ПОСТРОЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ПРИБЛИЖЕННЫХ НЕАВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ОДНОМЕРНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

А. М. Пирвердян

(Баку)

Рассматривается способ построения некоторых неавтомодельных решений уравнения плоского изотермического неустановившегося движения газа в пористой среде, основанный на использовании автомодельных решений того же уравнения [1,2].

1. Известно, что решениями вида $t^\alpha f(xt^{-\beta})$, $e^{\alpha x} f(te^{\beta x})$ и $e^{\alpha t} f(xe^{\beta t})$, где α и β — связанные некоторым соотношением константы, исчерпываются все автомодельные решения этого уравнения. Этим задачам соответствуют следующие зависимости плотности $\rho(x, t)$ при $x=0$ и при $t=0$

$$\rho(0, t) = \sigma t^\alpha = \sigma e^{\alpha t}, \quad \rho(x, 0) = \sigma e^{\alpha x} \tag{1.1}$$

Используя некоторые особенности движения газа в автомодельных случаях, можно получить решения для случаев, когда функция $\rho(0, t)$ нарастания давления в нулевом сечении кусочно-гладкая, непрерывная функция.

К указанному, однако, необходимо добавить следующее. Для некоторых видов функций $\rho(0, t)$ решения в известном смысле являются «точными» (смысл этого понятия будет объяснен ниже); для других видов $\rho(0, t)$ удастся получить оценку «снизу» и «сверху»; при этом используется теорема Г. И. Баренблатта и М. И. Вишика о монотонной зависимости решения дифференциального уравнения Буссинеска от начальных и граничных условий [3], которую без труда удается обобщить на более общий класс дифференциальных уравнений, встречающихся при фильтрации газа и жидкости в пористой среде.

2. Напомним некоторые результаты работы [2], причем ограничимся плоскими течениями газа при постоянной температуре. Уравнение для этого случая имеет следующий вид:

$$c\partial\rho / \partial t = \partial^2\rho^2 / \partial x^2 \tag{2.1}$$

Решение уравнения (2.1) при граничном и начальном условиях

$$\rho(0, t) = \sigma t^p \quad (p > 0), \qquad \rho(x, 0) = 0 \quad (x \geqslant 0) \tag{2.2}$$

имеет вид

$$\rho(x, t) = \sigma t^p f(x\sigma^{-1/2} c^{1/2} t^{-(1+p)/2}) \tag{2.3}$$

где $f(\xi)$ определяется следующей задачей:

$$\left(\frac{df}{d\xi}\right)^2 + f\frac{d^2f}{d\xi^2} + \frac{p+1}{4}\xi\frac{df}{d\xi} - \frac{p}{2}f = 0 \qquad \left(f(0) = 1, \int_0^\infty f(\xi)\,d\xi < \infty\right) \tag{2.4}$$

В работе [2] приведены таблицы функций $f(\xi, p)$, полученные в результате интегрирования (2.4) при помощи степенных рядов. Анализ этих функций показывает, что при $3 \geqslant p \geqslant 0.5$ все кривые с большой точностью могут быть заменены ломаными

$$f(\xi) = 1 - \xi / \xi_0 \quad \text{при } \xi \leqslant \xi_0, \qquad f(\xi) = 0 \quad \text{при } \xi > \xi_0 \tag{2.5}$$

где ξ_0 — координата переднего фронта волны, определяемая из графика $\xi_0 = \xi_0(p)$, приведенного в работе [2].

Таким образом, при $3 \geqslant p \geqslant 0.5$ функции (2.5) с достаточной для практических целей точностью можно принять для построения решения уравнения (2.1).

Отметим, что для случая $p = 1$ решение $1 - \xi / \xi_0$, где $\xi_0 = \sqrt{2}$, является точным в строгом смысле.

Оказывается, что функции (2.5) можно весьма просто сспользовать для построения решения для случая кусочно-гладкой функции $\rho(0, t)$, составленной из отрезков следующих кривых:

$$\rho(0, t) = \sigma_1 t^{p_1} \quad \text{при } t_1 \geqslant t \geqslant 0, \qquad \rho(0, t) = \sigma_2 (t + \tau)^{p_2} \quad \text{при } t \geqslant t_1 \tag{2.6}$$

где t_1, τ, p_1, p_2, σ_1 и σ_2 — константы, связанные (как увидим ниже) некоторыми соотношениями. При этом, очевидно, $3 \geqslant p_{1,2} \geqslant 0.5$. Решение получается следующим образом. При $t = t_1$ имеем

$$\sigma_1 t_1^{p_1} = \sigma_2 (t_1 + \tau)^{p_2} \tag{2.7}$$

В момент времени $t = t_1$ распределение плотности в случае $\rho_1(0, t) = \sigma_1 t p_1$ согласно (2.5) имеет следующий вид:

$$\rho_1(x, t_1) = \sigma_1 t_1^{p_1} \left[1 - \frac{x}{\xi_0(p_1)(\sigma_1 c^{-1} t^{1+p_1})^{1/2}} \right] \tag{2.8}$$

Для того же момента времени при условии

$$\rho_2(0, t) = \sigma_2 (t + \tau)^{p_2} \tag{2.9}$$

распределение плотности будет

$$\rho_2(x, t_1) = \sigma_2 (t_1 + \tau)^{p_2} \left[1 - \frac{x}{\xi_0(p_2)(\sigma_2 c^{-1}(t_1 + \tau)^{1+p_2})^{1/2}} \right] \tag{2.10}$$

Потребуем в этот момент времени совпадения распределений плотности (2.8) и (2.10). Тогда, учитывая (2.9), получим

$$\xi_0(p_1)\, \sigma^{1/2} t^{(1+p_1)/2} = \xi_0(p_2)\, \sigma_2^{1/2} (t_1 + \tau)^{(1+p_2)/2} \tag{2.11}$$

При условиях (2.9) и (2.11), наложенных на величины σ_1, σ_2, τ и t_1, выражения (2.8) и (2.10), очевидно, будут «точными» (в рассмотренном выше смысле) решениями задачи соответственно для периодов $t_1 \geqslant t \geqslant 0$ и $t \geqslant t_1$.

Пример. Пусть $\rho_1(0, t) = \sigma_1 t$, $\rho_2(0, t) = \sigma_2 (t + \tau)^2$. При этом, согласно графику $\xi_0(p)$ в работе [3], значение $\xi_0(1) = \sqrt{2}$, а $\xi_0(2) = 1.1138$. Тогда из формул (2.9) и (2.11) имеем

$$\sigma_2 = \sigma_1 \frac{t_1}{(t_1 + \tau)^2}, \qquad \sqrt{2}\, \sigma_1^{1/2} t_1 = 1.1138\, \sigma_2^{1/2} (t_1 + \tau)^{3/2}$$

Отсюда $\tau = 0.613\, t_1$, $\sigma_2 = 0.384\, \sigma_1 / t_1$. Таким образом, для кусочно-гладкой непрерывной функции плотности в нулевом сечении вида

$$\rho(0, t) = \begin{cases} \sigma_1 t & (t_1 \geqslant t \geqslant 0) \\ 0.384\, (\sigma_1 / t_1)(0.613\, t_1 + t)^2 & (t \geqslant t_1) \end{cases}$$

решение имеет следующий вид:

$$\rho(x, t) = \begin{cases} \sigma_1 t \left[1 - \dfrac{c^{1/2} x}{\sqrt{2}\, \sigma_1^{1/2} t} \right] \\ 0.384\, \dfrac{\sigma_1}{t_1} (0.613\, t_1 + t)^2 \left[1 - \dfrac{c^{1/2} x}{1.1138\, (0.384\, \sigma_1 / t_1)^{1/2} (0.613\, t_1 + t)^{3/2}} \right] \end{cases}$$

3. В предыдущем разделе удалось получить «точные» решения для неавтомодельных случаев именно потому, что показатели степени p соответствовали линейному характеру распределения плотности по координате x. Худшие результаты, по-видимому, получатся для кусочно-гладких непрерывных функций с показателем p, меньшим 0.5. Впрочем, для целей, не требующих большой точности, фактическое распределение плотности для всего изученного диапазона изменения показателя p, при $\xi < \xi_0$ может быть аппроксимировано [4] прямыми вида $1 - \xi / \xi_0$, и тогда указанный выше прием нахождения решения для кусочно-гладких, непрерывных функций можно распространить на все изученные значения показателя от нуля до трех.

Однако возникает необходимость оценки «снизу» и «сверху» предложенного метода. Особенно это важно в тех случаях, когда изучаемые профили распределения плотности имеют существенно выпуклый или вогнутый вид.

Идея оценки заключается в следующем. Пусть при степенном законе возрастания плотности в нулевом сечении $\rho(0, t) = \sigma_1 t^{p_1}$ в момент $t = t_1$ реализовалось распределение плотности

$$\rho_1(x, t_1) = \sigma_1 t_1^{p_1} f_1 (x \sigma_1^{-1/2} c^{1/2} t^{-(1+p_1)/2}) \tag{3.1}$$

При $t > t_1$ закон возрастания плотности в нулевом сечении будет $\rho(0, t) = \sigma_2 (\tau + t$. Этому закону соответствует при $t = t_1$ следующее распределение плотности

$$\rho_2(x,\ t) = \sigma_2(\tau + t_1)^{p_2} f_2(x\sigma_2^{-1/2} c^{1/2}(\tau + t_1)^{-(1+p_2)/2}) \qquad (3.2)$$

причем ни при каких значениях параметров τ, σ_1 и σ_2 функций f_1 и f_2 распределения плотности не совпадают.

Пусть теперь известны два решения $\rho^{(1)}(x,\ t)$, $\rho^{(2)}(x,\ t)$ уравнения (2.1), причем $\rho^{(1)}(x,\ t_1) \geqslant \rho^{(2)}(x,\ t_1)$ для момента времени t_1, а, начиная с t_1, должно быть $\rho^{(1)}(0,\ t) \geqslant \rho^{(2)}(0,\ t)$.

Выберем параметры, входящие в граничные условия для решений $\rho^{(1)}$ и $\rho^{(2)}$, таким образом, чтобы

$$\rho^{(1)}(x,\ t_1) \geqslant \rho_{1,2}(x,\ t_1) \geqslant \rho^{(2)}(x,\ t_1), \qquad \rho^{(1)}(0,\ t) \geqslant \rho_{1,2}(0,\ t) \geqslant \rho^{(2)}(0,\ t) \qquad (3.3)$$

Тогда, согласно теореме Г. И. Баренблатта и М. И. Вишика [3], должно иметь место неравенство

$$\rho^{(1)}(x,\ t) \geqslant \rho_{1,2}(x,\ t) \geqslant \rho^{(2)}(x,\ t) \qquad \text{при } t > t_1 \qquad (3.4)$$

Выбор мажоранты $\rho^{(1)}$ и миноранты $\rho^{(2)}$ зависит от условий задачи[1].

Пример. Пусть

$$\rho(0,\ t) = \sigma_1 t \quad \text{при } t_1 \geqslant t \geqslant 0, \qquad \rho(0,\ t) = \sigma_2 \quad \text{при } t \geqslant t_1 \qquad (3.5)$$

При $t = t_1$ распределение плотности имеет вид

$$\rho_1(x,\ t) = \sigma_1 t_1 \left[1 - \left(\frac{c}{2\sigma_1}\right)^{1/2} \frac{x}{t_1}\right] \qquad (3.6)$$

Для того же момента времени t_1 распределение плотности, соответствующее мгновенному росту плотности в нулевом сечении $[p = 0]$ в некоторый момент времени $\tau^{(1)}$ до значения $\sigma_2 = \sigma_1 t_1$, будет [1]

$$\rho_2(x,\ t) = 5.22\sigma_2 \left\{\frac{1}{4}[1 - 0.4375\xi_1] - \frac{1}{16}[1 - 0.4375\xi_1]^2 + \ldots\right\} \qquad (3.7)$$

$$\xi_1 = x\sigma_2^{-1/2} c^{1/2}(t_1 - \tau^{(1)})^{-1/2} \qquad (3.8)$$

На фигуре прямая *1* и кривая *2* построены соответственно по формулам (3.6) и (3.7), причем интервал времени $\tau^{(1)}$ выбран из условия равенства перемещений переднего фронта газа в обоих случаях, т. е.

$$\xi_0(1)\sigma_1^{1/2} t_1 = \xi_0(0)\sigma_2^{1/2}(t_1 - \tau^{(1)})^{1/2} \qquad (3.9)$$

Отсюда при подстановке $\xi_0(1) = \sqrt{2}$, $\xi_0(0) = 2.2857$ и $\sigma_2 = \sigma_1 t_1$ имеем $\tau^{(1)} = 0.617 t_1$.

В данном случае целесообразно в качестве мажоранты $\rho^{(1)}$ выбрать (3.7), т. е. $\rho^{(1)}(x,\ t) = \rho_2(x,\ t)$, где $t \geqslant t_1$, а для $\rho^{(2)}$ — функцию, соответствующую мгновенному росту плотности в нулевом сечении до некоторого значения $\varkappa\sigma_2$ $(\varkappa < 1)$ при $t = \tau^{(2)}$; при этом $\varkappa$ и $\tau^{(2)}$ необходимо выбрать так, чтобы вся кривая *3* распределения плотности в момент $t = t_1$ лежала бы ниже прямой *1*, касаясь ее (фигура).

Графическим путем было найдено $\varkappa \approx 0.93$, $\tau^{(2)} \approx 0.645 t_1$.

Таким образом, $\rho^{(1)}$ и $\rho^{(2)}$ должны иметь следующий вид:

$$\rho^{(1)} = 5.22\sigma_1 t_1 \left\{\frac{1}{4}[1 - 0.4375\xi^{(1)}] - \frac{1}{16}[1 - 0.4375\xi^{(1)}]^2 + \ldots\right\}$$

$$\xi^{(1)} = x(\sigma_1 t_1)^{-1/2} c^{1/2}[t - 0.617 t_1]^{-1/2}$$

$$\rho^{(2)} = 4.85\sigma_1 t_1 \left\{\frac{1}{4}[1 - 0.4375\xi^{(2)}] - \frac{1}{16}[1 - 0.4375\xi^{(2)}]^2 + \ldots\right\}$$

$$\xi^{(2)} = x(0.93\sigma_1 t_1)^{-1/2} c^{1/2}[t - 0.645 t_1]^{-1/2}$$

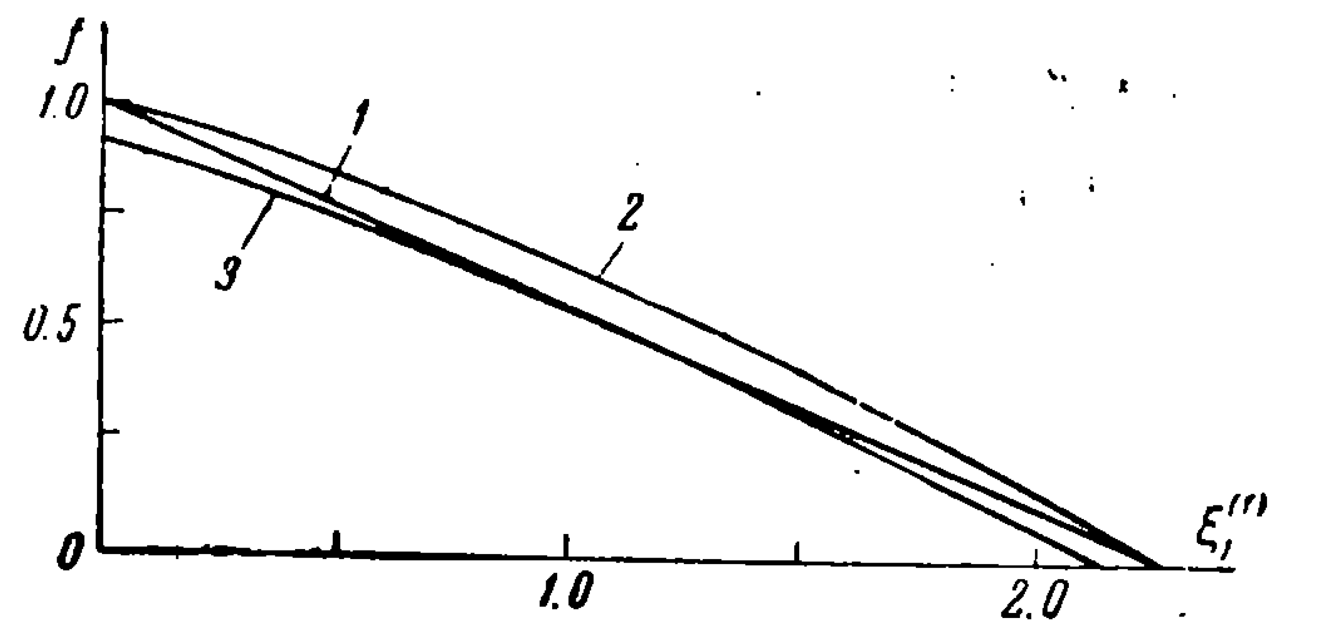
и условие (3.4) для функции $\rho_2(x,\ t)$ при $t > t_1$ будет соблюдено.

---

[1] Необходимо отметить, что в работе [3] имеется указание на возможность использования этой теоремы для оценки решений уравнения (2.1).

Площадь полосы, заключенной между кривыми *2* и *3*, на фигуре составляет примерно 15% от площади, лежащей под кривой *2*.

Отсюда следует $Q^{(1)} / Q^{(2)} \approx 1.15$, где $Q^{(1)}$и $Q^{(2)}$ — суммарные объемы жидкости, поступившей в пористую среду к моменту $t = t_1$ соответственно для $\rho^{(1)}$ и $\rho^{(2)}$. Поэтому при вычислении суммарного объема жидкости по любому из предельных вариантов ошибка не должна превышать 15%. Отсюда следует, что при соответствующей замене кривой *2* прямой линией ошибка достигнет порядка $7 \div 8\%$.



Отметим, что

$$Q^{(1)} / Q^{(2)} \to \varkappa^{-1/2} \approx 1.1 \quad \text{при } t \to \infty$$

Вполне аналогичным способом можно решить задачу и для более общего случая

$$\rho(0, t) = \begin{cases} \sigma_1 t & (t_1 \geqslant t \geqslant 0) \\ \sigma_2 (t + \tau)^{p_2} & (t \geqslant t_1,\ p_2 > 0) \end{cases}$$

Расчетов мы здесь не приводим. Отметим лишь, что $p_2 = 0.25$, $Q^{(1)} / Q^{(2)} \approx 1.08$ при $t = t_1$, т. е. погрешность прямолинейной аппроксимации будет порядка 4%.

4. Известно, что автомодельное решение уравнения (*2.1*)

$$\rho(x, t) = \rho_0 e^{\sigma t} f\left(\frac{x}{\sqrt{c^{-1} \rho_0 \sigma^{-1} e^{\sigma t}}}\right) \tag{4.1}$$

соответствующее экспоненциальному закону нарастания $\rho(0, t) = \rho_0 \exp(\sigma t)$ в нулевой плоскости [4], может быть аппроксимировано прямой

$$f(\xi) = 1 - \xi / \xi_0$$

Очевидно, можно, основываясь на этом, получить решение для случая, когда $\rho(0, t)$ — кусочно-гладкая функция, составленная из экспоненты и степенной зависимости.

Пусть при $0 < t < t_1$ плотность в нулевом сечении изменяется по степенному закону; при $t > t_1$ плотность изменяется по экспоненте $\rho(0, t) = \rho_0 \exp(\sigma t)$.

Рассмотрим решения $\rho^{(1)}$ и $\rho^{(2)}$, соответствующие следующим закономерностям роста величины плотности в нулевом сечении

$$\rho^{(1)}(0,t) = \rho_0 e^{\sigma t} \rho^{(2)}(0,t) = \varkappa \rho_0 e^{\sigma t} \qquad (\varkappa < 1)$$

Выбираем $\varkappa$ так, чтобы распределение плотности в конце первого этапа было заключено в полосе распределений $\rho^{(1)}(x, t_1)$ и $\rho^{(2)}(x, t_1)$; тогда, согласно [3], справедливы соотношения (3.3).

Поступила 21 VII 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. Гос., изд-во технико-теоретической лит-ры, М., 1952.
2. Баренблатт Г. И. Об автомодельных движениях сжимаемой жидкости в пористой среде. ПММ, 1952, т. XVI, вып. 6.
3. Баренблатт Г. И., Вишик М. И. О конечности скорости распространения в задачах нестационарной фильтрации жидкости и газа. ПММ, 1956, т. XX, вып. 3.
4. Баренблатт Г. И. О предельных автомодельных движениях в теории нестационарной фильтрации газа в пористой среде и теории пограничного слоя. ПММ, 1954, т. XVIII, вып. 4.