Прикладная математика и механика. Том XXIV, 1960
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

К МЕТОДУ ХИЛЛА В ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

К. Г. Валеев

(Ленинград)

Рассматривается некоторый класс систем линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, которые при помощи преобразования Лапласа сводятся к системе линейных разностных уравнений. Последние уравнения решаются методом бесконечных определителей — методом Хилла [1-7]. Изучается сходимость некоторых типов бесконечных определителей, которые не являются нормальными [3]. В частном случае одного дифференциального уравнения с синусоидальными коэффициентами строится изображение решения с помощью непрерывных дробей [8]. Изучается динамическая устойчивость решений некоторых дифференциальных уравнений, встречающихся в инженерной практике [6].

Прописные буквы обозначают матрицы и векторы, строчные — скаляры. Матрицу, зависящую от некоторых аргументов, будем называть голоморфной (ограниченной и т. д.) в некоторой области, если все элементы матриц голоморфны (ограниченны и т. д.) в той же области. Применяем преобразование Лапласа [9] к матрице $Y(t)$ $(t \geqslant 0)$, понимая под этим применение преобразования Лапласа к элементам матрицы $Y(t)$ $(t \geqslant 0)$. Соответствие между оригиналом $Y(t)$ $(t \geqslant 0)$ и изображением $F(p)$, продолженным аналитически на всю область существования, обозначаем

$$Y(t) \leftarrow F(p) \tag{0.1}$$

1. Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами частного вида

$$\sum_{q=-l}^{l} e^{-\omega q t} L_q(d)\, Y(t) = \Phi(t) \tag{1.1}$$

Здесь $Y(t)$ представляет собой m-мерный вектор, $\omega \neq 0$ — чисто мнимое число, l — конечное число, $L_q(d)$ — линейные дифференциальные операторы

$$L_q(d) = \sum_{j=0}^{n} A_{qj} d^j \qquad \left(d = \frac{d}{dt}\right) \tag{1.2}$$

где A_{qj} — постоянные комплексные $m \times m$ матрицы. При этом (1.3)

$$A_{qj} = \| a_{sr}^{qj} \|_1^m \quad (q = 0, \pm 1, \ldots, \pm l,\ j = 0, 1, \ldots, n), \qquad A_{0n} \equiv E \ldots\ A_{qn} \equiv 0 \quad (q \neq 0)$$

а E — единичная матрица. Ищем решение $Y(t)$ системы (1.1) при начальных условиях

$$Y(0) = Y_0^{(0)}, \ldots, Y^{(n-1)}(0) = Y_0^{(n-1)} \tag{1.4}$$

При этом предполагаем, что для $\Phi(t)$ $(t \geqslant 0)$ существует изображение по Лапласу $Q(p)$, которое регулярно и ограниченно при $\operatorname{Re} p \geqslant b$.

Применяя к системе уравнений (1.1) преобразование Лапласа [9] при $t \geqslant 0$ и предполагая $F(p) \rightarrow Y(t)$ $(t \geqslant 0)$, получим для $F(p)$ систему линейных разностных уравнений

$$\sum_{q=-l}^{l} L_q(p+\omega q) F(p+\omega q) = R(p) \tag{1.5}$$

Здесь

$$R(p) \equiv Q(p) + \sum_{q=-l}^{l} \Psi_q(p+\omega q), \qquad \Psi_q(p) \equiv \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} A_{qk} Y_0^{(j)} p^{k-j-1} \tag{1.6}$$

Ищем решение $F(p)$ системы разностных уравнений (1.5), регулярное и ограниченное при $\operatorname{Re} p \geqslant b_1$ ($b_1 = \text{const}$). Таким решением является, например, само изображение для $Y(t)$. Подставив в (1.5) $p+\omega k$ вместо p и разделив на $(k\omega)^n$ ($k \neq 0$), получим вместе с (1.5) бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно компонентов $F(p+\omega k)$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$; имеем (1.7)

$$\sum_{q=-l}^{l} (k\omega)^{-n} L_q(p+\omega(k+q)) F(p+\omega(k+q)) = (k\omega)^{-n} R(p+\omega k) \qquad (k \neq 0)$$

Здесь p можно рассматривать как параметр в коэффициентах. Далее, чтобы не оговаривать отдельно случай $k=0$, включим уравнение (1.5) в (1.7) и условимся считать $(k\omega)^{-n} \equiv 1$ при $k=0$.

Матрица определителя системы (1.7) представляет собой квазиматрицу с квазиэлементами-матрицами $((k-q)\omega)^{-n} L_q(p+\omega k)$. Сам определитель обозначим его $\Delta(p)$, имеет вид

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \omega^{-n} L_0(p+\omega) & \omega^{-n} L_{-1}(p) & \omega^{-n} L_{-2}(p-\omega) & \cdot \\ \cdot & L_1(p+\omega) & L_0(p) & L_{-1}(p-\omega) & \cdot \\ \cdot & (-\omega)^{-n} L_2(p+\omega) & (-\omega)^{-n} L_1(p) & (-\omega)^{-n} L_0(p-\omega) & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \tag{1.8}$$

2. Рассмотрим последовательность определителей $\Delta_\gamma(p)$ $(\gamma = 1, 2 \ldots)$, содержащих $(2\gamma - 1)\,m$ строк и столбцов, матрицы которых вырезаны из матрицы определителя $\Delta(p)$ так, что квазиэлемент $L_0(p)$ находится в центре определителей $\Delta_\gamma(p)$.

Пусть Σ — конечная область плоскости комплексного переменного p. Рассмотрим сходимость в Σ определителя $\Delta(p)$ и алгебраических дополнений к элементам столбцов, проходящих через $L_0(p)$, понимая под этим сходимость определителей $\Delta_\gamma(p)$ $(\gamma \to \infty)$ и сходимость алгебраических дополнений к соответствующим элементам в $\Delta_\gamma(p)$ (γ считаем достаточно большим). Обозначим элементы определителя $\Delta(p)$ через $c_{sr}^{qk}(p)$, где индексы обозначают, что элемент $c_{sr}^{qk}(p)$ находится на пересечении s-й строки r-го столбца квазиэлемента $\omega^{-n} L_q(p+\omega k)$. Из (1.2), (1.3) следует, что элементы на главной диагонали можно записать в виде

$$c_{rr}^{0k}(p) = 1 + \frac{C_n^1 p + a_{rr}^{0,\,n-1}}{k\omega} + \ldots + \frac{p^n + a_{rr}^{0,\,n-1} p^{n-1} + \ldots + a_{rr}^{00}}{(k\omega)^n} \tag{2.1}$$

$$(r = 1, \ldots, m, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

$$c_{sr}^{qk}(p - q\omega) = \frac{a_{sr}^{q,\,n-1}}{(k-q)\omega} + \frac{C_{n-1}^{1} a_{sr}^{q,\,n-1} p + a_{sr}^{q,\,n-2}}{((k-q)\omega)^2} + \ldots + \frac{a_{sr}^{q,\,n-1} p^{n-1} + \ldots + a_{sr}^{q0}}{((k-q)\omega)^n} \tag{2.2}$$

$$(s, r = 1, 2, \ldots, m, \ q = 0, \pm 1, \ldots, \pm l, \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \ s \neq r \text{ при } q = 0)$$

a. Если $a_{sr}^{qk}=0$ ($s\neq r$ при $q=0$), то определитель $\Delta(p)$ можно отнести к классу нормальных [3]. Достаточно умножить [2] каждый столбец с элементами (2.1) на

$$\exp\{-(C_n^1 p + a_{rr}^{0,\,n-1})/k\omega\} \qquad (k=\pm1,\pm2,\ldots,\ r=1,2,\ldots,m)$$

При этом значение конечных определителей $\Delta_\gamma(p)$ не меняется, а сумма всех элементов бесконечного определителя, не учитывая единиц на главной диагонали, сходится абсолютно и равномерно при $p\in\Sigma$. Поэтому $\Delta_\gamma(p)$ и алгебраические дополнения к элементам столбцов, проходящих через $L_0(p)$, сходятся равномерно при $p\in\Sigma$ к голоморфным в Σ функциям p, которые все в совокупности можно ограничить одной постоянной.

b. Если $a_{sr}^{qk}\neq0$ ($r\neq s$ при $q=0$), то отсутствует абсолютная сходимость суммы элементов вне главной диагонали. Установим порядок в расположении диагональных элементов $c_{rr}^{0k}(p)$ ($k\neq0$): элемент $c_{\beta\beta}^{0\alpha}(p)$ предшествует $c_{\delta\delta}^{0\gamma}(p)$, если $|\alpha|<|\gamma|$; если $|\alpha|=|\gamma|$, то $\alpha>\gamma$; если $\alpha=\gamma$, то $\beta>\delta$.

Возьмем соответствующий по порядку диагональный элемент $c_{rr}^{0k}(p)$ и рассмотрим элементы $c_{sr}^{qk}(p)$ столбца, проходящего через этот диагональный элемент $c_{sr}^{0k}(p)$, и лежащие ниже него при $k>0$ (выше при $k<0$), но принадлежащие квазиэлементам

$$((k-q)\,\omega)^{-n}L_q(p+\omega k), \qquad k\geqslant1, \qquad k-q\geqslant1 \quad (k\leqslant1,\ k-q\leqslant-1)$$

Умножим строку с элементом $c_{rr}^{0k}(p)$ на $a_{sr}^{q,\,n-1}$ и вычтем из соответствующей строки, содержащей элемент $c_{sr}^{qk}(p)$ и т. д. Аналогично поступим с элементами в строке, лежащими справа при $k>0$ (слева при $k<0$), но только при $k\geqslant1$, $k-q\geqslant1$ ($k\leqslant-1$, $k-q\leqslant-1$).

Полученный определитель $\Delta^*(p)$ можно отнести к типу, рассмотренному в *a*. При этом приходится проделать счетное число операций, но можно убедиться, что определитель $\Delta_\gamma(p)$ можно линейно выразить через конечное число миноров определителя $\Delta_\gamma^*(p)$ и $\Delta_\gamma(p)\rightrightarrows\Delta^*(p)$ при $\gamma\to\infty$, $p\in\Sigma$. Алгебраические дополнения к элементам столбцов, проходящих через $L_0(p)$ в определителе $\Delta(p)$, будут линейно с ограниченными коэффициентами выражаться через конечное число дополнений к элементам соответствующего столбца в определителе $\Delta^*(p)$.

Итак, в силу произвольности области Σ доказана следующая теорема.

Теорема 2.1. Определитель $\Delta(p)$ (1.8) и алгебраические дополнения элементов столбцов, проходящих через $L_0(p)$, сходятся к целым функциям p, которые в совокупности ограничены в конечной области Σ комплексного переменного p. При $p\in\Sigma$ эта сходимость абсолютная и равномерная.

Замечание 2.1. Определитель $\Delta(p)$ и алгебраические дополнения элементов столбцов, проходящих через $L_0(p)$, будут целыми функциями коэффициентов $a_{sr}{}^{qj}$ (1.3).

Замечание 2.2. Если $\Delta(p_0)=0$, то $\Delta_\gamma(p)$ при достаточно большом γ будет иметь нуль, сколь угодно близкий к p_0.

Далее предполагаем, что область Σ выбрана так, чтобы векторы

$$F(p+k\omega), \qquad (k\omega)^{n-1}R(p+k\omega) \qquad (k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$$

были в совокупности ограничены при $p \in \Sigma$. Такая конечная область найдется при $\operatorname{Re} p \geqslant b_1$. Предполагаем, что $\Delta(p) \geqslant \varepsilon > 0$ при $p \in \Sigma$. Будем решать последовательно системы уравнений, взятые из (1.5), (1.7) с определителем при неизвестных $\Delta_\gamma(p)$ по формулам Крамера. При этом переносим оставшиеся члены с неизвестными в правую часть.

В силу теоремы 2.1 при $\gamma \to \infty$ получим единственное ограниченное при $\operatorname{Re} p \geqslant b_1$ решение для компонентов $F(p)$ в виде отношения бесконечных определителей к $\Delta(p)$. Раскрывая формально эти определители по элементам столбцов с компонентами $R(p+k\omega)$, получим решение системы разностных уравнений (1.5) в виде ряда

$$F(p) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Delta^{-1}(p) B_k(p) R(p+\omega k) \tag{2.3}$$

где элементами матриц $B_k(p)$ являются целые функции p. Из свойств решения системы (1.1) можно установить, что ряд (2.3) сходится при $\operatorname{Re} p \geqslant b_1$ и действительно представляет собой решение системы (1.5).

Приближенное решение системы (1.1) можем получить, отобразив обратно приближенное решение для $F(p)$, компонентами которого можно взять отношения конечных определителей. Связь с преобразованием Лапласа позволяет искать решение неоднородной системы (1.1) с начальными условиями.

3. Пользуясь методами [4], найдем другое представление определителя $\Delta(p)$. Для этого вынесем члены, стоящие на главной диагонали $\Delta(p)$, за знак определителя. Пусть ρ_{sh} $(s=1,\ldots,m,\ h=1,\ldots,n)$ — корни уравнений $a_{ss}^{00}(p)=0$. Тогда

$$\prod_{k=-\infty}^{\infty} \prod_{s=1}^{m} (k\omega)^{-n} a_{ss}^{00}(p+\omega k) = \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{mn} \prod_{s=1}^{m} \prod_{h=1}^{n} \sin\frac{\pi}{\omega}(p-\rho_{sh}) \tag{3.1}$$

Оставшийся определитель обозначим $D(p)$. Так как произведение (3.1) диагональных членов сходится, то будет сходиться и определитель $D(p)$ в точках, отличных от точек ρ_{shk}

$$\rho_{shk} = \rho_{sh} - k\omega \qquad (s=1,\ldots,m,\ h=1,\ldots,n,\ k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots) \tag{3.2}$$

Определитель $D(p)$ будет периодической мероморфной функцией p с периодом ω. Методом п. 2 приведем его к нормальному виду. Тогда

$$D(p) \rightrightarrows 1 \qquad \text{при } |\operatorname{Re} p| \to \infty \tag{3.3}$$

Предполагая для простоты, что все числа ρ_{shk} различны (случай совпадения рассмотрен в [2]), получим, используя [4]

$$D(p) = 1 + \sum_{s=1}^{m} \sum_{h=1}^{n} \delta_{sh} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{\omega}(p-\rho_{sh})\right), \qquad \sum_{s=1}^{m} \sum_{h=1}^{n} \delta_{sh} = 0 \tag{3.4}$$

Здесь δ_{sh} — некоторые постоянные. Выразим $\Delta(p)$ через $D(p)$ с учетом (3.1). При этом в определителе $D(p)$, в (3.1) и (3.4) заменим

$$z = \exp\left(\frac{2\pi i}{\omega} p\right), \quad z_{sh} = \exp\left(\frac{2\pi i}{\omega} p_{sh}\right) \qquad (s=1,\ldots,m,\ h=1,\ldots,p) \tag{3.5}$$

Тогда

$$\Delta\left(\frac{\omega}{2\pi i}\ln z\right) = \left(\frac{\omega}{2\pi i}\right)^{mn} \left(\prod_{s=1}^{m} \prod_{h=1}^{n} (z z_{sh})^{-\frac{1}{2}}\right) \{(z-z_{11})(z-z_{12})\ldots(z-z_{mn}) + \tag{3.6}$$
$$+ i\delta_{11}(z+z_{11})(z-z_{12})\ldots(z-z_{mn}) + \ldots + i\delta_{mn}(z-z_{11})(z-z_{12})\ldots(z+z_{mn})\}$$

Из (3.4) следует, что фигурные скобки содержат многочлен со старшим членом z^{mn} и свободным членом $z_{11}, z_{12} \ldots z_{mn}$. Приравняв этот многочлен нулю, получим характеристическое уравнение для мультипликаторов решений системы (1.1). Множитель перед фигурными скобками в (3.6) не может обращаться в нуль при конечных значениях p. Отсюда следует, что определитель Хилла $\Delta(p)$ (1.8), умноженный на некоторый известный множитель, является явно выраженным через коэффициенты системы (1.1) характеристическим многочленом (с учетом замены (3.5)) для решений системы (1.1). Итак, доказана теорема.

Теорема 3.1. Решение системы линейных разностных уравнений (1.5), ограниченных при $\operatorname{Re} p \geqslant b_1$ ($b_1 = \mathrm{const}$), единственным образом представимо в виде ряда (2.3), где элементы матриц $B_k(p)$ являются целыми функциями p, а $\Delta(p)$ — целая периодическая с периодом ω функция p, нулями которой являются характеристические показатели решений системы уравнений (1.1)

Последнее утверждение теоремы 3.1 известно давно [1,2]. В этих работах, а также в работах [5,7] с успехом использовалось представление вида (3.6) (или его модификации) для определения δ_{sh}. В работе [6] уже непосредственно используется определитель $\Delta(p)$ для решения уравнения $\Delta(p) = 0$. В п. 5 этой статьи развивается метод, родственный методу работы [6].

4. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение с синусоидальными коэффициентами [10]

$$\sum_{k=0}^{n} \left(a_k^{(0)} + a_k^{(1)} e^{-\omega t} + a_k^{(-1)} e^{\omega t}\right) \frac{d^k y}{dt^k} = \varphi(t) \tag{4.1}$$

где $a_k^{(j)}$ — комплексные постоянные числа; $\varphi(t) \risingdotseq g(p)$, где $g(p)$ — регулярная и ограниченная функция p при $\operatorname{Re} p \geqslant b$, $\operatorname{Re} \omega = 0$. Ищем изображение $f(p)$ решения $y(t)$ $(t \geqslant 0)$ с начальными условиями

$$y(0) = y_0^{(0)}, \ldots, y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)} \tag{4.2}$$

Предполагаем, что выполнено условие

$$|a_n^{(0)}|^2 > 4\,|a_n^{(1)} a_n^{(-1)}| \tag{4.3}$$

т. е. коэффициент при старшей производной не обращается в нуль при вещественных значениях t. Введем обозначения

$$f_q(p) = \sum_{k=0}^{n} a_k^{(q)} p^k, \qquad \psi_q(p) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} a_k^{(q)} y_0^{(j)} p^{k-j-1} \qquad (q = 0, \pm 1) \tag{4.4}$$

Разностное уравнение для $f(p)$ принимает вид

$$\sum_{q=-1}^{1} f_q(p + \omega q) f(p + \omega q) = g(p) + \sum_{q=-1}^{1} \psi_q(p + q\omega) \equiv r(p) \tag{4.5}$$

Составляя отношение бесконечных определителей и раскрывая их (смотри п. 2), получим решение уравнения (4.1) в виде ряда

$$f(p) = \frac{1}{\nabla(p)} \left\{ r(p) - \frac{f_1(p+\omega)}{f_0(p+\omega) - s(p+\omega)} \left(r(p+\omega) - \right.\right. \tag{4.6}$$

$$\left. - \frac{f_1(p+2\omega)}{f_0(p+2\omega) - s(p+2\omega)} \left(r(p+2\omega) - \ldots \right) \right) -$$

$$\left. - \frac{f_{-1}(p-\omega)}{f_0(p-\omega) - h(p-\omega)} \left(r(p-\omega) - \frac{f_{-1}(p-2\omega)}{f_0(p-2\omega) - h(p-2\omega)} \left(r(p-2\omega) - \ldots \right) \right) \right\}$$

Здесь $s(p)$ и $h(p)$ представляют собой непрерывные дроби [8]

$$
\begin{aligned}
s(p) &= \cfrac{f_1(p+\omega)f_{-1}(p)}{f_0(p+\omega) - \cfrac{f_1(p+2\omega)f_{-1}(p+\omega)}{f_0(p+2\omega) - \cfrac{f_1(p-3\omega)f_{-1}(p-2\omega)}{f_0(p-3\omega) - \dots}}} \\
h(p) &= \cfrac{f_{-1}(p-\omega)f_1(p)}{f_0(p-\omega) - \cfrac{f_{-1}(p-2\omega)f_1(p-\omega)}{f_0(p-2\omega) - \cfrac{f_{-1}(p-3\omega)f_1(p-2\omega)}{f_0(p-3\omega) - \dots}}}
\end{aligned}
\qquad (4.7)
$$

При выполнении условия (4.3) непрерывные дроби (4.7) сходятся на всей плоскости комплексного переменного p к мероморфным функциям [8,10]. Представление изображения $f(p)$ для решения $y(t)$ в виде)4.6), (4.7) очень удобно для численного решения уравнения (4.1) в случае, когда $\varphi(t)$ представляет сумму членов вида $c_j t^{\nu_j} e^{\omega_j t}$. Отметим, что все корни уравнения $\nabla(p) = 0$ являются характеристическими показателями решений уравнения (4.1). Обратное не всегда верно.

Уравнение для характеристических показателей решений в виде

$$\nabla(p) \equiv f_0(p) - s(p) - h(p) = 0 \qquad (4.8)$$

получил Айнс [11] для уравнения Матье и для уравнения (4.1) Патри [10], как результат исключения коэффициентов разложения решения уравнения (4.1) $y(t)$ в ряд Фурье.

Пример 1. [12]. Рассмотрим уравнение Матье с учетом трения

$$\frac{d^2y}{dt^2} + c\,\frac{dy}{dt} + (a + 2b\cos 2t)\,y = 0 \quad (c \geqslant 0) \qquad (4.9)$$

Характеристические показатели решений уравнений (4.9) можем получить из уравнения

$$\nabla(p) \equiv f_0(p) - \cfrac{b^2}{f_0(p+2i) - \cfrac{b^2}{f_0(p+4i) - \dots}} - \cfrac{b^2}{f_0(p-2i) - \cfrac{b^2}{f_0(p-4i) - \dots}} = 0 \qquad (4.10)$$

где $f_0(p) = p^2 + cp + a$. Используя (4.10), напишем уравнение границы γ-й области неустойчивости решений уравнения (4.9). Так как на границе области неустойчивости один из характеристических показателей равен γi (γ — целое число), то искомым уравнением будет $\nabla(\gamma i) - 0$. Например, при $\gamma = 1$ получим

$$\left| a - 1 + ci - \cfrac{b^2}{a - 9 + 3ci - \cfrac{b^2}{a - 25 + 5ci - \dots}} \right|^2 = b^2 \qquad (4.11)$$

Уравнение (4.10) пригодно при конечных a, b, c. Одновременно оно является уравнением всех нечетных областей неустойчивости.

5. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d^2Y}{dt^2} + \mu N(\theta t)\frac{dY}{dt} + (C + \mu P(\theta t))\,Y = 0 \qquad (5.1)$$

Здесь $C = (\omega_1^2, \dots, \omega_m^2)$ — диагональная матрица, $\theta > 0$, $\omega_j^2 > 0$ $(j = 1, \dots, m)$, μ — малый параметр;

$$
\begin{aligned}
N(\tau) &= \sum_{k=-l}^{l} N^{(k)} e^{ik\tau}, \qquad N^{(k)} = \| \nu_{js}^{(k)} \|_1^m \\
P(\tau) &= \sum_{k=-l}^{l} P^{(k)} e^{ik\tau}, \qquad P^{(k)} = \| \pi_{js}^{(k)} \|_1^m
\end{aligned}
\qquad (k = 0, \pm 1, \dots, \pm l) \quad (5.2)
$$

где $\nu_{js}^{(k)}$, $\pi_{js}^{(k)}$ — комплексные постоянные числа, l — конечное число.

Предполагая $\theta = \theta_0 + \mu\lambda$ ($\lambda = \mathrm{const}$) $\theta_0 > 0$ и пользуясь теоремой 2.1, можно легко найти характеристические показатели решений системы уравнений (5.1) с точностью до μ. Предполагаем общий случай резонанса. Рассмотрим совокупность $2m$ чисел

$$\omega_1, \ldots, \omega_m, -\omega_1, \ldots, -\omega_m \tag{5.3}$$

Разобьем их на группы, относя в одну группу все те из чисел (5.3), которые различаются между собой на величину $k\theta_0$, где k — целое число. Пусть это будут группы

$$(\rho_{11}, \ldots, \rho_{1\beta_1}), \ldots, (\rho_{\alpha 1}, \ldots, \rho_{\alpha\beta_\alpha}) \qquad (\beta_2 + \ldots + \beta_\alpha = 2m) \tag{5.4}$$

где ρ_{jh} обозначает одно из чисел (5.3), если это будет число ω_s или ω_{-s}, то символом $[jh]$ будем обозначать число s, при этом j обозначает номер группы, h — номер числа в группе.

Предполагаем, что ρ_{jh} $(h = 1, \ldots, \beta_j)$ расположены в порядке невозрастания. Обозначим

$$k_{jh} = (\rho_{j1} - \rho_{jh})\,\theta_0^{-1} \qquad (j = 1, \ldots, \alpha,\ h = 1, \ldots, \beta_i) \tag{5.5}$$

Числа k_{jh} будут целыми неотрицательными числами $0 = k_{j1} \leqslant \ldots \leqslant k_{j\beta j}$.

В определителе $\Delta(p)$ (1.8) положим $p = i\rho_{j1} + i\mu z$ $(j = 1, \ldots, \alpha)$. Так как для уравнения (5.1) имеем (смотри п. 1)

$$L_0(p) = Ep^2 + \mu N^{(0)}p + C + \mu P^{(0)}, \qquad L_q(p) = \mu N^{(-q)}p + \mu P^{(-q)}\ (q \neq 0) \tag{5.6}$$

то на главной диагонали определителя $\Delta(p)$ будут иметься члены порядка μ; вне главной диагонали все члены будут порядка μ.

Используем замечание 2.2 теоремы 2.1. Для этого возьмем достаточно большой определитель $\Delta_\gamma(p)$ (смотри п. 2). Его можно рассматривать как приближенное выражение $\Delta(p)$. Рассматривая уравнение $\Delta_\gamma(i\rho_{j1} + i\mu z) = 0$ как уравнение для алгебраической функции $z(\mu)$, получим из диаграммы Ньютона [9], что характеристические показатели решений системы (5.1) $p_{j\xi}(\mu)$ $(j = 1, \ldots, \alpha,\ \xi = 1, \ldots, \beta_j)$ разлагаются в ряды вида

$$p_{j\xi}(\mu) = i\rho_{j1} + i\mu\,(z_{j\xi} + \mu^{\sigma_{j\xi}}(\ldots)\ldots) \tag{5.7}$$

Здесь $\sigma_{j\xi} > 0$ (в общем случае это дробные числа), а числа $z_{j\xi}$ $(j = 1, \ldots, \alpha,\ \xi = 1, \ldots, \beta_j)$ являются корнями уравнений

$$\mathrm{Det}\, \| b_{sr}^{(j)} + \delta_{sr}k_{js}\lambda - \delta_{sr}z \|_1^{\beta j} = 0 \qquad (j = 1, \ldots, \alpha) \tag{5.8}$$

где

$$b_{sr}^{(j)} = \frac{i\sqrt{\rho_{jr}}}{2\sqrt{\rho_{js}}}\,\nu_{[js][jr]}^{(j,r,s)} + \frac{1}{2\sqrt{\rho_{js}}\sqrt{\rho_{jr}}}\,\pi_{[js][jr]}^{(j,r,s)} \tag{5.9}$$

$((j, r, s) \equiv k_{jr} - k_{js},\ \delta_{sr}$ — символ Кронекера)

Для доказательства отметим столбцы и строки, проходящие через элементы главной диагонали определителя $\Delta_\gamma(i\rho_{j1} + i\mu z)$, которые обращаются в нуль при $\mu = 0$. Рассмотрим определитель, составленный из элементов, находящихся на пересечении вышеупомянутых столбцов и строк. Этот определитель лишь несущественным множителем отличается от определителя (5.8). Остальные элементы в первом приближении можно не учитывать.

Зная числа $z_{j\xi}$, можно судить об устойчивости решений системы (5.1) по первому приближению. Изменяя λ, можем найти на плоскости $\theta\mu$ широкие области параметрического резонанса, примыкающие к частоте θ_0. Отметим, что конечность l, γ не влияет на окончательные формулы (5.8), (5.9). Поэтому элементы $N(\tau)$, $P(\tau)$ можно считать функциями, суммируемыми на $[0, 2\pi]$ с квадратом.

В каноническом случае системы (5.1) формулы, подобные (5.8), (5.9), были получены В. А. Якубовичем [14].

Пример 2. Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} + \mu\left(\varepsilon_{11}\frac{dy_1}{dt} + \varepsilon_{12}\frac{dy_2}{dt}\right) + \omega_1^2 y_1 + 2\mu(a_{11}y_1 + a_{12}y_2)\cos\theta t = 0$$
$$\frac{d^2y_2}{dt^2} + \mu\left(\varepsilon_{21}\frac{dy_1}{dt} + \varepsilon_{22}\frac{dy_2}{dt}\right) + \omega_2^2 y_2 + 2\mu(a_{21}y_1 + a_{22}y_2)\cos\theta t = 0 \tag{5.10}$$

где $\varepsilon_{11}, \ldots, a_{22}$ — вещественные числа, $\theta_0 = \omega_1 + \omega_2$, $\omega_1 > \omega_2 > 0$.

В обозначениях п. 5 имеем

$$\rho_{11} = \omega_1, \quad \rho_{12} = -\omega_2, \quad \rho_{21} = \omega_2, \quad \rho_{22} = -\omega_1, \quad [11] = [22] = 1, \quad [12] = [21] = 2$$
$$k_{11} = 0,\ k_{12} = 1,\ k_{21} = 0,\ k_{22} = 1$$

Уравнение (5.8) для z_{11}, z_{12} принимает вид

$$\begin{vmatrix} \frac{i}{2}\varepsilon_{11} - z & \frac{a_{12}}{2\sqrt{-\omega_1\omega_2}} \\ \frac{a_{21}}{2\sqrt{-\omega_1\omega_2}} & \frac{i}{2}\varepsilon_{22} + \lambda - z \end{vmatrix} = 0 \tag{5.11}$$

Потребовав, чтобы при всех $\lambda \in (-\infty, \infty)$ выполнялись неравенства $\operatorname{Im} z_{11} > 0$ $\operatorname{Im} z_{12} > 0$, получим условия

$$\varepsilon_{11} > 0, \qquad \varepsilon_{22} > 0, \qquad \varepsilon_{11}\varepsilon_{22}\omega_1\omega_2 > a_{12}a_{21} \tag{5.12}$$

Ввиду вещественности коэффициентов системы (5.10), $\operatorname{Im} z_{21} > 0$, $\operatorname{Im} z_{22} > 0$, поэтому условия (5.12) являются условиями асимптотической устойчивости решений уравнений (5.10) при малых значениях μ.

В уравнении $\Delta(p) = 0$ сделаем упрощающее преобразование: разделим строки определителя на элементы этих строк, стоящих на главной диагонали определителя $\Delta(p)$, за исключением тех строк, в которых эти элементы обращаются в нуль при $\mu=0$, $p=\rho_{j1}i$. Если разложить полученный определитель по членам одного порядка при $p = \rho_{j1} + \mu z i$, то первыми следует учесть элементы, находящиеся на пересечении столбцов и строк, проходящих через элементы, которые стоят на главной диагонали $\Delta(\rho_{j1}i + \mu z i)$ и обращаются в нуль при $\mu = 0$. В следующие по порядку члены входят только элементы, стоящие на вышеупомянутых строках и столбцах. Например, если в (5.1) $P(\theta t)$ — самосопряженная матрица,

$$N(\theta t) \equiv 0,\ \mu = 1,\ l = \infty,\ \beta_1 = 2,\ \rho_{11} = \omega_g,\ \rho_{12} = -\omega_h,\ \theta_0 = \frac{\omega_g + \omega_h}{k}$$

(т. е. соотношение $\omega_g + \omega_h = k\theta_0$ выполнено только для данных g, h, k), то получим уравнение для p, выписанное до малых третьего порядка относительно $\pi_{js}^{(k)}$

$$(p^2+\omega_g^2+\pi_{gg}^{(0)})((p-k\theta i)^2+\omega_h^2+\pi_{hh}^{(0)})-\pi_{gh}^{(k)}\pi_{hg}^{(-k)}- \tag{5.13}$$

$$-(p^2+\omega_g^2+\pi_{gg}^{(0)})\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\pi_{rh}^{(-j)}\pi_{hr}^{(j)}}{\omega_r^2-(\omega_h+j\theta_0)^2}+\pi_{gh}^{(k)}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=-\infty}^{\infty}{}'$$

$$\frac{\pi_{rg}^{(-k-j)}\pi_{hr}^{(j)}}{\omega_r^2-(\omega_h+j\theta_0)^2}-((p-k\theta i)^2+\omega_h^2+\pi_{hh}^{(0)}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=-\infty}^{\infty}{}'\frac{\pi_{rg}^{(j)}\pi_{hr}^{(-j)}}{\omega_r^2-(\omega_g+j\theta_0)^2}+$$

$$+\pi_{hg}^{(-k)}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=-\infty}^{\infty}{}'\frac{\pi_{rh}^{(k+j)}\pi_{gr}^{(-j)}}{\omega_r^2-(\omega_g+j\theta_0)^2}=0$$

где штрих обозначает, что из сумм выпускаются слагаемые, знаменатель для которых обращается в нуль.

Если $\pi_{gh}^{(k)}\pi_{hg}^{(-k)}\neq 0$, то уравнение (5.13) позволяет определить два характеристических показателя, близких к $i\omega_g$ с точностью до малых второго порядка.

Потребовав, чтобы уравнение (5.13) имело кратный корень вблизи $p=i\omega_g$, получим уравнение границы области неустойчивости с точностью до малых второго порядка относительно $\pi_{js}^{(k)}$.

Пример 3. [13] Рассматривая уравнение

$$\frac{d^2Y}{dt^2}+[P_0^2-\varphi N]\,Y=0 \tag{5.14}$$

где

$$P_0=\begin{pmatrix}\omega_1 & 0\\ 0 & \omega_2\end{pmatrix},\qquad N=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\qquad \varphi=\alpha+\beta\cos\theta t,\qquad \omega_1>\omega_2>0$$

$$\theta_0=\omega_1+\omega_2,\qquad k=1\qquad \pi_{12}^{(0)}=\pi_{22}^{(0)}=-\alpha,\qquad \pi_{12}^{(1)}=\pi_{21}^{(1)}=\pi_{12}^{(-1)}=\pi_{21}^{(-1)}=-\frac{\beta}{2}$$

получим, что уравнение (5.13), составленное для уравнения (5.14), имеет кратный корень при условии

$$\theta_\pm-\theta_0=\pm\frac{\beta}{2\sqrt{\omega_1\omega_2}}-\frac{1}{16\theta_0\omega_1\omega_2}(8\alpha^2+\beta^2)+\dots \tag{5.15}$$

При $\theta_-<\theta<\theta_+$ характеристические показатели имеют вещественную часть отличную от нуля, и решения уравнения (5.14) неустойчивы (см. [13]).

В заключение благодарю А. И. Лурье за внимание и помощь в работе.

Поступила 12 III 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. H i l l G. W. On the part of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon. Acta mathé., 1886, VIII, p. 1—36.
2. H e l g e von K o c h. Sur les de'terminants infinis et les équations différentielles linéaires. Stockholm, 1892.
3. К а г а н В. Ф. Основания теории определителей. Одесса, Укргосиздат, 1922.
4. У и т т е к е р Е. Т. и В а т с о н Г. Н. Курс современного анализа. ГТТИ, 1933, т. 1, 2.
5. К о ч и н Н. Е. О крутильных колебаниях коленчатых валов. ПММ, 1934, т. II, вып. 1.
6. Б о л о т и н В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. ГИТТЛ, 1956.
7. П р о с к у р я к о в А. П. Характеристические числа решений дифференциального уравнения 2-го порядка с периодическими коэффициентами. ПММ, 1946, т. X, вып. 5—6.
8. Х о в а н с к и й А. Н. Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. ГИТТЛ, 1956.
9. Ф у к с Б. А. и Л е в и н В. И. Функции комплексного переменного и некоторые их приложения (специальные главы). ГИТТЛ, М.— Л., 1951.
10. P a t r y I. Über die linearen Differentialgleichungen mit sinusförmigen Koeffizienten. Prom. Nr 2618, Iuris-Verlag-Zürich, 1957.
11. С т р е т т М. Д. О. Функции Ляме, Матье и родственные им в физике и технике. ОНТИ, Харьков, 1935.
12. А н д р о н о в А. А. О колебаниях системы с периодически меняющимися параметрами. Собр. трудов, Изд-во АН СССР.—М., 1956.
13. Я к у б о в и ч В. А. Метод малого параметра для систем с периодическими коэффициентами. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 1.
14. Я к у б о в и ч В. А. О динамической устойчивости упругих систем. ДАН СССР, 1958, т. 121, № 4.