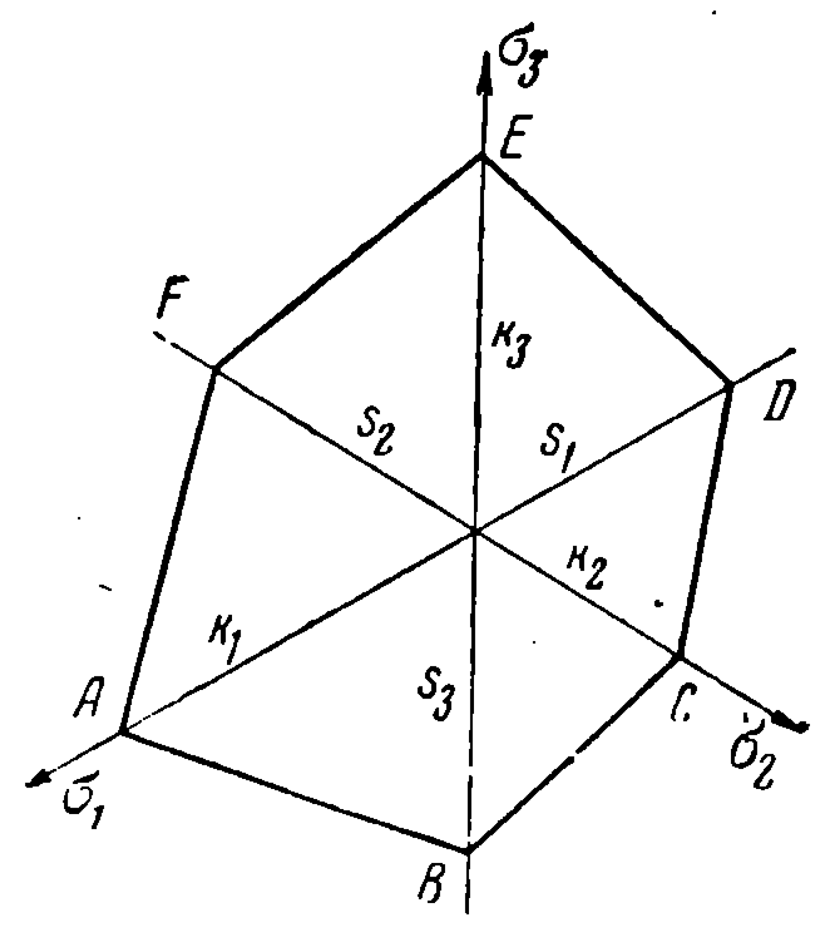
К ТЕОРИИ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ ПЛАСТИЧЕСКИ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ

М. С. Саркисян

(Ленинград)

Исследуется плоская деформация анизотропного жесткопластического тела при напряжениях, соответствующих грани призмы текучести, предложенной Д. Д. Ивлевым [1].

1. Кусочно-линейные условия для пластически анизотропных тел были использованы в работах Д. Д. Ивлева [1], Ху [2] и А. Савчука [3]. В работах [2,3] при формулировке условий пластичности рассматриваются случаи деформирования, когда главные оси напряжений и главные оси анизотропии совпадают в каждой точке ортотропного тела. Однако существует лишь узкий класс задач, где выполняются эти предположения.



Фиг. 1

В общем случае при формулировке кусочно-линейного условия пластичности для анизотропных тел изменение ориентации главных осей напряжений в элементе тела относительно фиксированной системы x, y, z становится фактором, который необходимо принять во внимание. Условие пластичности, предложенное Д. Д. Ивлевым [1] для тел с пластической анизотропией общего вида, учитывает и этот фактор. При пластической анизотропии общего вида пределы текучести при растяжении и сжатии различны и зависят от направляющих косинусов углов, образованных направлением растяжения — сжатия с осями x, y, z.

При предположениях независимости условия пластичности от величины гидростатического давления и невогнутости кривой текучести условие пластичности для рассматриваемого идеального пластического анизотропного тела интерпретируется в пространстве главных напряжений некоторой шестигранной призмой, грани которой параллельны прямой $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$.

Условие пластичности (фиг. 1) имеет следующий вид [1]

$$
\begin{aligned}
&\frac{\sigma_1-\sigma_2}{k_1}-\frac{\sigma_3-\sigma_2}{s_3}=1 \quad (AB), &&\frac{\sigma_3-\sigma_2}{k_3}-\frac{\sigma_1-\sigma_2}{s_1}=1 \quad (DE)\\
&\frac{\sigma_2-\sigma_1}{k_2}-\frac{\sigma_3-\sigma_1}{s_3}=1 \quad (BC), &&\frac{\sigma_3-\sigma_1}{k_3}-\frac{\sigma_2-\sigma_1}{s_2}=1 \quad (EF) \qquad (1.1)\\
&\frac{\sigma_2-\sigma_3}{k_2}-\frac{\sigma_1-\sigma_3}{s_1}=1 \quad (CD), &&\frac{\sigma_1-\sigma_3}{k_1}-\frac{\sigma_2-\sigma_3}{s_2}=1 \quad (FA)
\end{aligned}
$$

Здесь

$k_1 = k_1(l_i)$, $k_2 = k_2(m_i)$, $k_3 = k_3(n_i)$ — пределы текучести при растяжении,

$s_1 = s_1(l_i)$, $s_2 = s_2(m_i)$, $s_3 = s_3(n_i)$ — пределы текучести при сжатии в направлении главных осей напряжения.

2. Рассмотрим равновесие анизотропного жестко-пластического цилиндра бесконечной длины с образующими, параллельными оси z, под действием поверхностной нагрузки, постоянной вдоль образующих. Изотропное тело, находящееся в таких условиях, испытывает плоскую деформацию. В теле с анизотропией общего вида плоская деформация становится невозможной. Предположим, что рассматриваемое тело испытывает так называемую чистую плоскую деформацию, при которой компоненты тензоров напряжения и скоростей деформации не зависят от координаты z, причем

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \qquad \varepsilon_z = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0 \qquad (2.1)$$

Из (2.1) следует, что направление оси z является главным направлением для тензоров напряжения и скоростей деформации.

Следовательно, ориентацию главных направлений напряжения относительно системы x, y, z можно определить с помощью угла φ между первым главным направлением и осью x. Отметим, что пластическое состояние, удовлетворяющее условию (2.1), соответствует точкам, лежащим на гранях призмы текучести.

При условии $\sigma_1 > \sigma_3 > \sigma_2$ рассматриваемое состояние соответствует грани (FA), имеющей уравнение

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{k_1} - \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{s_2} = 1 \qquad (k_1 = k_1(\varphi), \qquad s_2 = s_2(\varphi)) \tag{2.2}$$

Принимая левую часть выражения (2.2) в качестве пластического потенциала, получим, что условию $\varepsilon_z = 0$ можно удовлетворить только в случае, когда $k_1(\varphi) = s_2(\varphi)$. Следовательно, требуется выполнение некоторых условий относительно анизотропии рассматриваемого тела. Если тело ортотропное, то для плоской деформации (2.1) необходимо, чтобы предел текучести $Y(\varphi)$ при растяжении — сжатии удовлетворял условию $Y(\varphi) = Y(\varphi \pm {}^1/_2\pi)$. К такой четырехкратной симметрии предела тякучести при растяжении—сжатии приводит также рассмотрение плоской деформации ортотропного тела, при условии пластичности, используемом Хиллом [4].

Отметим, что случай плоской деформации, соответствующий ребру призмы текучести, рассматриваемый Д. Д. Ивлевым [1], не исчерпывает всех случаев плоской деформации анизотропного тела, так как в указанном случае отсутствует ограничение характера анизотропии тела, а предельный переход к изотропному случаю плоской деформации невозможен.

В дальнейшем предполагаем, что рассматриваемое тело удовлетворяет указанным требованиям. В частности, у ортотропного тела пределы текучести при растяжении и сжатии равны, и условие пластичности (2.2) в случае плоской деформации приводится к виду

$$\sigma_1 - \sigma_2 = Y(\varphi) \tag{2.3}$$

Переходя к компонентам в декартовой системе координат, получим

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = Y^2(\varphi) \tag{2.4}$$

Условию (2.4) можно удовлетворить подстановкой, легко получаемой с помощью формул преобразования

$$\sigma_x = p + \frac{1}{2} Y(\varphi)\cos 2\varphi, \qquad \sigma_y = p - \frac{1}{2} Y(\varphi)\sin 2\varphi, \qquad \tau_{xy} = \frac{1}{2} Y(\varphi)\sin 2\varphi \tag{2.5}$$

где

$$p = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, \qquad \varphi = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \tag{2.6}$$

Подставляя выражения (2.5) в уравнения равновесия, получим систему

$$\begin{aligned} &2\frac{\partial p}{\partial x} - (2Y\sin 2\varphi - Y'\cos 2\varphi)\frac{\partial \varphi}{\partial x} + (2Y\cos 2\varphi + Y'\sin 2\varphi)\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ &2\frac{\partial P}{\partial y} + (2Y\cos 2\varphi + Y'\sin 2\varphi)\frac{\partial \varphi}{\partial x} + (2Y\sin 2\varphi - Y'\cos 2\varphi)\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Система (2.7) имеет два действительных семейства ортогональных характеристик, уравнения которых имеют вид

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2Y\sin 2\varphi - Y'\cos 2\varphi \pm \sqrt{Y'^2 + 4Y^2}}{2Y\cos 2\varphi + Y'\sin 2\varphi} \tag{2.8}$$

Вдоль характеристик имеют место соотношения

$$p \pm G(\varphi) = \text{const} \qquad \left(G(\varphi) = \frac{1}{2}\int \sqrt{Y'^2 + 4Y^2}\, d\varphi\right) \tag{2.9}$$

Уравнения (2.5)—(2.9) совпадают с соответствующими уравнениями Д. Д. Ивлева [1] (если в последних устранить опечатки), но относятся к напряжениям на грани призмы текучести.

Принимая левую часть условия пластичности (2.4) в качестве пластического потенциала и используя (2.6), установим закон течения в следующем виде

$$\varepsilon_x = \lambda\left(\sigma_x - \sigma_y + \frac{Y'}{Y}\tau_{xy}\right), \qquad \varepsilon_y = \lambda\left(\sigma_y - \sigma_x - \frac{Y'}{Y}\tau_{xy}\right)$$

$$\gamma_{xy} = \lambda\left[4\tau_{xy} - \frac{Y'}{Y}(\sigma_x - \sigma_y)\right] \tag{2.10}$$

где ε_x, ε_y, γ_{xy} — компоненты скоростей деформаций.

В дальнейшем удобно ввести функцию ψ — угол между первым главным направлением скоростей деформаций и осью x

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{2Y\sin 2\varphi - Y'\cos 2\varphi}{2Y\cos 2\varphi + Y'\sin 2\varphi} \tag{2.11}$$

Из (2.10), (2.11) и (2.5) легко получить систему уравнений, определяющих компоненты скорости v_x, v_y

$$2\frac{\partial v_x}{\partial x} - \operatorname{ctg} 2\psi\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = 0, \qquad 2\frac{\partial v_y}{\partial y} + \operatorname{ctg} 2\psi\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = 0 \tag{2.12}$$

Система (2.12) — гиперболического типа, ее характеристики совпадают с характеристиками системы (2.7). После введения (2.11) уравнения характеристик значительно упрощаются и принимают следующий вид

$$dy / dx = \operatorname{tg}\left(\psi \pm \frac{\pi}{4}\right) \tag{2.13}$$

Следовательно, характеристики являются линиями скольжения (под линиями скольжения подразумеваются линии максимальной скорости деформации сдвига). Вследствие анизотропии они обычно не совпадают с линиями максимальных касательных напряжений.

Введя компоненты скоростей u и v, отнесенные к линиям скольжения α и β, из (2.12) получаем следующие уравнения

$$\partial u / \partial s_\alpha = 0, \qquad \partial v / \partial s_\beta = 0 \tag{2.14}$$

устанавливающие, что скорости относительных удлинений вдоль линий скольжения равны нулю. Преобразуя (2.14), получаем известные соотношения Гейрингера

$$du - v d\psi = 0 \quad \text{вдоль линии } \alpha, \qquad dv + u d\psi = 0 \quad \text{вдоль линии } \beta \tag{2.15}$$

3. Нетрудно показать, что существуют частные решения системы (2.7) — так называемые интегралы уравнений плоской задачи теории пластичности. В общем случае решение сводится к рассмотрению краевых задач, аналогичных краевым задачам для изотропного тела. Граничные условия определяются с помощью формул

$$\sigma_n = p + \tfrac{1}{2}Y(\varphi)\cos 2(\varphi - \alpha), \qquad \tau_n = \tfrac{1}{2}Y(\varphi)\sin 2(\varphi - \alpha) \tag{3.1}$$

где σ_n и τ_n — нормальная и касательная составляющие напряжений на контуре тела, находящегося в пластическом состоянии, α — угол между нормалью к контуру и осью x.

Сделаем некоторые замечания относительно линии разрыва напряжений. Из условия непрерывности составляющих напряжений σ_n и τ_n на линиях разрыва получим следующие соотношения

$$p^+ + \tfrac{1}{2}Y(\varphi^+)\cos 2(\varphi^+ - \theta) = p^- + \tfrac{1}{2}Y(\varphi^-)\cos 2(\varphi^- - \theta) \tag{3.2}$$

$$\tfrac{1}{2}Y(\varphi^+)\sin 2(\varphi^+ - \theta) = \tfrac{1}{2}Y(\varphi^-)\sin 2(\varphi^- - \theta) \tag{3.3}$$

где θ угол между нормалью к линии разрыва и осью x.

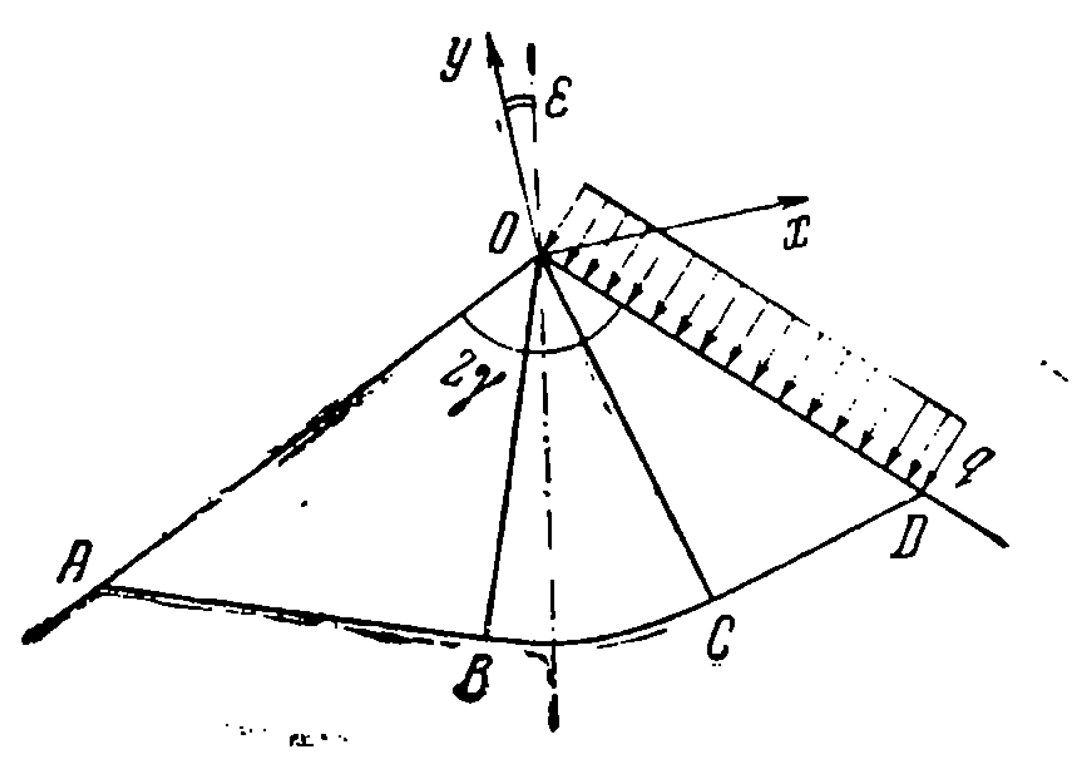
Угол θ определяется из (3.3) следующим образом

$$\theta = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{Y(\varphi^+)\sin 2\varphi^+ - Y(\varphi^-)\sin 2\varphi^-}{Y(\varphi^+)\cos 2\varphi^+ - Y(\varphi^-)\cos 2\varphi^-} \quad \text{или} \quad \theta = \operatorname{arc\,tg}\frac{2[\tau_{xy}]}{[\sigma_x - \sigma_y]} \tag{3.4}$$

В отличие от изотропного случая, линия разрыва в каждой своей точке в общем случае не является биссектрисой угла, образуемого линиями скольжения. В случае ортотропного тела она может быть биссектрисой лишь тогда, когда линия разрыва совпадает с одной из главных осей анизотропии материала.

В рассматриваемом случае плоской деформации экстремальные теоремы можно формулировать аналогично теоремам для изотропного тела [5,6]. Предположения о невогнутости кривой текучести и ограниченности углового изменения предела текучести позволяют установить два основных неравенства, формулирующих экстремальные свойства.

4. В качестве примера рассмотрим задачу о нахождении предельной нагрузки для тупого клина при действии равномерного давления q, приложенного к одной стороне клина. Примем, что материал — ортотропный и следует схеме жестко-пластического тела. В качестве системы x, y, z принимаем главные оси анизотропии материала. Угол между осью симметрии клина и осью y обозначим через ε (фиг. 2).



Фиг. 2

Очевидно, что в треугольных областях ABO, COD осуществляются равномерные напряженные состояния. Эти две области соединяются центрированным полем BOC.

В $\triangle COD$ имеем $\varphi_1 = \gamma - {}^1/_2\pi - \varepsilon$, $p_1 = -q + {}^1/_2 Y(\varphi_1)$; угол ψ_1 между OC и осью x находится из уравнения (2.11).

В $\triangle AOB$ имеем $\varphi_2 = -(\gamma + \varepsilon)$, $p_2 = -{}^1/_2 Y(\varphi_2)$; угол ψ_2 между OB и осью x определяется аналогично из (2.11).

Таким образом, определив ψ_1 и ψ_2, можем построить треугольные области AOB и COD, затем эти области соединяем центрированным веером BOC. Предельную нагрузку q^* проще всего найти из условия постоянства параметра η во всей области.

Из (2.9) следует

$$p_1 + G(\varphi_1) = p_2 + G(\varphi_2) \tag{4.1}$$

Отсюда предельная нагрузка равна

$$q^* = \frac{1}{2}\left[Y(\varphi_1) + Y(\varphi_2) + \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \sqrt{Y'^2 + 4Y^2}\, d\varphi \right] \tag{4.2}$$

В случае изотропного тела достаточно положить $Y(\varphi) = \sigma_s = \text{const}$, $\varepsilon = 0$, $\varphi = \psi$, чтобы получить известную формулу для предельной нагрузки тупого клина [5].

Столь же просто можно найти предельную нагрузку при вдавливании плоского штампа в полуплоскость и в некоторых других задачах.

Поступила 20 VII 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Ивлев Д. Д. К теории идеальной пластической анизотропии. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 6.
2. Hu L. W. Modified Tresca's yield condition and associated flow rules for anisotropic materials and applications. J. Franklin Inst., 1958, vol. 265, № 3.
3. Sawczuk A. Linear theory of plasticity of anisotropic bodies and its applications to problems of limit analysis. Arch. mech. stosowanej, 1959, vol. XI, № 5.
4. Хилл Р. Математическая теория пластичности. Гостехтеоретиздат, 1956.
5. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. Гостехтеоретиздат, 1956.
6. Прагер В. Проблемы теории пластичности. Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1958.