Прикладная математика и механика. Том XXIV, 1960
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

УСТОЙЧИВОСТЬ ПРОЦЕССОВ ПО ДВУМ МЕТРИКАМ

А. А. Мовчан

(Москва)

Пусть функции $q_1(t), \ldots, q_k(t)$ определяют положение точек материальной системы в любой момент времени $t \geqslant t_0$, где t_0 — данный начальный момент времени. Производные этих функций по t обозначим $q_{k+1}(t), \ldots, q_{2k}(t)$. Каждая совокупность функций $q_1(t), \ldots, q_{2k}(t)$ описывает некоторое движение материальной системы. Одно из этих движений, описываемое совокупностью функций $q_1{}^0(t), \ldots, q^0{}_{2k}(t)$, назовем невозмущенным, остальные движения, возможные для рассматриваемой материальной системы, назовем возмущенными.

Пусть заданы некоторые функции $Q_1(q_1, \ldots, q_{2k}, t), \ldots, Q_n(q_1, \ldots, q_{2k}, t)$ величин q_s, t. Предполагая величины q_s, Q_i безразмерными, обозначим

$$\rho_0(q(t), t) = \max_s |q_s(t) - q_s{}^0(t)| \qquad (1 \leqslant s \leqslant 2k)$$

$$\rho(q(t), t) = \max_i |x_i(t)| \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

$$x_i(t) = Q_i(q_1(t), \ldots, q_{2k}(t), t) - Q_i(q_1{}^0(t), \ldots, q_{2k}{}^0(t), t)$$

В этих обозначениях общее определение устойчивости невозмущенного движения $q_s{}^0(t)$ по отношению к величинам Q_i, данное Ляпуновым в работе [1] стр. 12—14) и обобщенное Четаевым [2] (стр. 9—11) на случай явной зависимости величин Q_i от времени t, полностью эквивалентно следующему определению: невозмущенное движение $q_s{}^0(t)$ называется устойчивым по отношению к величинам Q_i, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно найти такое число $\delta > 0$, чтобы для всякого возмущенного движения $q_s(t)$, удовлетворяющего в начальный момент времени t_0 условию

$$\rho_0(q(t_0), t_0) < \delta \qquad (0.1)$$

при всех $t \geqslant t_0$ выполнялось условие

$$\rho(q(t), t) < \varepsilon \qquad (0.2)$$

Обычно вопросы устойчивости рассматриваются при таких предположениях, при которых функции $x_i(t)$ непрерывны для любых $t \geqslant t_0$, а функции Q_i непрерывно зависят от q_s, t. При этом функции ρ_0, ρ имеют следующие свойства.

0.1. Функция $\rho_0(q(t), t)$ — вещественная неотрицательная величина, которая для невозмущенного движения $q_s{}^0(t)$ обращается в нуль при любых $t \geqslant t_0$.

0.2. Функция $\rho(q(t), t)$ — вещественная неотрицательная величина, которая для невозмущенного движения $q_s{}^0(t)$ обращается в нуль при любых $t \geqslant t_0$.

0.3. Вследствие непрерывной зависимости величин Q_i от $q_1, \ldots, q_{2k}$ для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что условие $\rho(q(t_0), t_0) < \varepsilon$ выполняется всякий раз, когда $\rho_0(q(t_0), t_0) < \delta$.

0.4. Вследствие непрерывности функций $x_i(t)$ вдоль любого возмущенного движения $q_s(t)$ функция $\rho(q(t), t)$ непрерывна по t при любых $t \geqslant t_0$.

Дав общее определение устойчивости невозмущенного движения $q_s{}^0(t)$ по отношению к величинам Q_i, основанное на неравенствах типа (0.1), (0.2), Ляпунов при развитии своего прямого метода [1] принял за основу определение устойчивости вытекающее из общего при дополнительном предположении [1] (стр. 17) о свойствах функций Q_i. В принятых нами обозначениях это предположение можно сформулировать следующим образом.

0.5. Для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\delta > 0$, что условие $\rho_0(q(t_0), t_0) < \varepsilon$ выполняется всякий раз, когда $\rho(q(t_0), t_0) < \delta$.

Легко видеть, что при выполнении перечисленных пяти свойств данное выше определение устойчивости полностью эквивалентно следующему определению: невозмущенное движение $q_s^0(t)$ называется устойчивым, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно найти такое число $\delta > 0$, чтобы для всякого возмущенного движения $q_s(t)$, удовлетворяющего в начальный момент времени t_0 условию

$$\rho(q(t_0), t_0) < \delta \tag{0.3}$$

при всех $t \geqslant t_0$ выполнялось условие

$$\rho(q(t), t) < \varepsilon \tag{0.4}$$

Это более узкое определение устойчивости, основанное на неравенствах (0.3), (0.4) или им эквивалентных, получило преобладающее значение как в работах самого Ляпунова, так и в работах последующих авторов. В работе [3] (стр. 272) Ляпунов напоминает о существовании более общего определения, основанного на неравенствах типа (0.1), (0.2) в том частном случае, когда $n < 2k$ и каждая из величин Q_i есть просто одна из величин q_s (определение устойчивости по отношению к части переменных). Применительно к этому определению, вытекающему из отказа от свойства 0.5, в работе [4] сформулированы теоремы о свойствах функций Ляпунова, достаточных для устойчивости или неустойчивости невозмущенного движения по отношению к части переменных; две из этих теорем (об устойчивости и асимптотической устойчивости) доказаны и проиллюстрированы примерами в работе [5]. Применительно к общему определению, основанному на неравенствах типа (0.1), (0.2), в работе [6] доказана теорема о свойствах интеграла уравнений возмущенного движения, достаточных для устойчивости невозмущенного движения $q_s^0(t)$ по отношению к величинам Q_i, и даны соответствующие примеры.

Предлагаемая работа основана на отказе от свойства 0.5. Мы возвращаемся к общему определению устойчивости Ляпунова, обобщая его на случаи, когда процессы, исследуемые на устойчивость, необязательно связаны с конечным числом переменных q_s, Q_i; при этом конструкция левых частей неравенств (0.1), (0.2) может быть произвольной, лишь бы только выполнялись аксиомы 0.1—0.4 (для задач механики сплошных сред левые части (0.1), (0.2) могут зависеть, например, не только от перемещений и скоростей точек сплошного тела, но и от деформаций, напряжений, температур и т. д. [7, 8]). Чтобы избежать двусмысленностей в толковании определения устойчивости, связанных с выбором начальных моментов времени t_0, мы считаем целесообразным в определении устойчивости явно указывать множество T_0 возможных начальных моментов времени t_0 и, кроме определения устойчивости, иметь в виду также определение устойчивости, равномерной на множестве T_0. Для каждого из определений доказана теорема прямого метода Ляпунова о свойствах функционалов, необходимых и достаточных для того, чтобы имел место тот или иной вид устойчивости или неустойчивости. Поскольку заранее неизвестно, обладают ли исследуемые на устойчивость процессы свойством непрерывности по начальным данным на конечном интервале времени, имеет смысл, не меняя определения устойчивости, обходиться, где это возможно, без специального предположения о конечности или бесконечности интервала времени T, на котором исследуется устойчивость (смотри замечание об определении устойчивости на конечном интервале времени в работе [9] (стр. 10)). Определения устойчивости имеют при этом много общего с определениями корректности для уравнений с частными производными [10] (стр. 28—32), [11] (стр. 80—83). При доказательстве теорем об устойчивости единственность заранее не предполагается. Напротив, некоторые суждения о единственности получаются как следствие из факта существования функционалов с определенными свойствами.

1. В множестве Z точек z произвольной природы задана кривая $z(z_0, t_0, t)$, начинающаяся в точке z_0 в момент времени t_0, если каждому определенному значению вещественного параметра (времени) t из

промежутка $t_0 \leqslant t < t_{00}$ или $t_0 \leqslant t \leqslant t_{00}$ (короче, из промежутка (t_0, t_{00})), принадлежащего данному интервалу времени T, отвечает в Z определенная точка $z = z(z_0, t_0, t)$, причем $z_0 = z(z_0, t_0, t_0)$. Из множества всевозможных кривых выделим класс кривых, называемых в дальнейшем *процессами*, которые удовлетворяют некоторым условиям и обладают следующими свойствами (при нумерации свойств (аксиом), определений, теорем первая цифра указывает номер параграфа).

1.1. Любой процесс, определенный в промежутке (t_0, t_{00}), будет также процессом, если его рассматривать в любом промежутке (t_1, t_{11}), содержащемся в промежутке (t_0, t_{00}).

1.2. Если два процесса имеют в момент времени t_1 общую точку, то составная кривая, состоящая при $t \leqslant t_1$ из точек одного процесса, а при $t \geqslant t_1$ — из точек другого процесса, тоже будет процессом.

1.3. Существует процесс, определенный на всем интервале T. Обозначим его $z = z^0(t)$ и назовем невозмущенным процессом, остальные процессы $z(z_0, t_0, t) \not\equiv z^0(t)$ назовем возмущенными.

Процесс, для которого $t_0 = t_{00}$, назовем вырожденным. Если $t_{00} = \infty$, процесс назовем неукороченным.

Под точкой z можно понимать любую совокупность параметров, функций и т. д., характеризующих состояние (механическое, физическое, химическое и т. д.) материальной системы в данный момент времени t, или какое-либо ее свойство, представляющее интерес для исследования. Тогда процесс $z(z_0, t_0, t)$ будет математической абстракцией механического, физического, химического и др. процессов, протекающих с течением времени в материальной системе.

2. Если точка z в момент времени t принадлежит некоторому процессу, будем говорить также, что этому процессу принадлежит пара (z, t). Пусть для любой пары (z, t) любого процесса определены расстояния (метрики) $\rho_0(z, t)$, $\rho(z, t)$, обладающие свойствами:

2.1. Расстояние $\rho_0(z, t)$ — вещественное неотрицательное число для любой пары (z, t) любого процесса, причем

$$\rho_0(z^0(t), t) = 0, \qquad t \in T.$$

2.2. Расстояние $\rho(z, t)$ — вещественное неотрицательное число для любой пары (z, t) любого процесса, причем

$$\rho(z^0(t), t) = 0, \qquad t \in T.$$

2.3. Расстояние $\rho(z, t)$ непрерывно по метрике $\rho_0(z, t)$ [равномерно] на данном множестве $T_0 \subseteq T$, т. е. для любого числа $\varepsilon > 0$ и любого момента времени $t_0 \in T_0$ найдется такое число $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ $[\delta(\varepsilon) > 0]$, что неравенство $\rho(z, t_0) < \varepsilon$ будет выполняться для всех пар (z, t_0), принадлежащих каким-либо процессам и удовлетворяющих условию $\rho_0(z, t_0) < \delta$.

2.4. Для любого невырожденного процесса $z(z_0, t_0, t)$ в промежутке (t_0, t_{00}), где он определен, вещественная функция $\rho(z(z_0, t_0, t), t)$ аргумента t непрерывна по t. Здесь $\rho(z(z_0, t_0, t), t)$ означает расстояние от невозмущенного процесса до точки z, принадлежащей процессу $z(z_0, t_0, t)$ в момент времени t.

Расстояния ρ_0, ρ, удовлетворяющие свойствам 2.1, 2.2, 2.3, можно получить, например, привнося в множество Z метрики $\rho_1(z_1, z_2)$, $\rho_2(z_1, z_2)$, удовлетворяющие обычным аксиомам метрического пространства [12] (стр. 23) за исключением требования, чтобы из $\rho_1(z_1, z_2) = 0$, $\rho_2(z_1, z_2) = 0$ обязательно следовало $z_1 = z_2$, и полагая затем

$$\rho_0(z, t) = \rho_1(z, z^0(t)) + \rho_2(z, z^0(t)), \qquad \rho(z, t) = \rho_2(z, z^0(t))$$

Свойство 2.4 будет также выполняться, если процессы $z(z_0, t_0, t)$ будут непрерывными по метрике ρ_2. В дальнейшем, говоря о метриках ρ_0, ρ, имеем в виду расстояния $\rho_0(z, t)$, $\rho(z, t)$, обладающие свойствами 2.1—2.4.

3. Сравнивая невозмущенный процесс $z^0(t)$ со всевозможными процессами $z(z_0, t_0, t)$, которые начинаются в моменты времени t_0, принадлежащие данному множеству $T_0 \subseteq T$, дадим следующие определения устойчивости.

Определение 3.1. Невозмущенный процесс $z^0(t)$ называется устойчивым по метрикам ρ_0, ρ на интервале времени T при выборе начальных моментов времени t_0 из данного множества $T_0 \subseteq T$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ и любого начального момента времени $t_0 \in T_0$ можно найти такое число $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$, чтобы для всякого возмущенного процесса $z(z_0, t_0, t)$, удовлетворяющего в начальный момент $t_0 \in T_0$ условию

$$\rho_0(z_0, t_0) < \delta \tag{3.1}$$

во всей области определения процесса выполнялось условие

$$\rho(z(z_0, t_0, t), \; t) < \varepsilon \tag{3.2}$$

Определение 3.2. Невозмущенный процесс $z^0(t)$ называется устойчивым по метрикам ρ_0, ρ на интервале времени T *равномерно* на данном множестве $T_0 \subseteq T$ начальных моментов времени t_0, если для любого числа $\varepsilon > 0$ и любого начального момента времени $t_0 \in T_0$ можно найти такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, одно и то же для любых $t_0 \in T_0$, чтобы для всякого возмущенного процесса $z(z_0, t_0, t)$, удовлетворяющего в начальный момент времени $t_0 \in T_0$ условию (3.1), во всей области определения процесса выполнялось условие (3.2).

Из определений 3.1, 3.2 вытекают определения неустойчивости.

Определение 3.3. Скажем, что невозмущенный процесс $z^0(t)$ не является устойчивым по метрикам ρ_0, ρ на интервале времени T при выборе начальных моментов времени t_0 из данного множества $T_0 \subseteq T$, если для некоторого числа $\varepsilon_1 > 0$ найдется по крайней мере один такой начальный момент времени $t_0 \in T_0$, что для любого числа $\delta > 0$ можно найти возмущенный процесс $z(z_0, t_0, t)$, $z_0 = z_0(\delta)$, для которого в упомянутый начальный момент времени t_0 выполняется условие (3.1), а в некоторый момент времени $t_1 \geqslant t_0$ из области определения процесса выполняется условие

$$\rho(z(z_0, t_0, t_1), t_1) \geqslant \varepsilon_1 \tag{3.3}$$

Определение 3.4. Скажем, что невозмущенный процесс $z^0(t)$ не является устойчивым по метрикам ρ_0, ρ на интервале времени T равномерно на данном множестве $T_0 \subseteq T$ начальных моментов времени t_0, если для некоторого числа $\varepsilon_1 > 0$ и любого числа $\delta > 0$ можно найти возмущенный процесс $z(z_0, t_0, t)$ ($z_0 = z_0(\delta)$, $t_0 = t_0(\delta) \in T_0$), для которого в начальный момент времени t_0 выполняется условие (3.1), а в некоторый момент времени $t_1 \geqslant t_0$ из области определения процесса выполняется условие (3.3).

Упоминание в определениях устойчивости не только метрики ρ (аналог величин Q_i в общем определении Ляпунова), по отношению к которой исследуется устойчивость, но и метрики ρ_0, которая служит мерой начальных возмущений, вызвано тем обстоятельством, что в различных задачах мера начальных возмущений может быть связана с различными характеристиками исследуемых процессов. В общем определении Ляпунова мера начальных возмущений не оговаривается явно, так как подразумевается, что она раз и навсегда связана определенным образом с отклонениями координат и скоростей. В случае, когда $\rho \equiv \rho_0$, будем говорить об устойчивости по (одной) метрике ρ.

4. Зафиксируем какое-нибудь число $R > 0$. Любой процесс $z(z_0, t_0, t)$, который для любого t из области своего определения (t_0, t_{00}) удовлетворяет условию $\rho(z(z_0, t_0, t), t) < R$, назовем R-процессом. Обозначим через RZT множество пар (z, t), для каждой из которых можно указать R-процесс, начинающийся в точке z в момент времени t. Скажем, что на RZT определен вещественный функционал $f\ (z, t)$, если каждой определенной паре $(z, t) \in RZT$ отвечает определенное (одно для данной пары и конечное) вещественное число $f(z, t)$. Значение, которое принимает функционал $f(z, t)$ в момент времени t в точке z, принадлежащей R-процессу $z(z_0, t_0, t)$, обозначим $f(z(z_0, t_0, t), t)$. Очевидно, метрики $\rho_0(z, t)$, $\rho(z, t)$ являются примерами функционалов.

Определение 4.1. Функционал $f(z, t)$ называется определенно-положительным по метрике ρ, если $f(z, t) \geqslant 0$ для любой пары $(z, t) \in RZT$ и если для любого положительного числа $\varepsilon < R$ найдется такое число $\mu(\varepsilon) > 0$, зависящее только от ε, что оценка $f(z, t) \geqslant \mu$ выполняется для любой пары $(z, t) \in RZT$, удовлетворяющей условию $\rho(z, t) \geqslant \varepsilon$ (если такие пары имеются).

Определение 4.2. Функционал $f(z, t)$ называется невозрастающим, если вдоль любого R-процесса $z(z_0, t_0, t)$ функция $f(z(z_0, t_0, t), t)$ времени t не возрастает с ростом t в области (t_0, t_{00}), где R-процесс определен.

Определение 4.3. Функционал $f(z, t)$ называется непрерывным по метрике ρ_0 на множестве T_0, если для любого числа $\varepsilon > 0$ и любого момента времени $t_0 \in T_0$ найдется такое число $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$, что оценка $f(z_0, t_0)| < \varepsilon$ выполняется для любой пары $(z_0, t_0) \in RZT$, удовлетворяющей условию $\rho_0(z_0, t_0) < \delta$ (в силу свойства 2.1, функционал $f(z, t)$, непрерывный по метрике ρ_0 на множестве T_0, удовлетворяет условию $f(z^0(t_0), t_0) = 0$ при любом $t_0 \in T_0$). Если число δ в этом определении можно выбрать одним и тем же для всех $t_0 \in T_0$, т. е. зависящим только от ε $(\delta = \delta(\varepsilon) > 0)$, свойство непрерывности 4.3 назовем *равномерным* на множестве T_0.

Определение 4.4. Областью $R(f > 0)$ назовем множество пар $(z, t) \in RZT$, для каждой из которых $f(z, t) > 0$. Функционал $f(z, t)$ назовем ограниченным в области $R(f > 0)$, если для любой пары (z, t), принадлежащей этой области, выполняется оценка $f(z, t) < N$, где N — какое-нибудь фиксированное положительное число.

Определение 4.5. Скажем, что функционал $f(z, t)$ обладает в области $R(f > 0)$ определенно-положительной производной, если производная $df(z(z_0, t_0, t), t)/dt$ существует на всей области определения (t_0, t_{00}) любого R-процесса $z(z_0, t_0, t)$, для которого $f(z_0, t_0) > 0$, и ограничена на (t_0, t_{00}) снизу некоторым положительным числом (зависящим, вообще говоря, от взятого R-процесса).

5. Докажем теоремы прямого метода Ляпунова об устойчивости и равномерной устойчивости, а также предложения об асимптотической устойчивости и о связи между свойствами функционалов и единственностью.

Теорема 5.1. Для того чтобы невозмущенный процесс $z^0(t)$ был устойчивым по метрикам ρ_0, ρ на интервале времени T при выборе начальных моментов времени t_0 из данного множества $T_0 \subseteq T$, необходимо и достаточно, чтобы для некоторого числа $R > 0$ на RZT существовал определенно-положительный по метрике ρ и невозрастающий функционал $f(z, t)$, непрерывный по метрике ρ_0 на множестве T_0.

Теорема 5.2. Пусть расстояние $\rho(z, t)$ непрерывно по метрике $\rho_0(z, t)$ равномерно на множестве $T_0 \subseteq T$. Для того чтобы невозмущенный процесс $z^0(t)$ был устойчивым по метрикам ρ_0, ρ на интервале времени T равномерно на множестве $T_0 \subseteq T$ начальных моментов времени t_0, необходимо и достаточно, чтобы для некоторого числа $R > 0$ на RZT существовал определенно-положительный по метрике ρ и невозрастающий функционал $f(z, t)$, непрерывный по метрике ρ_0 равномерно на множестве T_0.

Доказательства теорем 5.1, 5.2 проведем одновременно, выделяя в квадратных скобках те добавления и видоизменения, которые относятся к случаю устойчивости, равномерной на множестве T_0.

Необходимость (в теоремах 5.1, 5.2, 6,1, 6.2 необходимость доказывается для того, чтобы обнаружить непротиворечивость требований, наложенных на функционал $f(z, t)$ условиями теорем). Зафиксируем какое-нибудь число $R > 0$ и каждой паре $(z, t) \in RZT$ поставим в соответствие множество $R(z, t)$ всех пар (z_1, t_1), принадлежащих всевозможным R-процессам, начинающимся в точке z в момент времени t. Обозначим

$$f(z, t) = \sup \rho(z_1, t_1) \quad \text{для} \quad (z_1, t_1) \in R(z, t) \tag{5.1}$$

(функционал типа (5.1) применялся в работе [13]).

В силу определения множества $R(z, t)$, для любой пары $(z_1, t_1) \in R(z, t)$ выполняется условие $\rho(z_1, t_1) < R$. Следовательно, $f(z, t) \leqslant R$ и формула (5.1) каждой паре $(z, t) \in RZT$ ставит в соответствие определенное (одно и конечное) вещественное число $f(z, t)$.

В силу определения множества $R(z, t)$, всегда $(z, t) \in R(z, t)$, и из формулы (5.1) вытекает оценка $f(z, t) \geqslant \rho(z, t)$. Отсюда и из свойства 2.2 следует, что функционал (5.1) определенно-положителен по метрике ρ (определение 4.1), и в качестве $\mu(\varepsilon)$ можно взять $\mu(\varepsilon) \equiv \varepsilon$.

Функционал (5.1) — невозрастающий (определение 4.2). Действительно, рассмотрим какой-нибудь R-процесс $z(z_0, t_0, t)$ и какие-нубудь две точки на нем $z' = z(z_0, t_0, t')$ и $z'' = z(z_0, t_0, t'')$, где $t'' \geqslant t' \geqslant t_0$. В силу свойств процессов 1.1, 1.2, все пары (z, t) множества RZT, принадлежащие всевозможным процессам, начинающимся в точке z'' в момент времени t'', принадлежат также некоторым процессам, начинающимся в точке z' в момент времени t'; следовательно, $R(z', t') \supseteq R(z'', t'')$. Отсюда и из формулы (5.1) получается оценка $f(z', t') \geqslant f(z'', t'')$ или, более подробно, $f(z(z_0, t_0, t'), t') \geqslant f(z(z_0, t_0, t''), t'')$.

Итак, свойствами 4.1, 4.2 функционал (5.1) обладает независимо от устойчивости или неустойчивости невозмущенного процесса $z^0(t)$. Пусть невозмущенный процесс $z^0(t)$ устойчив по метрикам ρ_0, ρ на интервале времени T при выборе начальных моментов времени t_0 из множества $T_0 \subseteq T$ [равномерно на множестве T_0]. Это значит, что для любого числа $\varepsilon_1 > 0$ и любого начального момента времени $t_0 \in T_0$ можно найти такое число $\delta_1(\varepsilon_1, t_0) > 0$ $[\delta_1(\varepsilon_1) > 0]$, чтобы для всякого возмущенного процесса $z(z_0, t_0, t)$, удовлетворяющего в начальный момент времени $t_0 \in T_0$ условию $\rho_0(z_0, t_0) < \delta_1$, во всей области определения процесса выполнялось условие $\rho(z(z_0, t_0, t), t) < \varepsilon_1$; тогда, в силу определения множества $R(z, t)$, для любой пары $(z_1, t_1) \in R(z_0, t_0)$ будет выполняться условие $\rho(z_1, t_1) < \varepsilon_1$, и из формулы (5.1) вытекает оценка $0 \leqslant f(z_0, t_0) \leqslant \varepsilon_1$. Следовательно, функционал (5.1) непрерывен по метрике ρ_0 [равномерно] на множестве T_0 и в качестве δ можно взять, например, число $\delta(\varepsilon, t_0) = \delta_1(\varepsilon/2, t_0)$ $[\delta(\varepsilon) = \delta_1(\varepsilon/2)]$.

Достаточность. Пусть для некоторого числа $R > 0$ на RZT существует определенно-положительный по метрике ρ и невозрастающий функционал $f(z, t)$, непрерывный по метрике ρ_0 [равномерно] на множестве T_0. Пусть задано любое число $\varepsilon > 0$. Очевидно, при доказательстве теоремы можно считать, что $\varepsilon < R$.

Случай 1: для заданного ε найдутся пары $(z, t) \in RZT$, удовлетворяющие условию $\rho(z, t) \geqslant \varepsilon$.

Функционал $f(z, t)$ определенно-положителен по метрике ρ (определение 4.1), поэтому найдется такое число $\mu(\varepsilon) > 0$, что оценка $f(z, t) \geqslant \mu$ выполняется для любой пары $(z, t) \in RZT$, удовлетворяющей условию $\rho(z, t) \geqslant \varepsilon$.

Функционал $f(z, t)$ непрерывен по метрике ρ_0 [равномерно] на множестве T_0 (определение 4.3), поэтому для числа $\mu(\varepsilon) > 0$ и любого момента времени $t_0 \in T_0$ найдется такое число $\delta_1(\mu(\varepsilon), t_0) > 0$ $[\delta_1(\mu(\varepsilon)) > 0]$, что оценка $|f(z_0, t_0)| < \mu$ выполняется для любой пары $(z_0, t_0) \in RZT$, удовлетворяющей условию $\rho_0(z_0, t_0) < \delta_1$.

Расстояние $\rho(z, t)$ непрерывно по метрике $\rho_0(z, t)$ [равномерно] на множестве T_0 (свойство 2.3), поэтому для заданного числа $\varepsilon > 0$ и любого момента времени $t_0 \in T_0$ найдется такое число $\delta_2(\varepsilon, t_0) > 0$ $[\delta_2(\varepsilon) > 0]$, что неравенство $\rho(z_0, t_0) < \varepsilon$ выполняется для любой пары $(z_0, t_0) \in RZT$, удовлетворяющей условию $\rho_0(z_0, t_0) < \delta_2$.

Обозначим

$$\delta(\varepsilon, t_0) = \min(\delta_1(\mu(\varepsilon), t_0), \delta_2(\varepsilon, t_0)), \qquad [\delta(\varepsilon) = \min(\delta_1(\mu(\varepsilon)), \delta_2(\varepsilon))]$$

и покажем, что для любого начального момента времени $t_0 \in T_0$ всякий возмущенный процесс $z(z_0, t_0, t)$, удовлетворяющий условию (3.1), во всей области своего определения будет удовлетворять условию (3.2). Допустим, что это не так и для некоторого начального момента времени $t_0 \in T_0$ существует возмущенный процесс $z(z_0, t_0, t)$, для которого выполняется условие (3.1), а для некоторого момента времени $t_1 \geqslant t_0$ из области определения рассматриваемого процесса выполняется условие

$$\rho(z(z_0, t_0, t_1), t_1) \geqslant \varepsilon \tag{5.2}$$

В силу выбора числа $\delta \leqslant \delta_1$, из условия (3.1) вытекает оценка

$$f(z(z_0, t_0, t_0), t_0) = f(z_0, t_0) < \mu \tag{5.3}$$

В силу выбора числа $\delta \leqslant \delta_2$, из условия (3.1) вытекает также

$$\rho(z(z_0, t_0, t_0), t_0) = \rho(z_0, t_0) < \varepsilon$$

Отсюда и из условия (5.2) видно, что $t_0 < t_1$, т. е. рассматриваемый процесс — невырожденный. Рассмотрим множество всех тех значений t из промежутка $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, для которых выполняется условие $\rho(z(z_0, t_0, t), t) \geqslant \varepsilon$; это множество непустое, так как по предположению (5.2) ему припадлежит значение $t = t_1$; нижнюю грань этого ограниченного непустого множества обозначим t_{00}, а соответствующую точку рассматриваемого возмущенного процесса обозначим $z_{00} = z(z_0, t_0, t_{00})$. Из непрерывности функции $\rho(z(z_0, t_0, t), t)$ (свойство 2.4) и определения нижней грани выводим, что для любого t из промежутка $t_0 \leqslant t < t_{00}$ выполняется условие $\rho(z(z_0, t_0, t), t) < \varepsilon$, причем

$$\rho(z(z_0, t_0, t_{00}), t_{00}) = \rho(z_{00}, t_{00}) = \varepsilon$$

Следовательно (смотри начало доказательства),

$$f(z(z_0, t_0, t_{00}), t_{00}) = f(z_{00}, t_{00}) \geqslant \mu \tag{5.4}$$

Так как $\varepsilon < R$, рассматриваемый возмущенный процесс $z(z_0, t_0, t)$ в промежутке $t_0 \leqslant t \leqslant t_{00}$ является R-процессом. Для этого R-процесса при $t = t_0$ выполняется оценка (5.3), а при $t = t_{00} > t_0$ выполняется оценка (5.4), что противоречит условию невозрастания функционала $f(z, t)$ (определение 4.2).

Случай 2: для заданного ε нет ни одной пары $(z, t) \in RZT$, удовлетворяющей условию $\rho(z, t) \geqslant \varepsilon$.

Расстояние $\rho(z, t)$ непрерывно по метрике $\rho_0(z, t)$ [равномерно] на множестве T_0 (свойство 2.3), поэтому для заданного числа $\varepsilon > 0$ и любого момента времени $t_0 \in T_0$ найдется такое число $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ [$\delta(\varepsilon) > 0$], что неравенство $\rho(z_0, t_0) < \varepsilon$ выполняется для любой пары $(z_0, t_0) \in RZT$, удовлетворяющей условию $\rho_0(z_0, t_0) < \delta$. При найденном δ для любого возмущенного процесса $z(z_0, t_0, t)$, удовлетворяющего условию (3.1), во всей области определения процесса выполняется условие (3.2). Допустим, что это не так и существует возмущенный процесс $z(z_0, t_0, t)$, для которого выполняется условие (3.1) и, следовательно, в силу выбора числа δ, условие

$$\rho(z(z_0, t_0, t_0), t_0) = \rho(z_0, t_0) < \varepsilon \tag{5.5}$$

а для некоторого момента времени $t_1 \geqslant t_0$ из области определения рассматриваемого процесса выполняется условие (5.2). Сравнивая (5.5) и

(5.2), видим, что $t_1 > t_0$, т. е. рассматриваемый процесс — невырожденный; в силу непрерывности функции $\rho(z(z_0, t_0, t), t)$ (свойство 2.4) найдется такой момент времени t_* из промежутка $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, для которого точка $z_* = z(z_0, t_0, t_*)$ удовлетворяет условию $\rho(z_*, t_*) = \varepsilon$. Так как $\varepsilon < R$ и $(z_*, t_*) \in RZT$, мы пришли к противоречию с исходным предположением случая 2. Теоремы 5.1 и 5.2 доказаны.

Дополнение об асимптотических свойствах функционала $f(z, t)$. Пусть невозмущенный процесс $z^0(t)$ устойчив по метрикам ρ_0, ρ на интервале времени T равномерно на множестве $T_0 = T$ начальных моментов времени t_0 и пусть существуют неукороченные процессы $z(z_0, t_0, t)$, которые асимптотически приближаются по метрике ρ_0 к невозмущенному процессу $z^0(t)$, т. е. удовлетворяют условию

$$\rho_0(z(z_0, t_0, t), t) \to 0 \text{ при } t \to \infty \tag{5.6}$$

Тогда для некоторого числа $R > 0$ на RZT существует определенно-положительный по метрике ρ и невозрастающий функционал $f(z, t)$, непрерывный по метрике ρ_0 равномерно на множестве $T_0 = T$ (это уже доказано в теореме 5.2), который вдоль любого R-процесса, удовлетворяющего условию (5.6), исчезает

$$f(z(z_0, t_0, t), t) \to 0 \text{ при } t \to \infty \tag{5.7}$$

(это остается доказать).

Доказательство. Пусть задано любое число $\varepsilon > 0$ и пусть $z(z_0, t_0, t)$ — какой-нибудь R-процесс, удовлетворяющий условию (5.6). Нужно показать, что найдется такой момент времени $t_1 \geqslant t_0$, что при $t \geqslant t_1$ вдоль рассматриваемого R-процесса выполняется условие $|f(z(z_0, t_0, t), t)| < \varepsilon$.

Функционал $f(z, t)$ непрерывен по метрике ρ_0 равномерно на множестве $T_0 = T$ (определение 4.3), поэтому для заданного числа $\varepsilon > 0$ и любого момента времени $t \in T$ найдется такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, зависящее только от ε, что оценка $|f(z, t)| < \varepsilon$ выполняется для любой пары $(z, t) \in RZT$, удовлетворяющей условию $\rho_0(z, t) < \delta$. В силу условия (5.6), по найденному числу $\delta(\varepsilon)$ можно указать такой момент времени $t_1 \geqslant t_0$, что в точке $z_1 = z(z_0, t_0, t_1)$ будет выполняться условие $\rho_0(z_1, t_1) < \delta$ и, следовательно, оценка $|f(z_1, t_1)| < \varepsilon$. Так как функционал $f(z, t)$ определенно-положительный и невозрастающий (определения 4.1, 4.2), для всех моментов времени $t \geqslant t_1$ вдоль рассматриваемого R-процесса выполняется условие

$$0 \leqslant f(z(z_0, t_0, t), t) \leqslant f(z_1, t_1) < \varepsilon$$

что и требовалось доказать.

Дополнение об асимптотическом поведении возмущенных процессов. Пусть для некоторого числа $R > 0$ на RZT существует определенно-положительный по метрике ρ функционал $f(z, t)$ и пусть существуют неукороченные R-процессы $z(z_0, t_0, t)$, вдоль которых функционал $f(z, t)$ исчезает, т. е. удовлетворяет условию (5.7). Тогда любой такой R-процесс асимптотически приближается по метрике ρ к невозмущенному процессу $z^0(t)$, т. е. удовлетворяет условию

$$\rho(z(z_0, t_0, t), t) \to 0 \text{ при } t \to \infty \tag{5.8}$$

Доказательство. Пусть $z(z_0, t_0, t)$ — какой-нибудь неукороченный R-процесс, удовлетворяющий условию (5.7), и пусть задано любое положительное число $\varepsilon < R$. Нужно показать, что найдется такой момент времени $t_1 \geqslant t_0$, что при всех $t \geqslant t_1$ вдоль рассматриваемого R-процесса выполняется условие $\rho(z(z_0, t_0, t), t) < \varepsilon$.

Если рассматриваемый R-процесс не имеет пар (z, t), удовлетворяющих условию $\rho(z, t) \geqslant \varepsilon$, доказательство тривиально и $t_1 = t_0$.

Пусть рассматриваемый R-процесс имеет пары (z, t), удовлетворяющие условию $\rho(z, t) \geqslant \varepsilon$. Функционал $f(z, t)$ определенно-положителен по метрике ρ (определение 4.1), поэтому для заданного числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\mu(\varepsilon) > 0$, зависящее только от ε, что оценка $f(z, t) \geqslant \mu$ выполняется для любой пары $(z, t) \in RZT$, удовлетворяющей условию $\rho(z, t) \geqslant \varepsilon$. Вдоль рассматриваемого R-процесса $z(z_0, t_0, t)$ функционал $f(z, t)$ исчезает, поэтому для числа $\mu > 0$ найдется такой момент времени $t_1 \geqslant t_0$, что оценка $f(z(z_0, t_0, t), t) < \mu$ будет выполняться для всех $t \geqslant t_1$; но тогда для всех $t \geqslant t_1$ будет выполняться также условие $\rho(z(z_0, t_0, t), t) < \varepsilon$, так как в противном случае для некоторых $t \geqslant t_1$ выполнялось бы условие

$$\varepsilon \leqslant \rho(z(z_0, t_0, t), t) < R$$

и, следовательно, оценка $f(z(z_0, t_0, t), t) \geqslant \mu$. Условие (5.8) доказано.

Дополнение о связи между свойствами функционалов и единственностью. Скажем, что невозмущенный процесс $z^0(t)$ обладает на множестве T_0 свойством ρ-единственности вправо, если для всякого процесса $z(z^0(t_0), t_0, t)$, начинающегося в момент времени $t_0 \in T_0$ в точке $z^0(t_0)$ невозмущенного процесса, во всей области его определения выполняется условие $\rho(z(z^0(t_0), t_0, t), t) \equiv 0$ (очевидно, что в силу свойств процессов 1.1—1.3, невозмущенный процесс $z^0(t)$, обладающий свойством ρ-единственности вправо на множестве T_0, будет обладать этим свойством также на всяком подмножестве интервала T, расположенном правее нижней грани множества T_0).

Следствие из теорем устойчивости. Если существует функционал $f(z, t)$, обладающий свойствами, оговоренными в условиях теорем 5.1 или 5.2, то невозмущенный процесс $z^0(t)$ обладает на множестве T_0 свойством ρ-единственности вправо. Действительно, допустим, что это не так и существует процесс $z(z^0(t_0), t_0, t)$, $t_0 \in T_0$, для которого в некоторый момент времени $t_1 > t_0$ выполняется условие

$$\rho(z(z^0(t_0), t_0, t_1), t_1) = \varepsilon_1 > 0 \tag{5.9}$$

Для любого числа $\delta > 0$ рассматриваемый возмущенный процесс удовлетворяет условию (3.1), так как в силу свойства 2.1

$$\rho_0(z(z^0(t_0), t_0, t_0), t_0) = \rho_0(z^0(t_0), t_0) = 0 \quad (< \delta)$$

Однако, по предположению (5.9), при $\varepsilon = \varepsilon_1$ условие (3.2) нарушается в момент времени $t_1 > t_0$. Следовательно, при сделанном предположении невозмущенный процесс $z^0(t)$ не может быть устойчивым по метрикам ρ_0, ρ на интервале времени T при выборе начальных моментов времени t_0 из множества T_0, что противоречит заключению теорем устойчивости (достаточность).

Очевидно, теорема работы [6] является следствием теоремы 5.1 (достаточность), так как при сделанных в работе [6] предположениях интеграл (1.5) работы [6] удовлетворяет условиям теоремы 5.1, если ввести метрики $\rho_0 = \Sigma x_i^2$, $\rho = \Sigma y_i^2$ (определенная положительность φ по метрике ρ вытекает из неравенства (1.6) работы [6] и предположения об определенной положительности функции Φ; невозрастание φ вытекает из того, что φ — интеграл; непрерывность φ по метрике ρ_0 вытекает из предположения о непрерывности функции φ по совокупности своих переменных).

6. Пусть выполнены следующие условия.

6.1. Для некоторого числа $R_1 > 0$ на R_1ZT выполнено условие единственности вправо, состоящее в том, что для любой пары $(z_0, t_0) \in R_1ZT$ всякие два R_1-процесса $z_1(z_0, t_0, t)$ и $z_2(z_0, t_0, t)$, начинающиеся в одной точке z_0 в один и тот же момент времени t_0, совпадают при всех $t \geqslant t_0$ в общей части области их определения (это предположение используется только при доказательстве необходимости).

6.2. Для любой пары $(z, t) \in R_1ZT$ существует неукореченный возмущенный процесс, начинающийся в точке z в момент времени t (это предположение используется только при доказательстве достаточности).

Тогда справедливы следующие теоремы о неустойчивости, обобщающие на случай двух метрик теорему о неустойчивости Четаева [2].

Теорема 6.1. Для того чтобы невозмущенный процесс $z^0(t)$ не был устойчивым по метрикам ρ_0, ρ на интервале времени T при выборе начальных моментов времени t_0 из данного множества $T_0 \subseteq T$, необходимо и достаточно, чтобы для некоторого числа $R > 0$ на RZT существовал функционал $f(z, t)$, ограниченный и обладающий определенно-положительной производной в области $R(f > 0)$, и чтобы по крайней мере для одного момента времени $t_0 \in T_0$ и любого числа $\delta > 0$ нашлась пара (z_0, t_0) области $R(f > 0)$, удовлетворяющая условию $\rho_0(z_0, t_0) < \delta$ (точка $z_0 = z_0(\delta)$ зависит, вообще говоря, от взятого δ, момент времени t_0 — один и тот же для всех δ).

Необходимость. Возьмем какое-нибудь положительное число $R \leqslant R_1$. Пусть (z_0, t_0) — определенная пара множества RZT. Среди всевозможных R-процессов $z(z_0, t_0, t)$, начинающихся в точке z_0 в момент времени t_0, выберем тот, для которого область определения (t_0, t_{00}) наибольшая, и назовем его максимальным. В силу предположенной единственности вправо (условие 6.1) определенной паре $(z_0, t_0) \in RZT$ отвечает определенный (один) максимальный R-процесс $z(z_0, t_0, t)$. Скажем, что максимальный R-процесс $z(z_0, t_0, t)$ можно продолжить до границы $\rho(z, t) = R$, если область его определения имеет вид $t_0 \leqslant t < t_{00}$, $t_{00} < \infty$ и существует возмущенный процесс $z(z_0, t_0, t)$, для которого

$$\rho(z(z_0, t_0, t_{00}), t_{00}) = R$$

Вдоль любого максимального R-процесса $z(z_0, t_0, t)$ во всей области его определения (t_0, t_{00}) положим

$$\begin{aligned} &f(z(z_0, t_0, t), t) = e^{t-t_{00}}, \text{ если } z(z_0, t_0, t) \text{ можно продолжить} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{до границы } \rho(z, t) = R \\ &f(z(z_0, t_0, t), t) \equiv 0, \quad \text{если } z(z_0, t_0, t) \text{ нельзя продолжить} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{до границы } \rho(z, t) = R \end{aligned} \tag{6.1}$$

(функционал типа (6.1) применялся в работе [14]). Этим каждой паре $(z, t) \in RZT$ поставлено в соответствие определенное вещественное число $f(z, t)$ (одно, вследствие единственности вправо, и конечное, что видно из формул (6.1)).

Из формул (6.1) видно, что условие $0 \leqslant f(z, t) < 1$ выполняется для любой пары $(z, t) \in RZT$; следовательно, функционал (6.1) ограничен в области $R(f > 0)$ (определение 4.4).

Вдоль любого R-процесса $z(z_0, t_0, t)$, для которого $f(z_0, t_0) > 0$, функционал (6.1) принимает значения, даваемые верхней формулой (6.1), причем производная

$$\frac{d}{dt} f(z(z_0, t_0, t), t) = \exp(t - t_{00})$$

существует и ограничена снизу числом $\exp(t_0 - t_{00}) > 0$; следовательно, функционал (6.1) обладает в области $R(f > 0)$ определенно-положительной производной (определение 4.5).

Итак, независимо от устойчивости или неустойчивости невозмущенного процесса $z^0(t)$ функционал (6.1) удовлетворяет требованиям определений 4.4, 4,5 (заметим, что отсюда еще не следует, что для функционала (6.1) область $R(f > 0)$ непустая).

Пусть невозмущенный процесс $z^0(t)$ не является устойчивым (определение 3.3). Тогда для некоторого числа $\varepsilon_1 > 0$ найдется по крайней мере один такой начальный момент времени $t_0 \in T_0$, что для любого числа $\delta > 0$ можно найти возмущенный процесс $z(z_0, t_0, t)$, $z_0 = z_0(\delta)$, для которого в упомянутый начальный момент времени t_0 выполняется условие (3.1), а в некоторый момент времени $t_1 \geqslant t_0$ из области определения процесса выполняется условие (3.3).

Пусть задано любое число $\delta > 0$. Очевидно, при доказательстве теоремы можно считать число δ настолько малым, чтобы, в силу непрерывности расстояния $\rho(z, t)$ по метрике $\rho_0(z, t)$ (свойство 2.3), из неравенства (3.1) следовало неравенство

$$\rho(z_0, t_0) < R \tag{6.2}$$

где R — меньшее из двух положительных чисел ε_1 и R_1. Для заданного δ возьмем возмущенный процесс $z(z_0, t_0, t)$, удовлетворяющий условиям (3.1), (3.3); тогда, в силу достаточной малости числа δ, будет выполняться также условие (6.2), а в силу выбора числа $R \leqslant \varepsilon_1$ будет выполняться условие

$$\rho(z(z_0, t_0, t_1), t_1) \geqslant R \tag{6.3}$$

Сравнивая (6.2) и (6.3), видим, что $t_1 > t_0$ и рассматриваемый процесс $z(z_0, t_0, t)$ — невырожденный. В силу непрерывности функции $\rho(z(z_0, t_0, t), t)$ (свойство 2.4), из (6.2), (6.3) заключаем о существовании такого (конечного) момента времени $t_{00} > t_0$, что для рассматриваемого возмущенного процесса выполняются условия

$$\rho(z(z_0, t_0, t), t) < R \quad \text{при} \quad t_0 \leqslant t < t_{00}, \qquad \rho(z(z_0, t_0, t_{00}), t_{00}) = R$$

Следовательно, для пары (z_0, t_0) этот возмущенный процесс $z(z_0, t_0, t)$ в промежутке $t_0 \leqslant t < t_{00}$ является максимальным R-процессом, который можно продолжить до границы $\rho(z, t) = R$. Построенный на RZT функционал (6.1) вдоль этого R-процесса принимает положительные значения. В частности, $f(z_0, t_0) = \exp(t_0 - t_{00}) > 0$; пара (z_0, t_0) принадлежит области $R(f > 0)$ и для заданного числа $\delta > 0$ удовлетворяет условию $\rho_0(z_0, t_0) < \delta$, что и требовалось доказать.

Достаточность. Пусть для некоторого числа $R > 0$ на RZT существует функционал $f(z, t)$, ограниченный и обладающий определенно-положительной производной в области $R(f > 0)$, и пусть для некоторого момента времени $t_0 \in T_0$ и любого числа $\delta > 0$ можно найти пару (z_0, t_0) области $R(f > 0)$, удовлетворяющую условию $\rho_0(z_0, t_0) < \delta$ (точка $z_0 = z_0(\delta)$ зависит, вообще говоря, от взятого δ, момент времени t_0 — один и тот же для всех δ). Допустим, что невозмущенный процесс $z^0(t)$ устойчив по метрикам ρ_0, ρ на интервале времени T при выборе начальных моментов времени t_0 из данного множества $T_0 \subseteq T$ (определение 3.1). Тогда для числа $R > 0$ и упомянутого выше момента времени $t_0 \in T_0$ можно найти такое число $\delta(R, t_0) > 0$, что всякий возмущенный процесс $z(z_0, t_0, t)$, удовлетворяющий в начальный момент времени t_0 условию (3.1), во всей своей области определения будет удовлетворять условию $\rho(z(z_0, t_0, t), t) < R$, т. е. будет R-процессом.

По условию теоремы для найденного числа δ можно найти пару (z_0, t_0) области $R(f > 0)$, удовлетворяющую условию $\rho_0(z_0, t_0) < \delta$, и, согласно условию 6.2, соответствующий этой паре неукороченный процесс $z(z_0, t_0, t)$, который, как уже установлено, будет R-процессом; так как функционал $f(z, t)$ имеет в области $R(f > 0)$ определенно-положительную производную (определение 4.5), то для некоторого числа $\nu > 0$ вдоль рассматриваемого неукороченного R-процесса $z(z_0, t_0, t)$ при любых t из промежутка $t_0 \leqslant t < \infty$ выполняются оценки

$$\frac{d}{dt} f(z(z_0, t_0, t), t) \geqslant \nu$$

$$f(z(z_0, t_0, t), t) = f(z_0, t_0) + \int_{t_0}^{t} dt \frac{d}{dt} f(z(z_0, t_0, t), t) \geqslant f(z_0, t_0) + \nu(t - t_0)$$

Правая часть последнего неравенства, ввиду того что $f(z_0, t_0) > 0$ и $\nu > 0$, положительна при любых t из промежутка $t_0 \leqslant t < \infty$ и при достаточно больших t превосходит любое наперед заданное число, что противоречит условию ограниченности функционала $f(z, t)$ в области $R(f > 0)$ (определение 4.4). Теорема 6.1 доказана.

Теорема 6.2. Для того чтобы невозмущенный процесс $z^0(t)$ не был устойчивым по метрикам ρ_0, ρ на интервале времени T равномерно на данном множестве $T_0 \subseteq T$ начальных моментов времени t_0, необходимо и достаточно, чтобы для некоторого числа $R > 0$ на RZT существовал функционал $f(z, t)$, ограниченный и обладающий определенно-положительной производной в области $R(f > 0)$, и чтобы для любого числа $\delta > 0$ нашлась пара (z_0, t_0) области $R(f > 0)$, удовлетворяющая условию $\rho_0(z_0, t_0) < \delta$, $t_0 \in T_0$ (точка $z_0 = z_0(\delta)$ и момент времени $t_0 = t_0(\delta)$ зависят, вообще говоря, от взятого δ).

Необходимость. В ходе доказательства теоремы 6.1 установлено, что при выполнении условия 6.1 независимо от устойчивости или неустойчивости невозмущенного процесса $z^0(t)$ функционал (6.1) ограничен и обладает определенно-положительной производной в области $R(f>0)$ (определения 4.4, 4.5).

Пусть невозмущенный процесс $z^0(t)$ не является устойчивым равномерно на множестве T_0 (определение 3.4). Тогда для некоторого числа $\varepsilon_1>0$ и любого числа $\delta>0$ можно найти возмущенный процесс $z(z_0, t_0, t)$ $(t_0=t_0(\delta)\in T_0,\ z_0=z_0(\delta))$, удовлетворяющий условиям (3.1), (3.3). Используя это и повторяя дословно конец (перед формулой (6.2)) доказательства необходимости в теореме 6.1, получаем, что функционал (6.1), построенный на RZT, где R — меньшее из двух положительных чисел ε_1 и R_1, обладает и третьим свойством условия теоремы 6.2.

Достаточность. Пусть для некоторого числа $R>0$ на RZT существует функционал $f(z, t)$, ограниченный и обладающий определенно-положительной производной в области $R(f>0)$, и пусть для любого числа $\delta>0$ можно найти пару (z_0, t_0) области $R(f>0)$, удовлетворяющую условию $\rho_0(z_0, t_0)<\delta$, $t_0\in T_0$ (точка $z_0=z_0(\delta)$ и момент времени $t_0=t_0(\delta)$ зависят, вообще говоря, от взятого δ). Допустим, что невозмущенный процесс $z^0(t)$ устойчив по метрикам ρ_0, ρ на интервале времени T равномерно на данном множестве $T_0\subseteq T$ начальных моментов времени t_0 (определение 3.2). Тогда для числа $R>0$ и любого начального момента времени $t_0\in T_0$ можно найти такое число $\delta(R)>0$, одно и то же для всех моментов времени $t_0\in T_0$, что всякий возмущенный процесс $z(z_0, t_0, t)$, удовлетворяющий в начальный момент времени $t_0\in T_0$ условию (3.1), во всей своей области определения будет удовлетворять условию $\rho(z(z_0, t_0, t), t)<R$, т. е. будет R-процессом. Отсюда, повторяя дословно конец (со второго абзаца достаточности) доказательства теоремы 6.1, заключаем о существовании неукороченного R-процесса, вдоль которого нарушается условие ограниченности функционала $f(z, t)$ в области $R(f>0)$. Теорема 6.2 доказана.

Поступила 14 VII 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Л я п у н о в А. М. Общая задача об устойчивости движения. Собр. соч., т. II. Изд-во АН СССР, 1956.
2. Ч е т а е в Н. Г. Устойчивость движения. Гостехтеоретиздат, 1955.
3. Л я п у н о в А. М. Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения. Собр. соч., т. II. Изд-во АН СССР, 1956.
4. М а л к и н И. Г. Об устойчивости движения в смысле Ляпунова. Матем. сб., 1938, т. 3(45), № 1.
5. Р у м я н ц е в В. В. Об устойчивости движения по отношению к части переменных. Вестн. МГУ, Механика, 1957, № 4.
6. Р у м я н ц е в В. В. Одна теорема об устойчивости движения. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 1.
7. М о в ч а н А. А. О прямом методе Ляпунова в задачах устойчивости упругих систем. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 3.
8. М о в ч а н А. А. Об устойчивости движения сплошных тел. Теорема Лагранжа и ее обращение. Инженерный сб., 1960, т. 29, Изд-во АН СССР.
9. К р а с о в с к и й Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. Физматгиз, 1959.
10. С о б о л е в С. Л. Уравнения математической физики. Гостехтеоретиздат, 1947.
11. П е т р о в с к и й И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными. Гостехтеоретиздат, 1950.
12. К о л м о г о р о в А. Н., Ф о м и н С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. Изд-во МГУ, 1951.
13. Y o s h i z a w a T. On the stability of solutions of a system of the differential equations. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto. A, 1955, XXIX, math., № 1.
14. З у б о в В. И. Методы Ляпунова и их применение. Изд-во ЛГУ, 1957.