О ПРИМЕНЕНИИ АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ К ЗАДАЧАМ ДИНАМИКИ ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ

М. И. Эстрин (Москва)

Автомодельные решения позволяют находить точные решения ряда задач, а также получать приближенные решения более широкого класса задач. В общей постановке эти вопросы рассмотрены в книге Л. И. Седова [1]. Имеется также большое число работ, в частности работы Г. И. Баренблатта [2, 3], Г. И. Баренблатта и Я. Б. Зельдовича [4, 5], в которых метод автомодельных решений с успехом применяется к различным задачам о нестационарном движении сплошных сред.

В применении к плоской динамической задаче теории пластичности автомодельные решения как аппарат для получения точных решений уравнений динамики пластической среды были рассмотрены в работе автора [6]. Цель настоящей заметки заключается в том, чтобы показать, каким образом могут быть построены приближенные решения более широкого класса задач.

1. Неустановившееся движение идеально пластической среды, находящейся в условиях плоской деформации, описывается следующей системой уравнений [7]:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}-\rho\frac{\partial u}{\partial t}=0,\qquad \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma}{\partial y}-\rho\frac{\partial v}{\partial t}=0$$

$$(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_{xy}^2=4k^2$$

$$\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}=\frac{\partial v/\partial x+\partial u/\partial y}{\partial u/\partial x-\partial v/\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

Выразив напряжения через функции χ и φ по формулам

$$\left.\begin{matrix}\sigma_x\\ \sigma_y\end{matrix}\right\}=k\,(2\chi\pm\cos 2\varphi),\qquad \tau_{xy}=k\sin 2\varphi$$

приведем систему к такому виду:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\chi}{\partial x}-\sin 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\cos 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\rho}{2k}\frac{\partial u}{\partial t}=0\\ \frac{\partial\chi}{\partial y}+\cos 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\sin 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\rho}{2k}\frac{\partial v}{\partial t}=0\\ 2\frac{\partial u}{\partial x}-\operatorname{ctg}2\varphi\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0,\qquad 2\frac{\partial v}{\partial y}+\operatorname{ctg}2\varphi\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0\end{gathered}\tag{1}$$

Если ввести новые независимые переменные

$$\lambda=\frac{x}{at},\qquad \mu=\frac{y}{at},\qquad \tau=\frac{t}{t_0},\qquad a=\frac{2k}{\rho}\tag{2}$$

то система (1) примет вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial\chi}{\partial\lambda}-\sin 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}+\cos 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}+\lambda\frac{\partial u}{\partial\lambda}+\mu\frac{\partial u}{\partial\mu}-\tau\frac{\partial u}{\partial\tau}=0\\ \frac{\partial\chi}{\partial\mu}+\cos 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}+\sin 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}+\lambda\frac{\partial v}{\partial\lambda}+\mu\frac{\partial v}{\partial\mu}-\tau\frac{\partial v}{\partial\tau}=0\\ 2\frac{\partial u}{\partial\lambda}-\operatorname{ctg}2\varphi\left(\frac{\partial v}{\partial\lambda}+\frac{\partial u}{\partial\mu}\right)=0,\qquad 2\frac{\partial v}{\partial\mu}+\operatorname{ctg}2\varphi\left(\frac{\partial v}{\partial\lambda}+\frac{\partial u}{\partial\mu}\right)=0\end{gathered}\tag{3}$$

При $t_0\to\infty$ эта система переходит в систему уравнений автомодельных движений, рассмотренных в [6]. Величина t_0 здесь может рассматриваться как характерное время нестационарного процесса, которое для автомодельного движения бесконечно велико, а для более широких классов движений является конечным. Для того чтобы получить приближенное решение, соответствующее большим значениям t_0, естественно искать его в виде рядов по степеням τ

$$\begin{aligned}\chi&=\chi^{(0)}+\tau\chi^{(1)}+\ldots, & u&=u^{(0)}+\tau u^{(1)}+\ldots\\ \varphi&=\varphi^{(0)}+\tau\varphi^{(1)}+\ldots, & v&=v^{(0)}+\tau v^{(1)}+\ldots\end{aligned}\tag{4}$$

Подставив разложения (1) в уравнения (3) и приравняв нулю коэффициенты при одинаковых степенях τ, получим последовательные системы уравнений нулевого, первого, второго и т. д. приближений.

Система нулевого приближения представляет собой систему автомодельных уравнений. Рассмотрим подробнее первое приближение.

Соответствующие уравнения имеют вид

$$\frac{\partial\chi^{(1)}}{\partial\lambda} - \sin 2\varphi^{(0)}\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial\lambda} + \cos 2\varphi^{(0)}\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial\mu} + \lambda\frac{\partial u^{(1)}}{\partial\lambda} + \mu\frac{\partial u^{(1)}}{\partial\mu} - \tag{5}$$

$$- 2\varphi^{(1)}\left(\frac{\partial\varphi^{(0)}}{\partial\lambda}\cos 2\varphi^{(0)} - \frac{\partial\varphi^{(0)}}{\partial\mu}\sin 2\varphi^{(0)}\right) - u^{(0)} = 0$$

$$\frac{\partial\chi^{(1)}}{\partial\mu} + \cos 2\varphi^{(0)}\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial\lambda} + \sin 2\varphi^{(0)}\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial\mu} + \lambda\frac{\partial v^{(1)}}{\partial\lambda} + \mu\frac{\partial v^{(1)}}{\partial\mu} -$$

$$- 2\varphi^{(1)}\left(\frac{\partial\varphi^{(0)}}{\partial\lambda}\sin 2\varphi^{(0)} - \frac{\partial\varphi^{(0)}}{\partial\mu}\cos 2\varphi^{(0)}\right) - v^{(0)} = 0$$

$$2\frac{\partial u^{(1)}}{\partial\lambda} - \operatorname{ctg} 2\varphi^{(0)}\left(\frac{\partial v^{(1)}}{\partial\lambda} + \frac{\partial u^{(1)}}{\partial\mu}\right) + 2\varphi^{(1)}\left(2\frac{\partial u^{(0)}}{\partial\lambda}\operatorname{ctg} 2\varphi^{(0)} + \frac{\partial v^{(0)}}{\partial\lambda} + \frac{\partial u^{(0)}}{\partial\mu}\right) = 0$$

$$2\frac{\partial v^{(1)}}{\partial\mu} + \operatorname{ctg} 2\varphi^{(0)}\left(\frac{\partial v^{(1)}}{\partial\lambda} + \frac{\partial u^{(1)}}{\partial\mu}\right) + 2\varphi^{(1)}\left(2\frac{\partial v^{(0)}}{\partial\mu}\operatorname{ctg} 2\varphi^{(0)} - \frac{\partial v^{(0)}}{\partial\lambda} - \frac{\partial u^{(0)}}{\partial\mu}\right) = 0$$

Эта система четырех линейных уравнений для неизвестных $\chi^{(1)}$, $\varphi^{(1)}$, $u^{(1)}$, $v^{(1)}$. Предполагается, что решение автомодельных уравнений получено ранее; поэтому все величины нулевого приближения можно считать известными. Найдем характеристики системы (5). Для этого следует уравнения системы разрешить относительно частных производных совместно с выражениями для полных дифференциалов функций $\chi^{(1)}$, $\varphi^{(1)}$, $u^{(1)}$, $v^{(1)}$. Уравнение для определения характеристических направлений имеет вид $|a_{ik}| = 0$, где коэффициенты детерминанта a_{ik} следующие:

$$a_{11} = 1, \quad a_{12} = -\sin 2\varphi^{(0)} - \cos 2\varphi^{(0)}\frac{d\lambda}{d\mu}, \quad a_{13} = \lambda + \mu\frac{d\lambda}{d\mu}, \quad a_{14} = 0$$

$$a_{21} = \frac{d\lambda}{d\mu}, \quad a_{22} = \cos 2\varphi^{(0)} - \sin 2\varphi^{(0)}\frac{d\lambda}{d\mu}, \quad a_{23} = 0, \quad a_{24} = \lambda + \mu\frac{d\lambda}{d\mu}$$

$$a_{31} = 0, \quad a_{32} = 0, \quad a_{33} = 2 + \operatorname{ctg} 2\varphi^{(0)}\frac{d\lambda}{d\mu}, \quad a_{34} = -\operatorname{ctg} 2\varphi^{(0)}$$

$$a_{41} = 0, \quad a_{42} = 0, \quad a_{43} = -\operatorname{ctg} 2\varphi^{(0)}\frac{d\lambda}{d\mu}, \quad a_{44} = \operatorname{ctg} 2\varphi^{(0)} - 2\frac{d\lambda}{d\mu}$$

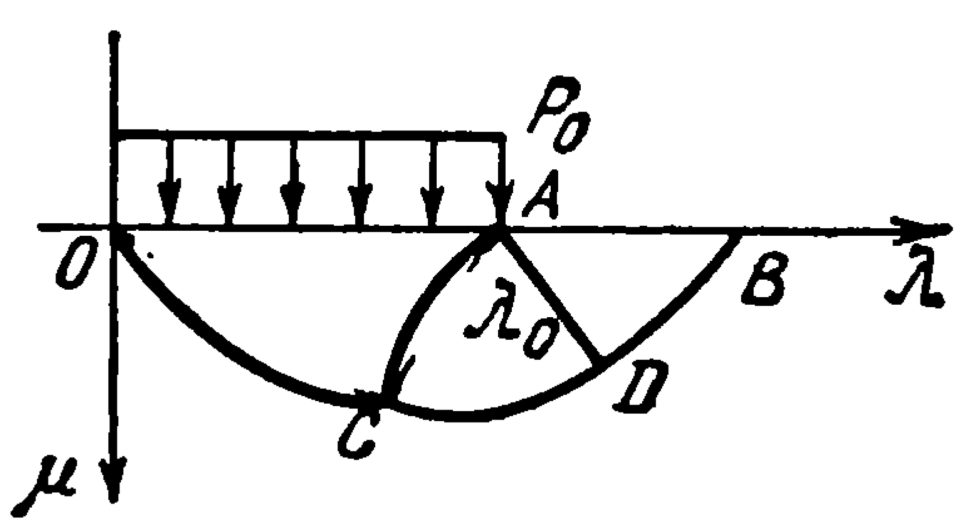
Легко убедиться, что детерминант четвертого порядка распадается на два детерминанта второго порядка, что дает два уравнения для определения $d\mu\,/\,d\lambda$. Оказывается, что каждое из этих уравнений приводит к выражению для характеристических направлений следующего вида:

$$\frac{d\mu}{d\lambda} = \operatorname{tg}\left(\varphi^{(0)} \pm \frac{\pi}{4}\right) \tag{7}$$

Таким образом, в каждой точке плоскости λ, μ имеется два действительных характеристических направления, причем каждое из них имеет кратность, равную двум, так что система (5) является гиперболической во всей плоскости переменных λ, μ.

Гиперболичность системы (5) позволяет развить численные методы решения, аналогичные методам, применяемым в статической пластичности и газовой динамике. Один из возможных вариантов разностных уравнений, позволяющих проводить численное интегрирование системы нелинейных уравнений автомодельного движения, рассмотрен в [6]. В данном случае разностные уравнения будут несколько сложнее, так как в последние два уравнения наряду со скоростями в первом приближении входит также и неизвестная функция $\varphi^{(1)}$. С другой стороны, задача здесь упрощается в том отношении, что система (5) линейна, так что характеристики ее известны заранее. Существенно отметить, что, как это следует из формулы (7), характеристические направления системы (5) совпадают с характеристическими направлениями системы автомодельных уравнений, так что их можно считать известными, если известно нулевое приближение.

2. Полученные уравнения позволяют находить приближенные решения ряда задач динамики пластической среды. Автомодельная задача о распространении по поверхности полупространства постоянного давления p рассмотрена в работе [6]. Предположим, что требуется решить более сложную задачу, когда p зависит от времени. Представим давление на поверхности тела в виде



$$p = p_0 f(\lambda), \qquad f(\lambda) = \begin{cases} 1 & (\lambda < \lambda_0) \\ 0 & (\lambda > \lambda_0) \end{cases}$$

Если p_0 разложить в ряд по степеням

$$p_0 = p_0^{(0)} + \tau p_0^{(1)} + \ldots$$

то для уравнений первого приближения будем иметь совокупность следующих краевых задач (фигура). В треугольнике ABD имеем задачу Коши, в веере ADC вырожденную задачу Гурса, а в OAC — смешанную задачу. В результате можно найти напряжения и скорости во всей пластически деформированной области плоскости λ, μ. Совершенно аналогично может быть решена задача о распространении давления в том случае, когда скорость фронта давления зависит от времени.

Поступила 14 IV 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Гостехтеоретиздат, М., 1957.
2. Баренблатт Г. И. О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде. ПММ, 1952, т. XVI, вып. 1.
3. Баренблатт Г. И. Об одном классе точных решений плоской одномерной задачи нестационарной фильтрации газа в пористой среде. ПММ, 1953, т. XVII, вып. 6.
4. Баренблатт Г. И. и Зельдович Я. Б. Об устойчивости распространения пламени. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 6.
5. Зельдович Я. Б., Баренблатт Г. И. Об асимптотических свойствах автомодельных решений уравнений нестационарной фильтрации газа. ДАН СССР, 1958, т. 118, № 4.
6. Эстрин М. И. К теории неустановившегося движения идеально-пластической среды. Сб. «Исследования по вопросам теории пластичности и прочности строительных конструкций». Госстройиздат, М., 1958.
7. Соколовский В. В. Теория пластичности, Гостехтеоретиздат, М.— Л., 1950.