения кривых, изображающих связь H_y, p в S^+ -, S^- -, R^+ - и R^- -волнах (фиг. 11—14), следует, что в этом случае из двух ударных или автомодельных волн и контактного разрыва возможны следующие комбинации:

$$1) \quad R^-KS^+, \quad R^+KS^-, \quad KS^-S^+, \quad R^+R^-K$$

$$\text{если} \quad p_0 > p_-(p_0', H_{y0}', H_y = H_{y0}), \quad H_{y0}' < H_-(p_0, H_{y0}, p = p_0') \quad (10.1)$$

$$2) \quad R^-KS^-, \quad R^-KS^+, \quad S^+KS^-, \quad R^+R^-K, \quad KS^-R^+$$

$$\text{если} \quad p_0 < p_-(p_0', H_{y0}', H_y = H_{y0}), \quad H_{y0}' < H_-(p_0, H_{y0}, p = p_0') \quad (10.2)$$

$$3) \quad S^+KS^-, \quad R^-KR^+, \quad KS^-S^+, \quad S^+R^-K$$

$$\text{если} \quad p_0 < p_-(p_0', H_{y0}', H_y = H_{y0}), \quad H_{y0}' > H_-(p_0, H_{y0}, p = p_0') \quad (10.3)$$

$$4) \quad R^-KS^-, \quad R^+KS^-, \quad R^-KR^+, \quad KS^-S^+, \quad S^+R^-K$$

$$\text{если} \quad p_0 > p_-(p_0', H_{y0}', H_y = H_{y0}), \quad H_{y0}' > H_-(p_0, H_{y0}, p = p_0') \quad (10.4)$$

S^-KS^- -комбинация возможна,

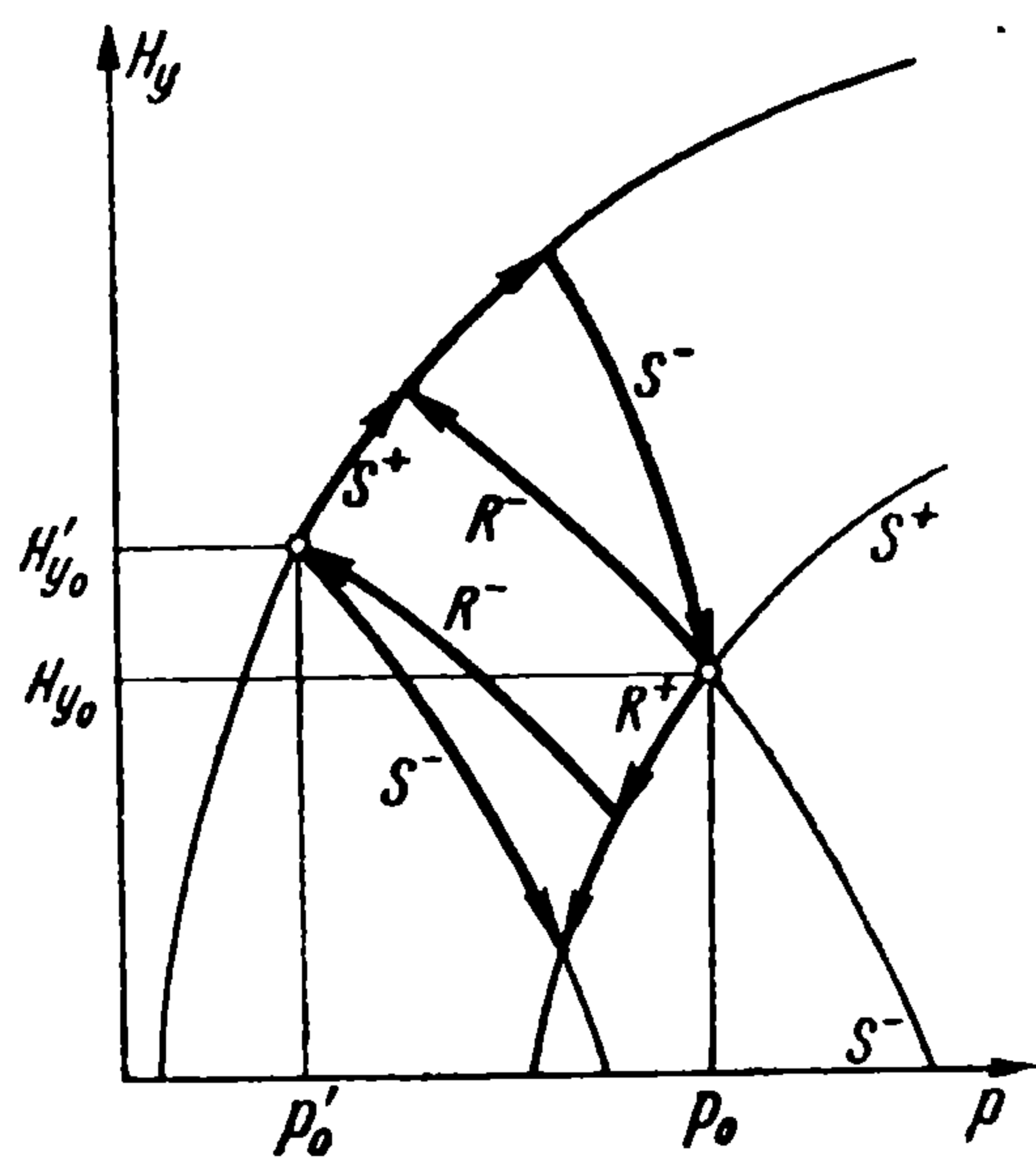
если

$$p_-(p_0', H_{y0}', H_y = 0) < p_-(p_0, H_{y0}, H_y = 0), \quad H_{y0} < H_-(p_0', H_{y0}', p = p_0)$$

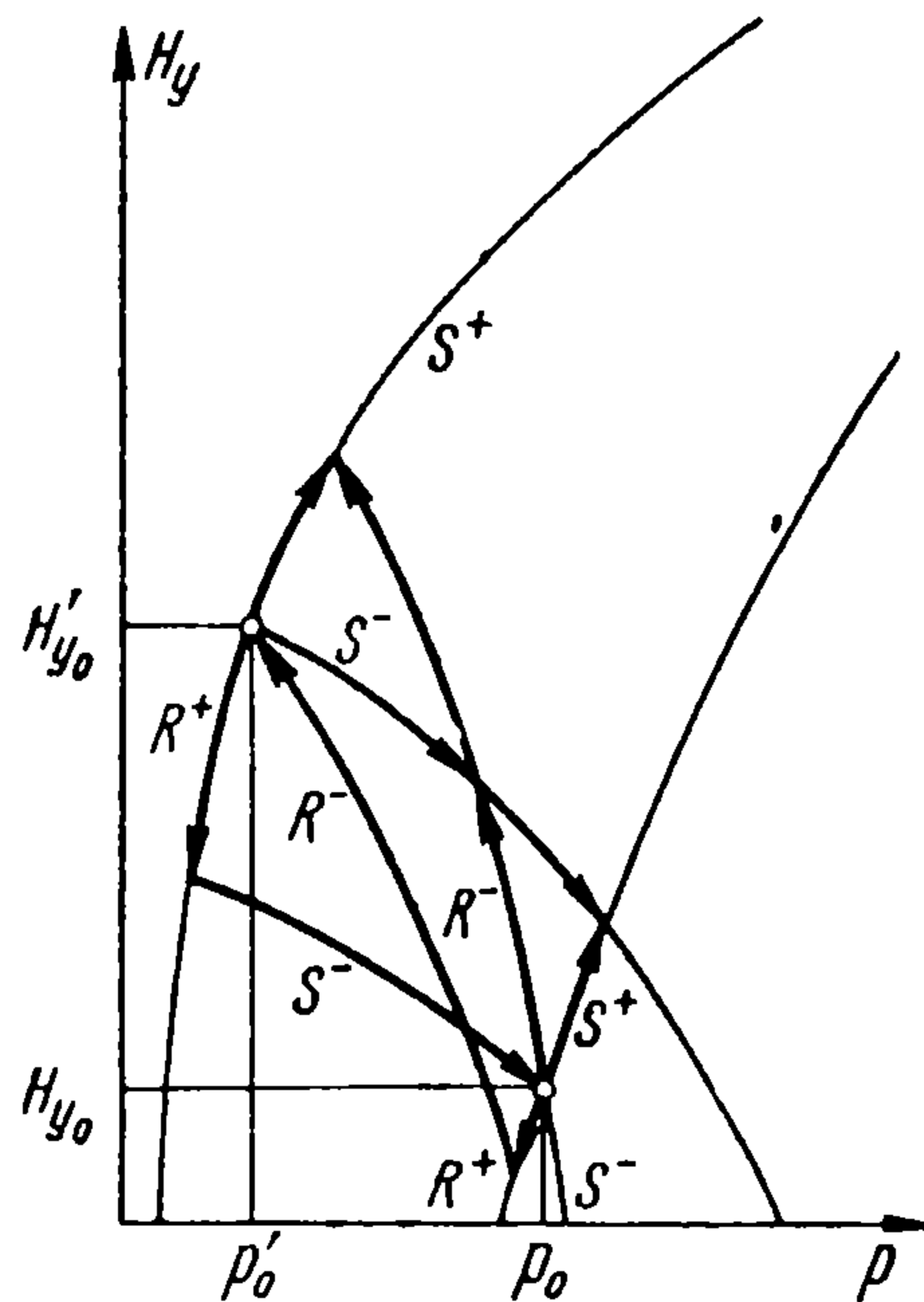
Фиг. 11—14 и 15—18 относятся соответственно к этим четырем случаям. Заметим, что качественно фиг. 7 и 15 отличаются одна от другой только тем, что на фиг. 15 точки, соответствующие комбинациям S^+KS^+ и S^-KS^- , отсутствуют.

Линии в области на этих рисунках построены точно так же, как и в случае $p_0 > p_0'$, $|H_{y0}| > |H_{y0}'|$, $H_{y0}H_{y0}' > 0$.

Если в случаях, описываемых неравенствами (10.1) — (10.4), имеет место S^+KS^+ -комбинация, то на фиг. 11—14 и 15—18 появится точка, ей соответствующая (см. замечание в конце § 6).

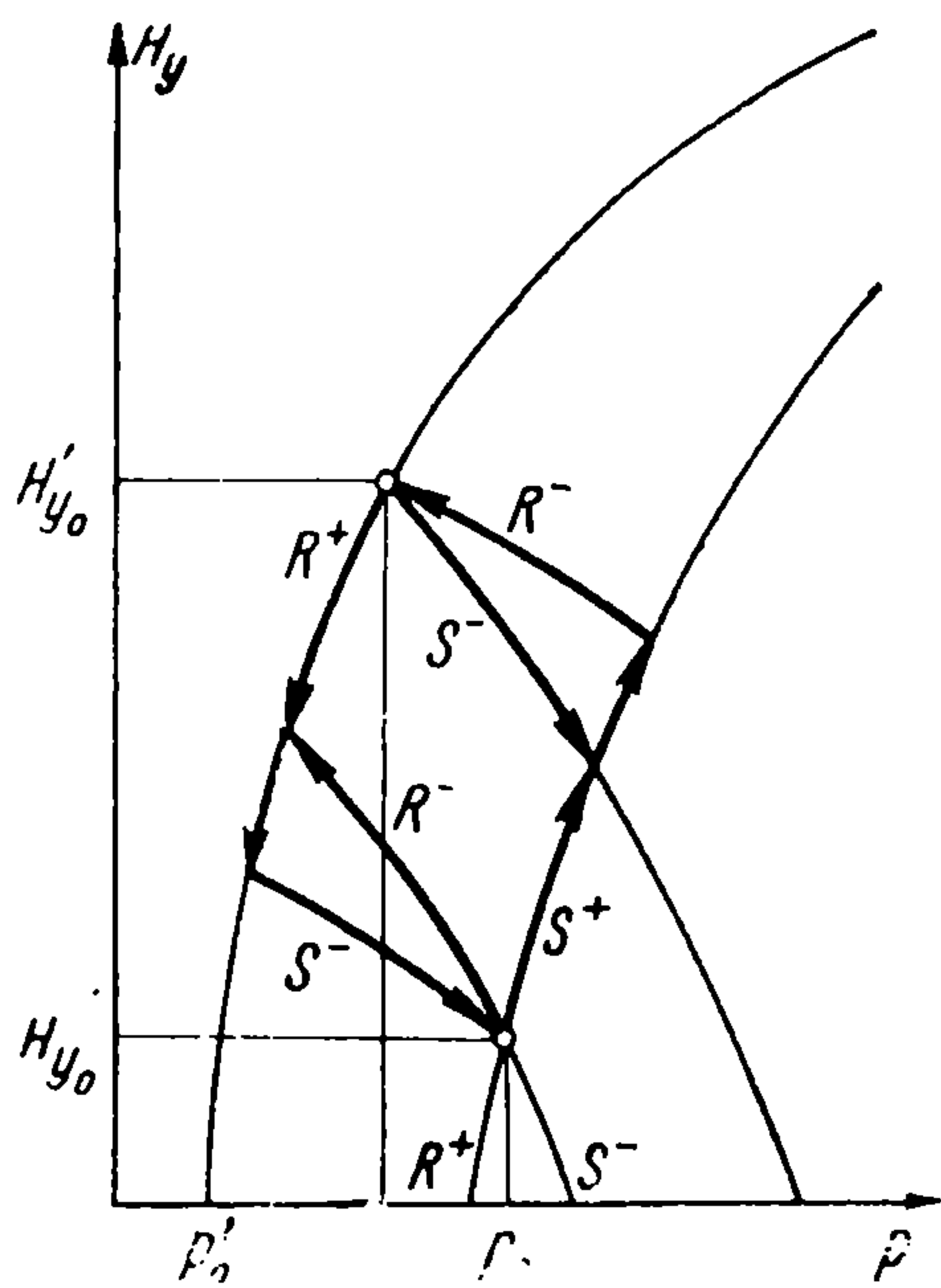


Фиг. 11

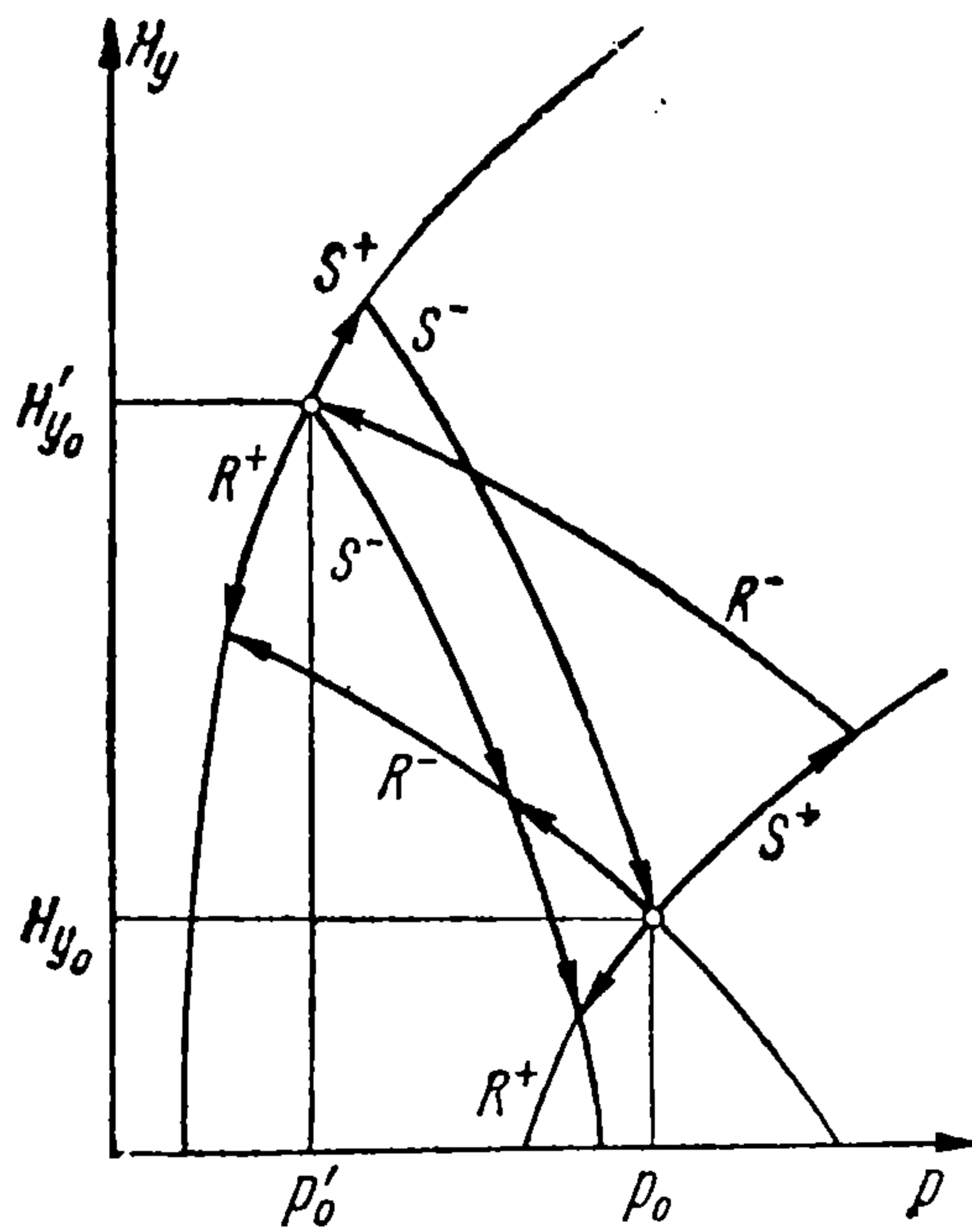


Фиг. 12

Если неравенства (10.1) — (10.4) переходят в равенства, совокупности комбинаций, соответствующие этим равенствам, являются частными случаями соответствующих рассмотренных совокупностей комбинаций, что легко видно из фиг. 11—14 в плоскости $H_y\rho$.



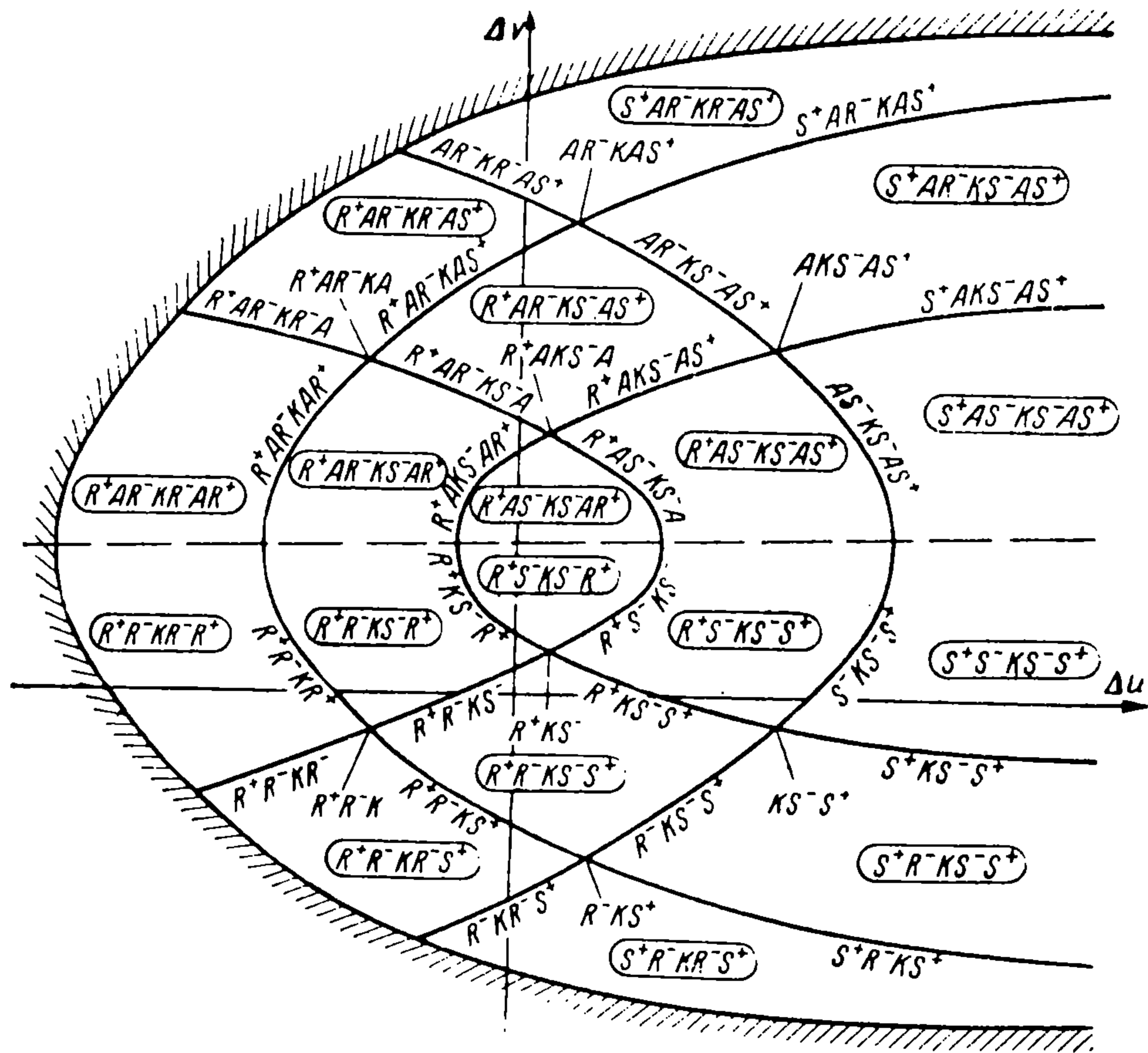
Фиг. 13



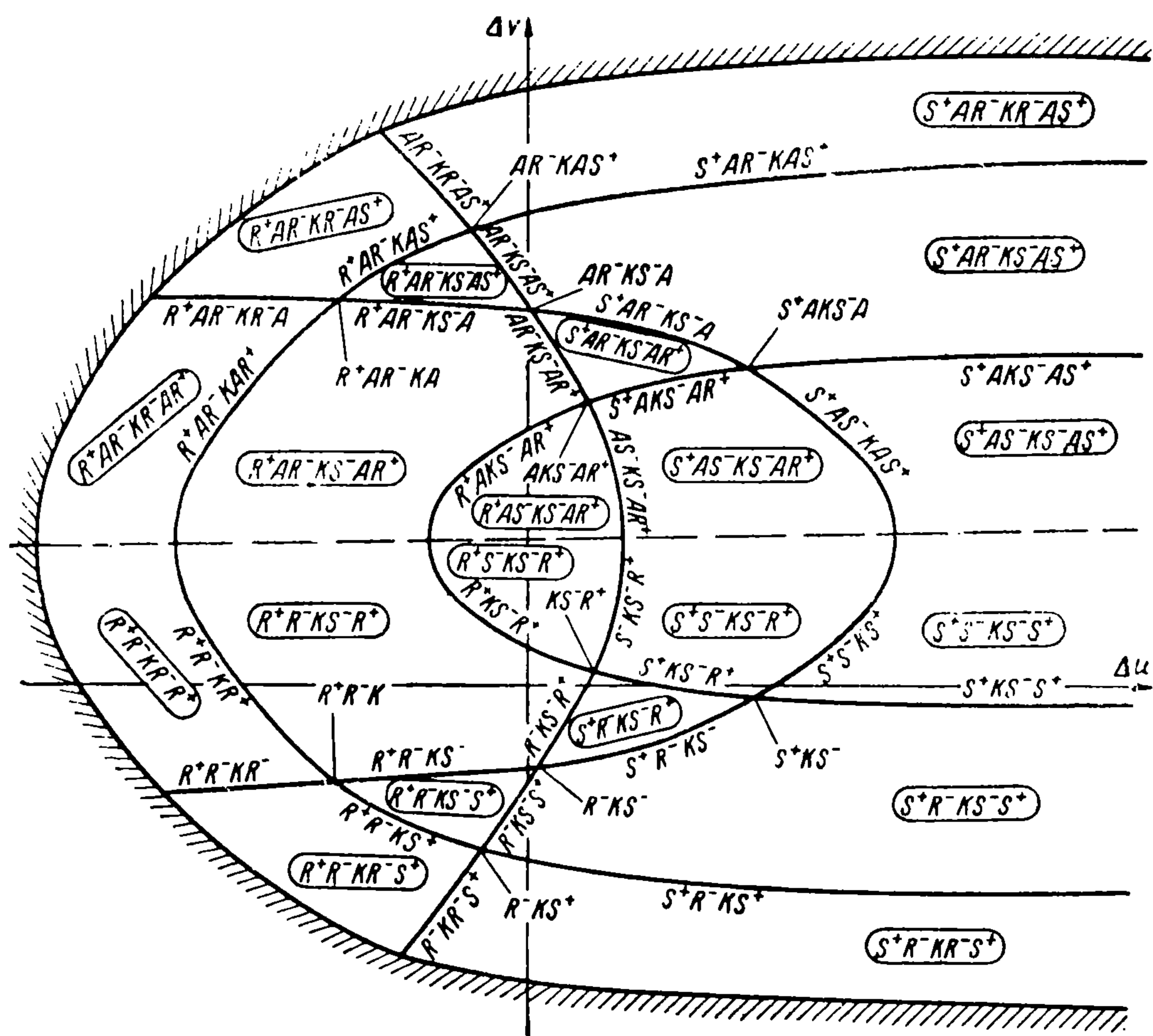
Фиг. 14

§ 11. Случай $\rho_0 > \rho_0'$, $|H_{y0}| > |H_{y0}'|$, $H_{y0}H_{y0}' < 0$. Пусть для определенности $H_{y0} > 0$, $H_{y0}' < 0$. В этом случае в каждую комбинацию обязательно должен входить один вращательный разрыв, идущий влево или вправо.

Это вызвано тем, что ни ударная, ни автомодельная волна не могут изменить знак поля, что необходимо, так как на контактном разрыве тангенциальные составляющие поля должны быть равны. Можно рассмотреть подробно возможность существования комбинаций из двух, трех и более волн, почти полностью повторив прежние рассуждения, но и без подробного рассмотрения ясно, что каждой комбинации из



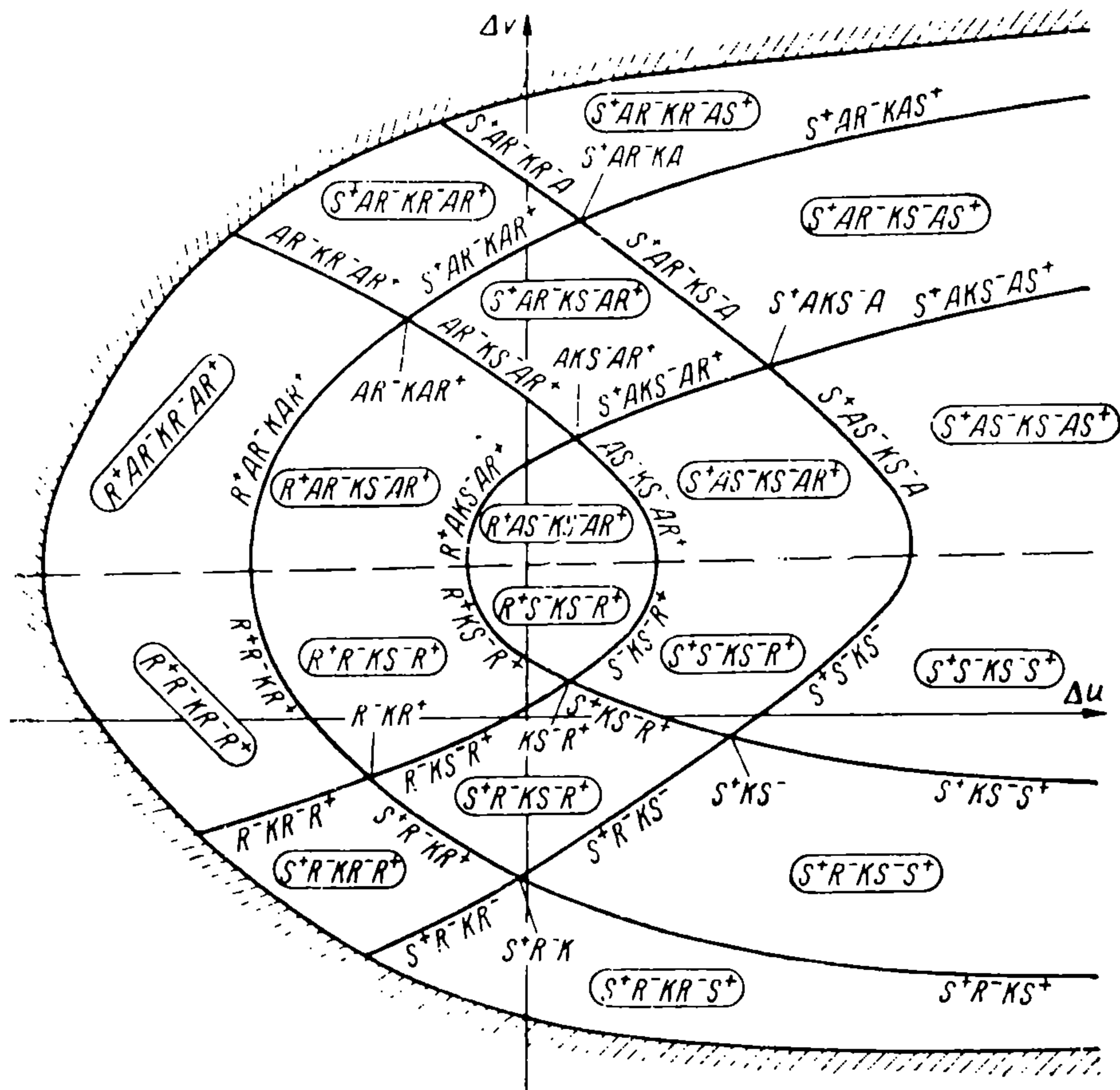
Фиг. 15



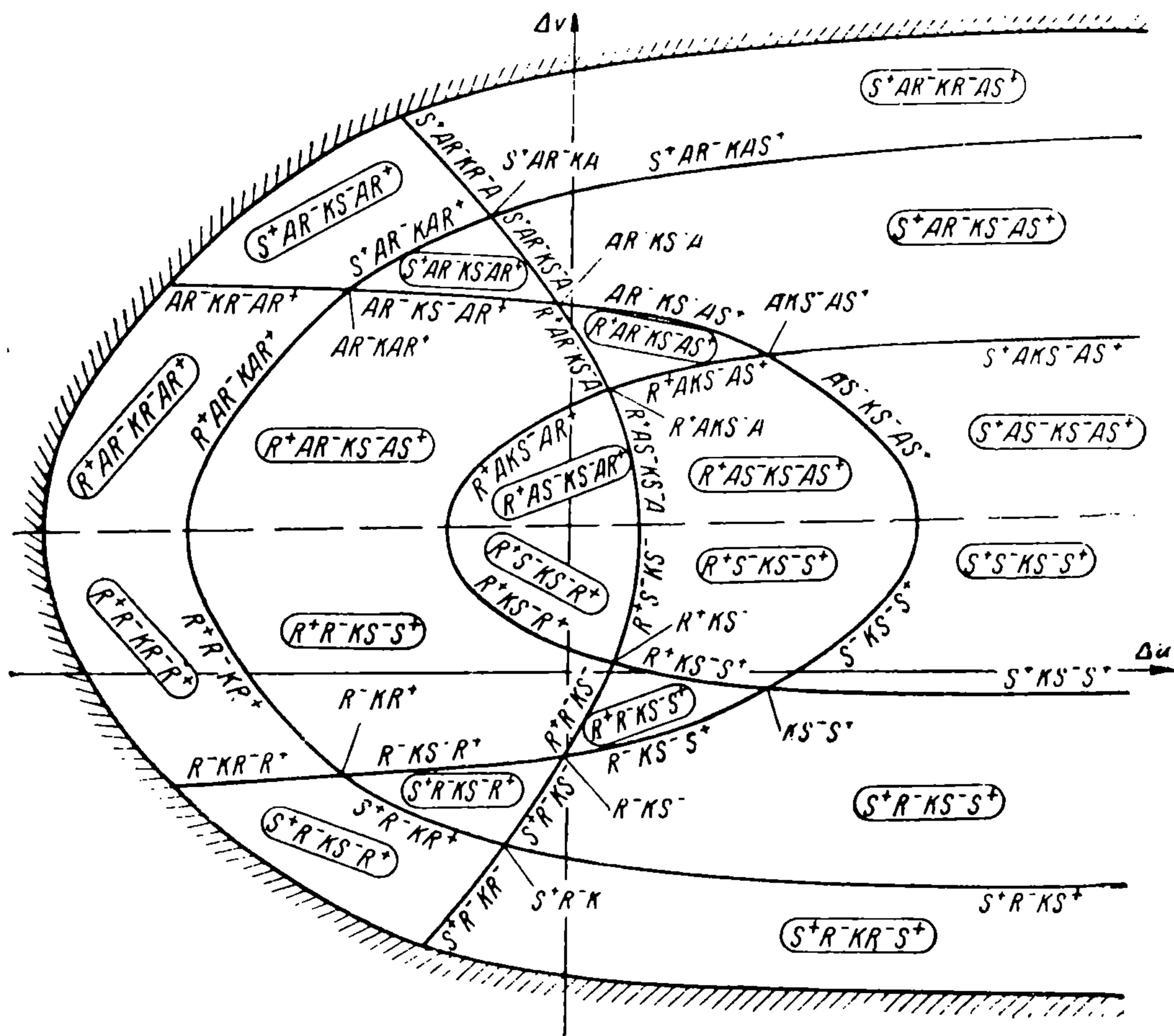
Фиг. 16

двух волн и контактного разрыва для случая $p_0 > p_0'$, $|H_{v0}| > |H_{v0}'|$, $H_{v0}' H_{v0} > 0$ соответствует комбинация из тех же двух волн, одного вращательного разрыва и контактного разрыва в рассматриваемом случае.

Причем давление и нормальные к фронту волн составляющие скорости между соответствующими волнами и разрывами в этих комбинациях будут равны, так как перечисленные величины не меняются, если,



Фиг. 17



Фиг. 18

оставляя все параметры на фронте волны неизменными, переменить знак H_z перед волной. Тангенциальные составляющие скорости изменят свое значение.

То же самое можно сказать о линиях и областях. Таким образом, можно качественно перерисовать фиг. 7—10, подставляя вместо комбинаций без вращательных разрывов или с двумя вращательными разры-

вами соответствующую комбинацию с одним вращательным разрывом, идущим влево или вправо. Линия раздела в данном случае отделяет области, в которых вращательный разрыв идет вправо от областей с вращательным разрывом, идущим влево. Выясним, какие области расположены выше линии раздела и какие — ниже.

Рассмотрим комбинации AR^-KS^+ и R^-KAS^+ ;

$$\begin{aligned} \Delta v &= f_+' + \chi_- + 2h_0V_0 && \text{для первой} \\ \Delta v \equiv \Delta v^* &= f_+' - \chi_- - 2h_1'V_0' && \text{для второй} \end{aligned}$$

Разность $\Delta v - \Delta v^*$ такова, как и в случае соответствующем $H_{y0}H_{y0}' > 0$. Поэтому области, соответствующие комбинациям, в которые входит вращательный разрыв, идущий вправо, расположены ниже линии раздела, области с вращательным разрывом, идущим влево, — выше.

Аналогично, картины для случая $p_0 > p_0'$, $|Hy_0| < |Hy_0'|$, $Hy_0Hy_0' < 0$ могут быть качественно получены из фиг. 15—18 для случая $p_0 > p_0'$, $|Hy_0| < |Hy_0'|$, $Hy_0Hy_0' > 0$, заменой комбинаций без вращательных разрывов и с двумя вращательными разрывами комбинациями с одним вращательным разрывом, идущим вправо или влево.

Если в последних двух рассматриваемых случаях $H_{y0} < 0$, $H_{y0}' > 0$, то картины не меняются, если по оси ординат откладывать не $v_0 - v_0'$, а $v_0' - v_0$.

§ 12. Пространственный случай задачи. Рассмотрим пространственную задачу о распаде произвольного разрыва. Векторы скорости и магнитного поля по обе стороны от плоскости разрыва лежат в разных плоскостях. Поэтому условиям на контактном разрыве невозможно удовлетворить без введения в рассмотрение пространственных вращательных разрывов.

Предположим, что начальные условия таковы, что пространственный начальный разрыв распадается на $R^+AR^-KAR^+$ -комбинацию волн и разрывов.

Уравнение для Δu будет таким же, как и уравнение для той же самой комбинации в плоском случае. Составим уравнение для $\Delta \mathbf{b}_\tau$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{\tau 3} &= \mathbf{b}_{\tau 2} + \frac{\mathbf{h}_2}{|\mathbf{h}_2|} \chi_- = \mathbf{b}_{\tau 1} + (\mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_1) V_1 + \frac{\mathbf{h}_2}{|\mathbf{h}_2|} \chi_- = \mathbf{b}_{\tau 0} - \frac{\mathbf{h}_0}{|\mathbf{h}_0|} \chi_+ + \\ &+ (\mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_1) V_1 + \frac{\mathbf{h}_2}{|\mathbf{h}_2|} \chi_- = \mathbf{b}_{\tau 3}' = \mathbf{b}_{\tau 0}' + \frac{\mathbf{h}_0'}{|\mathbf{h}_0'|} \chi_+' - (\mathbf{h}_2' - \mathbf{h}_1') V_1' \end{aligned}$$

Отсюда

$$(\mathbf{b}_{\tau 0} - \mathbf{b}_{\tau 0}' - \mathbf{L})^2 = \mathbf{R}^2 \quad (12.1)$$

где

$$\mathbf{L} = \frac{\mathbf{h}_0}{|\mathbf{h}_0|} \chi_+ + \frac{\mathbf{h}_0'}{|\mathbf{h}_0'|} \chi_+' + \mathbf{h}_1 V_1 + \mathbf{h}_1' V_1', \quad \mathbf{R} = -\mathbf{h}_2 V_1 - \mathbf{h}_2' V_1' - \frac{\mathbf{h}_2}{|\mathbf{h}_2|} \chi_-$$

что является уравнением окружности с центром в точке $(\Delta u, \Delta v = L_y, \Delta w = L_z)$ и радиусом, равным $|\mathbf{R}|$.

Пусть $\mathbf{H}_{\tau 0} \parallel \mathbf{H}_{\tau 0}'$. Выберем это направление за ось y , ось z перпендикулярна оси y и нормали к поверхности разрыва. Тогда $L_z = 0$, т. е. центр окружности лежит в плоскости $\Delta u \Delta v$. В этой плоскости уравне-

ние (12.1) даст два значения Δv : одно из них лежит на линии, которой соответствует $R^+R^-KR^+$ -комбинация, другое на линии, которой соответствует $R^+AR^-KAR^+$ -комбинация, где в A -разрывах поворот поля происходит на 180° , оба значения Δv отстоят на расстоянии $|R|$ от точки с координатами Δu , $\Delta v = L_y$. Можно показать, что эта точка лежит на линии раздела. У этих трех точек Δu одно и то же.

Таким образом, показано, что при $H_{\tau_0} \parallel H_{\tau_0}'$, поверхность которой соответствует $R^+AR^-KAR^+$ -комбинация получена вращением линии, лежащей в плоскости $\Delta u \Delta v$, которой соответствует $R^+R^-KR^+$ -комбинация, около линии раздела. Сечение этой поверхности плоскостью $\Delta w = 0$ даст две линии: одной соответствует $R^+R^-KR^+$ -комбинация, другой — $R^+AR^-KAR^+$ -комбинация, где A -разрыв поворачивает поле на 180° , причем эта поверхность разделяет две области: $R^+AR^-KR^-AR^+$ и $R^+AR^-KS^-AR^+$.

Аналогично при $H_{\tau_0} \parallel H_{\tau_0}'$ строится вся остальная часть пространственной диаграммы для общего случая задачи о распаде произвольного разрыва. Точно так же вращение линии вакуума, лежащей в плоскости $\Delta u \Delta v$, около линии раздела даст поверхность вакуума.

Если H_{τ_0} не параллельно H_{τ_0}' , то $L_z \neq 0$, радиус же окружности не меняется, таким образом в этом случае поверхностью в пространстве $\Delta u \Delta v \Delta w$, которой соответствует комбинация $R^+AR^-KAR^+$, является поверхность, которой соответствует та же комбинация волн, построенная в предположении, что $H_{\tau_0} \parallel H_{\tau_0}'$, сдвинутая в соответствии с уравнением (12.1). Отсюда ясно, что критерии (4.1) — (4.4), (10.1) — (10.4), определяющие совокупность комбинаций, в случае, когда H_{τ_0} не параллельно H_{τ_0}' , остаются такими же, как в случае, когда $H_{\tau_0} \parallel H_{\tau_0}'$.

§ 13. Заключение. Пусть теперь заданы значения параметров среды по обе стороны от плоскости разрыва. Покажем, как воспользоваться изложенным решением. Поскольку нам известны H_{τ_0} , H_{τ_0}' , p_0 , p_0' , мы знаем, каким из требуемых неравенств, изложенным в работе, они удовлетворяют, а значит, знаем, уравнения каких линий мы должны написать, пользуясь формулами (1.4), (1.5), (2.2), (2.3), чтобы построить соответствующий рисунок. После того как рисунок построен, поскольку Δu , Δv , Δw известны, выясняем, в какой области лежит точка с этими координатами, т. е. узнаем комбинацию волн и разрывов, на которые распадается начальный разрыв. Приравнявая суммы скачков каждой магнитногидродинамической величины на каждом из возникающих волн и разрывов первоначальному скачку, получаем систему алгебраических уравнений, которую нужно решать численно.

Если точка Δu , Δv , Δw лежит в пространстве за линией вакуума, необходимо добавочное рассмотрение. Вакуум образуется за идущими в обе стороны R^- -волнами максимальной интенсивности. На границе вакуума и среды выполняются соотношения [4]

$$p = 0, \quad [H_\tau] = 0, \quad [E_\tau] = 0$$

но в силу бесконечной проводимости среды

$$E_{\tau_3} = -[b_3 H_3]_\tau, \quad E_{\tau_3}' = -[b_3' H_3']_\tau, \quad E_{\tau_{\text{вак}}} = \text{const}, \quad H_{\tau_{\text{вак}}} = \text{const},$$

так как электромагнитных волн в зоне вакуума быть не может из автономности задачи, значит,

$$[(\mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_3') \mathbf{H}_3]_\tau = 0 \quad (13.1)$$

Пусть распад плоский и пусть мы находимся в какой-то точке в части линии вакуума, ограничивающей область, которой соответствует комбинация $R^+R^-KR^-R^+$. Тогда

$$\begin{aligned} u_2 &= u_0 + \psi_+ + \psi_-, & u_2' &= u_0' - \psi_+' - \psi_-' \\ v_2 &= v_0 - \chi_+ + \chi_-, & v_2' &= v_0' + \chi_+' - \chi_-' \end{aligned} \quad (13.2)$$

Расписывая векторное произведение и подставляя туда u_2, u_2', v_2, v_2' из (13.2), имеем

$$\begin{aligned} &[(u_0 - u_0') + (\psi_+ - \psi_+' + \psi_- - \psi_-')] H_{y_2} - \\ &- [(v_0 - v_0') + (-\chi_+ - \chi_+' + \chi_- + \chi_-')] H_x = 0 \end{aligned} \quad (13.3)$$

В плоскости $\Delta u \Delta v$ уравнение (13.3) есть уравнение прямой.

Аналогично составляются уравнения прямых, выходящих из других участков линии вакуума.

Если скорость поршня лежит за линией вакуума, то из этой точки до линии вакуума нужно идти по прямой типа (13.3). В каждой точке линии вакуума известна комбинация, на которую распадается начальный разрыв.

Если задача пространственная, то уравнение (13.1) является уравнением прямых в пространстве $\Delta u \Delta v \Delta w$, заполняющих все пространство слева от линии вакуума, которые можно получить вращением соответствующих прямых, лежащих в плоскости $\Delta u \Delta v$, способом, изложенным выше в § 12.

Выражаю благодарность Л. И. Седову, А. Г. Куликовскому и Г. А. Любимову за обсуждение.

Поступила 9 X 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. А х и е з е р А. И., Л ю б а р с к и й Г. Я., П о л о в и н Р. В. Об устойчивости ударных волн в магнитной гидродинамике. ЖЭТФ, 1958, т. 35, вып. 3.
2. К o t c h i n e N. E. Sur la théorie des ondes de choc dans un fluide Rendiconti del Circolo Nat de Palermo, 1926, 50, стр. 305.
3. К о ч и н Н. Е. К теории разрывов в жидкости. Собр. соч., т. 2, 1949.
4. В a z e r I. Resolution of an initial shear flow discontinuity in one dimensional hydromagnetic flow, Astrophys. J., 1958, 129, № 3.
5. К а п л а н С. А., С т а н ю к о в и ч К. П. Решение уравнение магнитогазодинамики для одномерного движения. ДАН СССР, 1954, т. 95, № 4.
6. Г о л и ц ы н Г. С. Одномерные движения в магнитной гидродинамике. ЖЭТФ, 1958, т. 35, вып. 3.
7. В о л к о в Т. Ф. К задаче о распадении произвольного разрыва в сплошной среде. Сб. физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций, т. 3, 1958.
8. К a t o G. Interaction of hydromagnetic waves. Progr. theor. phys. 1959, 21, No.3.
9. Л ю б а р с к и й Г. Я., П о л о в и н Р. В. Расщепление малого разрыва в магнитной гидродинамике. ЖЭТФ, 1958, т. 35, вып. 5.
10. А х и е з е р И. А., П о л о в и н Р. В. О движении проводящего поршня в магнитогазодинамической среде. ЖЭТФ, 1960, т. 38, вып. 2.
11. Б а р м и н А. А., Г о г о с о в В. В. Задача о поршне в магнитной гидродинамике. ДАН СССР, 1960, т. 134, № 5.
12. В a z e r I, E r i c s o n W. B. Hydromagnetic shocks. Astrophys. J., 1959, 129, No.3.
13. Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. Электродинамика сплошных сред. ГИТТЛ. 1957.