

## МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЙ ДЛЯ РАСЧЕТА ТЕЧЕНИЙ ГАЗА С СИЛЬНЫМИ УДАРНЫМИ ВОЛНАМИ

Г. Г. Черный

(Москва)

При распространении по газу сильной ударной волны происходит значительное уплотнение газа. Область возмущенного движения, прилегающую к волне, можно при этом рассматривать как своеобразный пограничный слой, во многом аналогичный пограничному слою в вязкой жидкости<sup>1</sup>. Для расчета движения газа в этом слое за ударной волной могут быть использованы методы интегральных соотношений, подобные тем, которые составляют основное средство для вычислений в теории пограничного слоя в вязкой жидкости. В различных частных формах интегральные соотношения применялись уже автором для решения задач о течениях с сильными ударными волнами ранее [1, 2]. Ниже кратко изложен общий подход к использованию интегральных соотношений в таких задачах и приведены некоторые новые примеры решений.

1. Будем рассматривать течения газа с плоскими, цилиндрическими и сферическими волнами, возникающие при распространении ударной волны по покоящемуся газу. Применим к газу, заключенному в объеме  $V$  между ударной волной и некоторой поверхностью, расположенной внутри области движения и состоящей из одних и тех же частиц газа (в дальнейшем будем называть ее поверхностью поршня), законы сохранения массы, количества движения и энергии. Обозначим через  $M$ ,  $K$  и  $E$  соответственно массу, количество движения (точнее — интеграл от модулей элементарных количеств движения) и энергию газа в рассматриваемом объеме, т. е. положим

$$M = \int_V \rho dV, \quad K = \int_V \rho v dV, \quad E = \int_V \rho \left( \frac{v^2}{2} + e \right) dV \quad (1.1)$$

Тогда из законов сохранения получим

$$\dot{M} = \rho^\circ \dot{R}^\circ S^\circ \quad \text{или} \quad \dot{M} = \rho^\circ \dot{V}^\circ + \text{const} \quad (1.2)$$

$$\dot{K} = p_* \dot{S}_* - p^\circ \dot{S}^\circ + \int_{S_*}^{S^\circ} p dS \quad (1.3)$$

$$\dot{E} = \rho^\circ \dot{R}^\circ S^\circ e^\circ + p_* \dot{R}_* S_* \quad (1.4)$$

Здесь  $\rho$  — плотность,  $v$  — скорость,  $p$  — давление,  $e$  — внутренняя энергия единицы массы газа (для совершенного газа  $e = p/(\gamma - 1)\rho$ ),  $\gamma$  — отношение теплоемкостей,  $R$  и  $S$  обозначают радиус и площадь поверхностей, ограничивающих выделенный объем газа,  $V$  — объем внутри поверхности  $S$ .

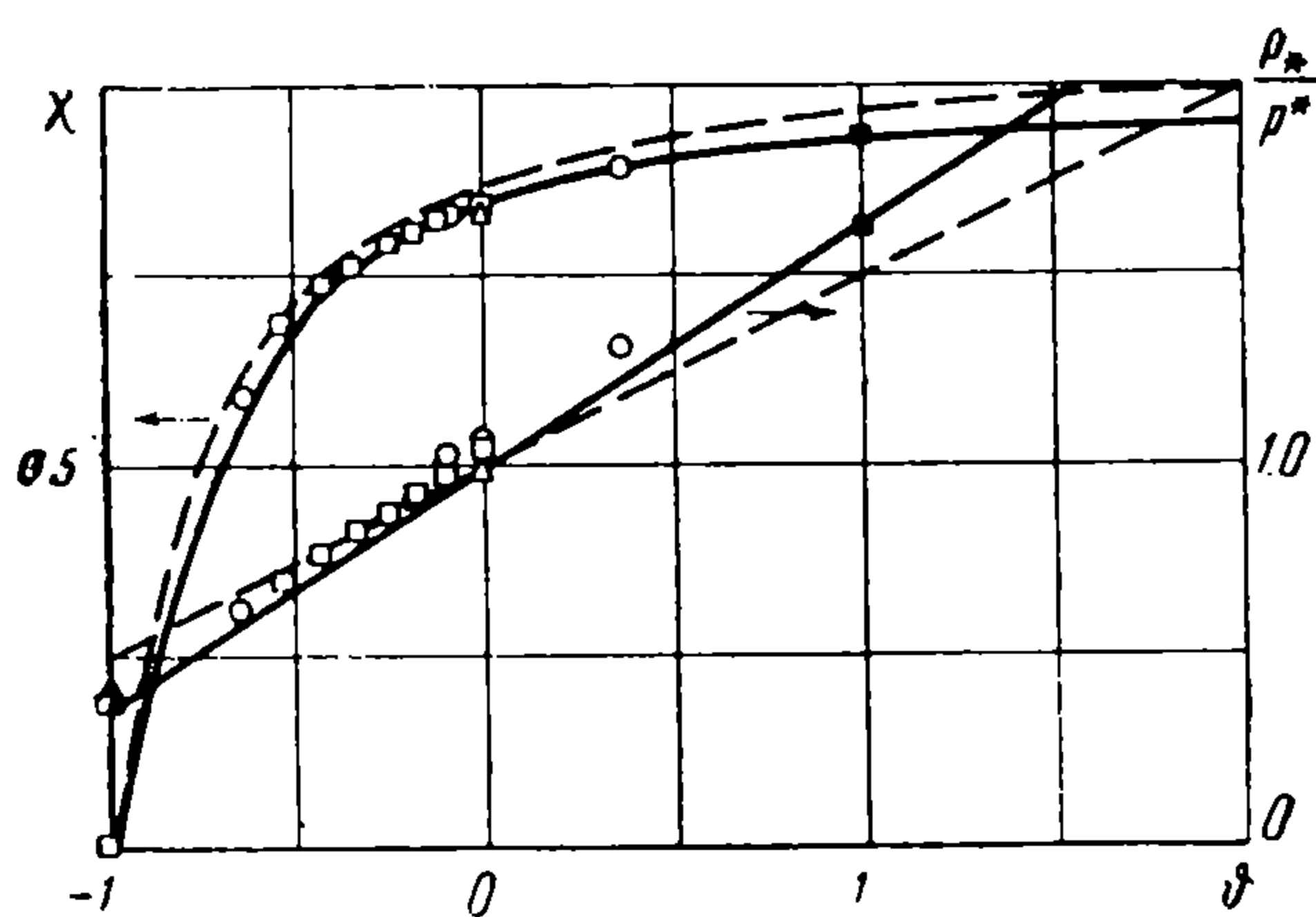
<sup>1</sup> Г. Г. Черный. Метод пограничного слоя в задачах о движениях идеального и вязкого газа с поверхностью разрыва. Диссертация, МГУ, 1956.

Здесь индекс  $\circ$  обозначает ударную волну и параметры газа перед ней, звездочка внизу  $(*)$  — вторую ограничивающую поверхность и параметры газа на ней, точка сверху — дифференцирование по времени  $t$ .

Если теперь аппроксимировать распределения параметров газа по радиусу или по лагранжевой координате некоторыми функциями, содержащими параметры, то зависимость этих параметров от времени может быть найдена при использовании уравнений (1.2) — (1.4) и тех или иных дополнительных условий, подобно тому, как это делается в различных вариантах метода интегральных соотношений теории пограничного слоя. В частности, дополнительными условиями могут служить и дифференциальные уравнения движения в различных приближенных формах. Естественно, что при достаточном числе других условий нет необходимости в удовлетворении всех интегральных соотношений (1.2) — (1.4); одно или даже два из них могут не удовлетворяться.

Рассмотрим некоторые варианты использования интегральных соотношений.

2. Вначале сделаем простейшее предположение о том, что давление и скорость одинаковы у всех частиц газа в области между ударной волной и



Фиг. 1

поршнем, т. е. зависят только от времени. Для определенности газ в дальнейшем будем считать совершенным с постоянными теплоемкостями. Уравнения сохранения количества движения и энергии можно тогда записать в виде

$$M\dot{v} + \dot{M}v = (p - p^\circ) S^\circ \quad (2.1)$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{Mv^2}{2} + \frac{p(V^\circ - V_*)}{\gamma - 1} \right] = \dot{M}e^\circ + p\dot{V}_* \quad (2.2)$$

где величина  $M$  определяется формулой (1.2).

Два уравнения, (2.1) и (2.2), связывают при известном законе расширения поршня  $V_*(t)$  три функции времени:  $p$ ,  $v$  и  $V^\circ$ . Для определения этих функций необходима еще одна связь между ними. В работе [2] в качестве такой дополнительной связи принималось, что скорость газа  $v$  в рассматриваемом варианте метода интегральных соотношений равна скорости газа непосредственно за ударной волной, определяемой соотношениями на скачке уплотнения (или даже, что скорость  $v$  можно принять равной скорости распространения ударной волны). В этом предположении в упомянутой работе приведены решения задач о сосредоточенном взрыве с последующим расширением поршня с постоянной скоростью для случаев плоских и цилиндрических волн, приближенно эквивалентных задачам об обтекании потоком с большой сверхзвуковой скоростью тонкого затупленного клина и тонкого затупленного конуса. Приведем сравнение точного решения задачи о поршне, расширяющемся по степенному закону, и решения, полученного по этому методу при  $p^\circ = 0$  и  $\gamma = 1.4$ . На фиг. 1 пунктирными линиями приведены приближенные значения отношения объема поршня к объему, ограниченному ударной волной, и отношения давления на поршне к давлению за ударной волной  $p^*$ , соответствующие

формулам

$$\frac{V_*}{V^\circ} = \frac{(1 + \vartheta) \left( \frac{2\gamma}{\gamma + 1} + \frac{\vartheta}{2} \right)}{\left( 1 + \frac{\vartheta}{2} \right) (\gamma + \vartheta)}, \quad \frac{p_*}{p} = 1 + \frac{\vartheta}{2} \quad \left( \vartheta = \frac{2n}{v(n+1)} \right)$$

Здесь  $v = 1, 2, 3$  соответственно для течений с плоскими, цилиндрическими и сферическими волнами,  $n$  — показатель степени в законе расширения поршня  $R_* \sim t^{n+1}$ . Точные значения заимствованы из ряда источников, цитированных в работе [2].

Учитывая простоту приближенного решения, точность его в рассмотренном случае можно считать удовлетворительной. Удовлетворительная точность достигается также при решении этим методом задачи о поршне, расширяющемся с постоянной скоростью ( $n = 0$ ) при разных значениях отношения скорости звука в покоящемся газе к скорости поршня.

3. Использование автомодельных решений. В качестве дополнительных связей между величинами, входящими в интегральные соотношения (1.2) — (1.4), можно воспользоваться связями, которые существуют между этими величинами при автомодельных движениях, возникающих, если в покоящемся газе с нулевым начальным давлением расширяется поршень по степенному закону  $R_* \sim t^{n+1}$ .

Можно, например, принять, что распределения по объему параметров газа в области между ударной волной и поршнем определяются формулами вида

$$\rho = \rho^* \Omega \left( \frac{(1 - \lambda_m) V + \lambda_m V^\circ - V_*}{V^\circ - V_*} \right) \quad (3.1)$$

Здесь звездочка вверху (\*) обозначает параметры газа непосредственно за ударной волной,  $\Omega(\lambda)$  — функцию, заимствованную из автомодельного решения, где  $\lambda = V/V^\circ$ . Эта функция, как и величина  $\lambda_m$  (наименьшее значение  $\lambda$ ), известным образом зависит также от показателя степени  $n$  в законе расширения поршня (и от  $v$  и  $\gamma$ ). Используя принятые распределения, получаем

$$M = \rho^* (V^\circ - V_*) \mu(n), \quad K = M v^* \kappa(n), \quad E = M v^{*2} \varepsilon(n)$$

$$p_* = \pi(n) p^*, \quad \int_{S_*}^{S^\circ} p dS = p^* (S^\circ - S_*) \sigma(n)$$

где  $\mu, \kappa, \varepsilon, \pi, \sigma$  — известные функции от  $n$ . Подстановка этих выражений в уравнения (1.2) — (1.4) дает при известном законе расширения поршня  $R_*(t)$  три соотношения для определения зависимости от времени  $t$  величин  $R^\circ, n, \rho^*, v^*, p^*$ .

Два недостающих соотношения могут быть взяты из трех условий на ударной волне, связывающих  $\rho^*, v^*, p^*$  и  $\dot{R}^\circ$ . Можно, напротив, использовать все три условия на ударной волне, но не удовлетворять одному из трех интегральных соотношений (1.2) — (1.4).

Описанный метод аналогичен известному в теории пограничного слоя вязкой жидкости методу использования автомодельных решений, принадлежащему Кочину и Лойцянскому. Однако он требует довольно громоздких вычислений, уступая в этом более простому методу, изложенному в следующем разделе.

4. Метод уплотненного слоя. Как известно [1], расчет движений газа за сильными ударными волнами может быть осуществлен путем представления решения в лагранжевых переменных в виде рядов специального вида по степеням параметра  $\varepsilon$ , характеризующего отношение плотности газа перед волной к плотности газа за волной. Все последовательные члены этих рядов находятся из уравнений путем квадратур, содержащих закон распространения ударной волны  $R^\circ(t)$ . Для определения функции  $R^\circ(t)$  можно использовать закон сохранения энергии (1.4). При этом функцию  $R^\circ(t)$  следует также представить в виде ряда по  $\varepsilon$ . Подставляя ряды для  $R$  ( $R$  — эйлерова координата частицы),  $p$  и  $\rho$  в уравнение (1.4) и приравнявая после соответствующих преобразований члены, стоящие справа и слева при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получаем обыкновенные дифференциальные уравнения для определения последовательных членов в ряде для  $R^\circ(t)$ . Этому методу можно придать вид метода интегральных соотношений, как это сделано в работе [2], если взять в качестве приближенных распределений скорости и давления главные члены соответствующих рядов по  $\varepsilon$ , удовлетворяющие всем краевым условиям, а входящую в них функцию  $R^\circ(t)$  рассматривать как параметр и определять ее из интегрального соотношения энергии (1.4).

Согласно работе [2], подставим следующие приближенные выражения для скорости и давления

$$v = \frac{2}{\gamma+1} \left( \dot{R}^\circ - \frac{a^{\circ 2}}{\dot{R}^\circ} \right) + O(\varepsilon) \quad (4.1)$$

$$p = p^\circ + \frac{2}{\gamma+1} \rho^\circ (\dot{R}^{\circ 2} - a^{\circ 2}) + \rho^\circ \frac{R^\circ \ddot{R}^\circ}{v} - \frac{\ddot{R}^\circ}{R^{\circ \nu-1}} m + O(\varepsilon)$$

( $a^\circ$  — скорость звука в покоящемся газе,  $m$  — лагранжева координата, пропорциональная массе газа, заключенной внутри рассматриваемой поверхности) в интегральное соотношение энергии и пренебрежем в формуле для  $E$  членом

$$- \frac{\ddot{R}^\circ}{(\gamma-1) R^{\circ \nu-1}} \int_V m dV$$

имеющим порядок  $\varepsilon$ . В результате получим следующее уравнение для определения функции  $R^\circ$

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{\gamma+1} \left( \dot{R} - \frac{a^{\circ 2}}{\dot{R}} \right) \right]^2 \rho^\circ R^\nu + \frac{p_*}{\gamma-1} (R^\nu - R_*^\nu) \right\} = \frac{p^\circ}{\gamma-1} \frac{dR^\nu}{dt} + p_* \frac{dR_*^\nu}{dt} \quad (4.2)$$

где

$$p_* = p^\circ + \frac{2}{\gamma+1} \rho^\circ (\dot{R}^2 - a^{\circ 2}) + \frac{\rho R \ddot{R}^\circ}{v}$$

Для простоты принято, что в начальный момент газ заполняет все пространство.

В работе [2] при помощи уравнения (4.2) решены задачи о поршне, распространяющемся с постоянной скоростью (в этой задаче решение совпадает с полученным по п. 2 настоящей работы), о поршне, расширяющемся по степенному закону в газе с нулевым начальным давлением (см. сплошные кривые на фиг. 1), и о сильном взрыве. Во всех этих задачах приближенные решения получаются в элементарном виде и их совпадение с точными решениями оказывается весьма удовлетворительным вплоть до значений  $\varepsilon = 0.2-0.3$ .

Приведем решение задачи о взрыве с учетом начального давления.

Основное уравнение (4.2) может быть в этом случае один раз проинтегрировано, после чего оно принимает вид

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{2}{\gamma+1} \left( \dot{R} + \frac{a^{o2}}{\dot{R}} \right) \right]^2 \rho^o R^v + \frac{P_*}{\gamma-1} (R^v - R_*^v) = \frac{E}{\omega} + \frac{p^o}{\gamma-1} R^v$$

Здесь  $E$  — энергия взрыва ( $E$  есть соответственно энергия, рассчитанная на единицу площади и единицу длины заряда для  $\nu = 1$  и  $\nu = 2$ ),  $\omega = 2, \pi, \frac{4}{3}\pi$  для  $\nu = 1, 2, 3$  соответственно. Подстановками

$$\frac{a^{o2}}{\dot{R}^2} = q, \quad R^v = \frac{E}{\omega p^o} v$$

это уравнение и выражение для  $p_*$  приводятся к следующим

$$\frac{v}{q^2} \frac{dq}{dv} = \frac{8\gamma}{(\gamma+1)^2} \left( \frac{1}{q} - 1 \right) \left( 1 - \frac{\gamma-1}{2\gamma} q \right) - \frac{2(\gamma-1)}{\gamma} \frac{1}{v} \quad (4.3)$$

$$\frac{p_* - p^o}{p^o} = \frac{\gamma-1}{v} - \frac{2\gamma(\gamma-1)(1-q)^2}{(\gamma+1)^2 q}$$

Интересно отметить, что в полученную систему соотношений не входит  $\nu$ , т. е. она имеет одинаковый вид для взрывов плоского, линейного и точечного зарядов. Следовательно, зависимость скорости распространения ударной волны (а следовательно, и всех параметров газа за ней) и давления в центре взрыва от объема, заключенного внутри ударной волны, одинакова для всех трех случаев.

Начальное условие  $q = 0, v = 0$  для решения уравнения (4.3) соответствует особой точке этого уравнения. Вблизи особенности нужное решение имеет следующий асимптотический вид

$$v = \frac{2(\gamma-1)(\gamma+1)^2}{\gamma(6\gamma - \gamma^2 - 1)} q, \quad \frac{p_* - p^o}{p^o} = \frac{2\gamma^2 - \gamma^3 + 3\gamma}{2(\gamma+1)^2} \frac{1}{q}$$

Эти первые члены асимптотических разложений приблизительно описывают сильный взрыв (без учета начального давления [газа] и удовлетворительно согласуются с точными зависимостями [2] вплоть до значений  $\epsilon = 0.2 - 0.3$ .

На фиг. 2 проведен штрих-пунктирной линией 3 график, полученной численным интегрированием<sup>1</sup> уравнения (4.3) зависимости  $q$  от

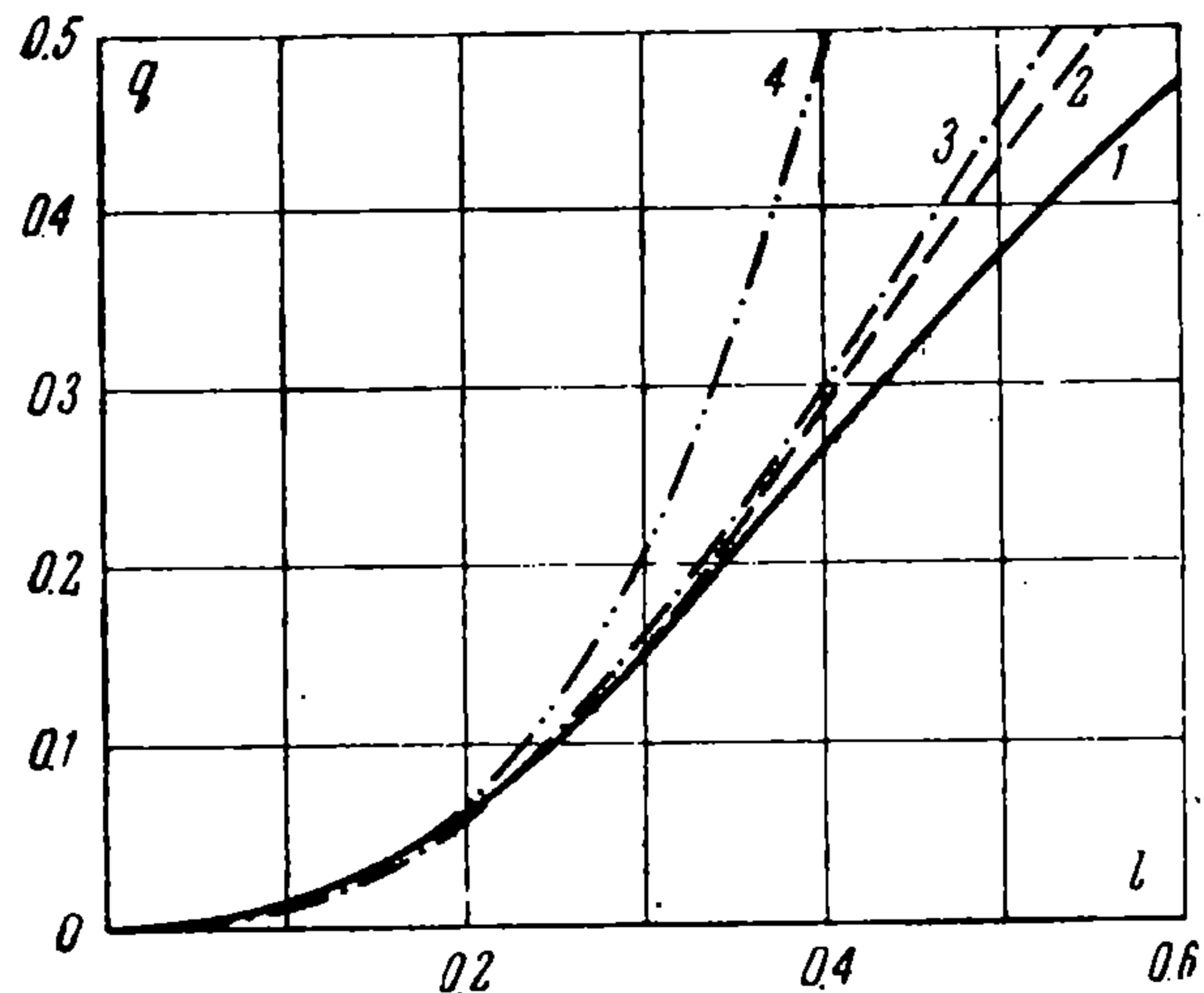
$$l = \left( \frac{3}{4\pi} v \right)^{1/3}$$

Пунктиром 2 на этой же фигуре нанесены результаты решения линеаризованной задачи о взрыве с учетом начального давления газа, сплошной линией 1 — значения, найденные при полном численном решении задачи о точечном взрыве [3], линией 4 — соответствующее автомодельное решение.

К сожалению, данные полного решения задачи о взрыве линейного и плоского зарядов до настоящего времени отсутствуют. Фиг. 2 свидетельствует о том, что приближенное решение задачи о взрыве рассматриваемым методом интегральных соотношений обладает примерно той же точностью, что и решение линеаризованной задачи, — отличаясь от последнего своей простотой.

Кроме того, приведенные решения задач о поршне и о взрыве позволяют сделать заключение о том, что в этих задачах имеет место приближенная эквивалентность движений с плоскими, цилиндрическими и сферическими волнами. При использовании закона плоских сечений аэродинамики гиперзвуковых скоростей это приводит к эквивалентности соответствующих задач об обтекании профилей и тел вращения (в том числе и слабо затупленных).

<sup>1</sup> Расчеты выполнены Г. Орловой и Р. Бурмистровой. Переменная  $l$  введена для удобства сравнения с имеющимся точным решением при  $\nu = 3$ .



Фиг. 2

Приведем более сложный пример, в котором может быть использован метод интегральных соотношений.

Рассмотрим частную задачу о нестационарном сверхзвуковом источнике в сжимаемом газе, возникающую при изучении действия ударных труб с расширяющимся соплом.

Известно точное решение уравнений установившегося движения сжимаемого газа, в котором частицы газа движутся вдоль лучей, выходящих из некоторой точки, и значения всех параметров газа одинаковы на сферах с центром в этой точке (источник в сжимаемом газе). Для случая адиабатических движений совершенного газа решение не может быть продолжено до центра и существует лишь вне сферы «критического» радиуса  $r_*$ , причем скорость газа  $v_*$  в точках на этой сфере, называемой ядром источника, равна скорости звука. Если давление и плотность (или температура) газа на поверхности ядра источника заданы и равны  $p_*$  и  $\rho_*$ , то существуют два непрерывных течения, продолжающихся до бесконечности. В одном из них скорость газа при удалении от центра падает, обращаясь в бесконечности в нуль; давление и плотность при этом возрастают

$$\text{от } p_* \text{ и } \rho_* \text{ до } p_T = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} p_* \text{ и } \rho_T = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \rho_* \quad \left(\begin{array}{l} \text{дозвуковой} \\ \text{источник} \end{array}\right)$$

В другом течении скорость газа при удалении от ядра возрастает

$$\text{от } v_* \text{ до } \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} v_* \quad \left(\begin{array}{l} \text{сверхзвуковой} \\ \text{источник} \end{array}\right)$$

в бесконечности, а давление и плотность при этом соответственно уменьшаются до нуля (сверхзвуковой источник). Аналогичным образом может быть рассмотрен источник в сжимаемом газе и в случае цилиндрической симметрии течения. Решение при этом существует вне ядра, представляющего собой круглый цилиндр.

Если давление  $p^\circ$  в бесконечности больше нуля, но меньше  $p_T$ , то непрерывное течение становится невозможным и в потоке возникает ударная волна. Течение состоит при этом из прилегающего к ядру участка сверхзвукового источника, который скачком через ударную волну переходит при некотором  $r = r^*$  в участок дозвукового источника, простирающийся в бесконечность. С ростом давления  $p^\circ$  от нуля ударная волна перемещается от бесконечности к ядру; интенсивность ее при приближении к ядру уменьшается, пока при  $p^\circ = p_T$  ударная волна не станет бесконечно слабой и сольется с поверхностью ядра, а поток всюду станет дозвуковым.

Рассмотрим теперь трубу, состоящую из цилиндрической и конической частей.

Пусть коническая часть трубы заполнена однородным покоящимся газом, а в цилиндрической части в начальный момент параметры газа таковы, что в последующее время газ начинает вытекать из нее в коническую часть с сверхзвуковой скоростью. Расчет возникающего при описанных условиях движения можно приближенно свести к частному случаю следующей задачи о нестационарном источнике.

Пусть в начальный момент вне сферы радиуса  $r_0$  газ покоится и имеет давление  $p^\circ$  и плотность  $\rho^\circ$ . Внутри сферы между  $r_0$  и  $r_* < r_0$  в начальный момент газ движется по закону, соответствующему сверхзвуковому источнику, и имеет давление и плотность при заторможенном состоянии, равные  $p_T$  и  $\rho_T$ . Рассмотрим движение, возникающее при распаде такого произвольного разрыва, при условии, что на поверхности  $r = r_*$  поддерживаются неизменные значения скорости  $v_*$ , давления  $p_*$  и плотности  $\rho_*$ . Ограничимся случаями таких значений характерных параметров  $p^\circ / p_T$ ,  $\rho^\circ / \rho_T$  (или  $T^\circ / T_T$ ),  $r_0 / r_*$  (или  $M_0$ ),  $\gamma$  и  $\gamma^\circ$ , при которых в обе стороны от контактного разрыва будут распространяться ударные волны, причем координата устанавливающегося асимптотически скачка  $r_{ск} > r_0$ .

Применим для составления уравнений, приближенно описывающих движение газа, интегральные соотношения.

Пусть, как и раньше,  $M$ ,  $K$  и  $E$  обозначают соответственно массу, количество движения и энергию газа, заключенного между контактной поверхностью разрыва и одной из ударных волн. Уравнения сохранения массы для области вне контакт-

ной поверхности (индекс «плюс») и внутри нее (индекс «минус») имеют вид

$$\frac{dM_+}{dt} = \rho^\circ \dot{R}^\circ S^\circ, \quad \frac{dM_-}{dt} = \dot{\rho}_0 (v_0 - \dot{R}_0) S_0$$

или после интегрирования

$$M_+ = \rho^\circ (V^\circ - V_{00}), \quad M_- = qt - \int_{V_{00}}^{V_0} \rho_0(V) dV \quad (4.4)$$

Здесь  $q$  — массовый расход источника, индексы «градус» и «нуль» относятся соответственно к значениям параметров газа перед ударными волнами, распространяющимися наружу и внутрь (по частицам). Величины с индексом «градус» — известные постоянные, величины с индексом «нуль» — известные функции от  $R_0$  (сверхзвуковой источник),  $V_{00}$  — объем внутри начального разрыва.

Уравнения количества движения имеют вид

$$\frac{dK_+}{dt} = p_* S_* - p^\circ S^\circ + \int_{S_*}^{S^\circ} p dS \quad \frac{dK_-}{dt} = p_0 S_0 + \rho_0 v_0 (v_0 - \dot{R}_0) S_0 - p_* S_* + \int_{S_0}^{S_*} p dS \quad (4.5)$$

Из закона сохранения энергии получим

$$\frac{dE_+}{dt} = \rho^\circ \dot{R}^\circ S^\circ e^\circ + p_* \dot{R}_* S_* \quad \frac{dE_-}{dt} = \rho_0 S_0 (v_0 - \dot{R}_0) \left( \frac{v_0^2}{2} + e_0 \right) + p_0 v_0 S_0 - p_* \dot{R}_* S_* \quad (4.6)$$

Метод интегральных соотношений применим в простейшем варианте. Предположим, что  $p_1 = p_2 = p_*(t)$ ,  $v_1 = v_2 = \dot{R}_*(t)$ .

Уравнения (4.5) — (4.6) с использованием интегралов (4.4) примут после этого вид

$$\begin{aligned} \rho^\circ (V^\circ - V_{00}) \ddot{R}_* + \rho^\circ S^\circ \dot{R}^\circ \dot{R}_* &= (p_* - p^\circ) S^\circ \\ \left( qt - \int_{V_{00}}^{V_0} \rho_0 dV \right) \ddot{R}_* + \rho_0 S_0 (v_0 - \dot{R}_0) (\dot{R}_* - v_0) &= (p_0 - p_*) S_0 \\ \rho^\circ (V^\circ - V_{00}) \dot{R}_* \ddot{R}_* + \rho^\circ S^\circ \dot{R}^\circ \frac{\dot{R}_*^2}{2} + \frac{V^\circ - V_*}{\gamma - 1} \dot{p}_* + \frac{S^\circ \dot{R}^\circ}{\gamma - 1} (p_* - p^\circ) - \frac{\gamma}{\gamma - 1} p_* S_* \dot{R}_* &= 0 \\ \left( qt - \int_{V_{00}}^{V_0} \rho_0 dV \right) \dot{R}_* \ddot{R}_* + \frac{V_* - V_0}{\gamma - 1} \dot{p}_* &= (q - p_0 S_0 \dot{R}_0) \frac{v_0^2 - \dot{R}_*^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} p_0 v_0 S_0 - \\ &- \frac{\gamma}{\gamma - 1} p_* S_* \dot{R}_* + \frac{p_* - p_0}{\gamma - 1} S_0 \dot{R}_0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Четыре уравнения (4.7) содержат такое же количество неизвестных функций  $R_0$ ,  $R_*$ ,  $R^\circ$ ,  $p_*$ . Начальные условия для решения системы (4.7) имеют следующий вид

$$R_0 = R_* = R^\circ = r_0, \quad p_* = p \quad \text{при } t = 0$$

где  $p$  определяется из решения системы следующих алгебраических уравнений, которые получаются, если в уравнениях (4.7) положить  $\ddot{R}_* = \dot{p}_* = 0$ ,  $S = 1$  и ввести обозначения  $\dot{R}_0(0) = D_-$ ,  $\dot{R}_*(0) = U$ ,  $\dot{R}^\circ(0) = D_+$ :

$$\begin{aligned} \rho^\circ D_+ U &= p - p^\circ, \quad \rho_0 (v_0 - D_-) (U - v_0) = p_0 - p \\ \frac{1}{2} \rho^\circ D_+ U^2 + \frac{p - p^\circ}{\gamma - 1} D_+ - \frac{\gamma}{\gamma - 1} p U &= 0 \\ \frac{1}{2} \rho_0 (v_0 - D_-) (v_0^2 - U^2) + \frac{\gamma}{\gamma - 1} p_0 v_0 - \frac{\gamma}{\gamma - 1} p U + \frac{p - p_0}{\gamma - 1} D_- &= 0 \end{aligned}$$

Система уравнений (4.7) может быть численно проинтегрирована для любого набора определяющих параметров, при котором осуществляется принятая схема течения (т. е. для которого  $D_- > 0$ ).

Поступила 18 XI 1960

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. Физматгиз, М., 1959.
2. Черный Г. Г. Применение интегральных соотношений в задачах о распространении сильных ударных волн. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 1.
3. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Гостехиздат. М., 1957.