от 5 до $\infty$. Точная оценка погрешности метода Филона, вообще говоря, неизвестна. Можно думать, однако, что она определяется точно так же, как погрешность метода Симпсона, т. е. равна $1/15$ разности между значениями интеграла, сосчитанными и с удвоенным шагом. Все значения функции $F(k)$, приведенные в таблице, считались с шагом 0.1. Значение $F(k)$ при $k = 8.0$, вычисленное с шагом 0.2, оказалось равным — 0.0211. Поэтому можно полагать, что $F(8.0) = -0.0424 \pm 0.0014$.

В заключение выражаю свою благодарность А. М. Обухову за постановку задачи и обсуждения, а также Л. А. Дикому и В. И. Татарскому за полезные советы в процессе выполнения работы.

Поступила 26 IV 1960

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бэтчелор Дж. К. Теория однородной турбулентности. Изд-во иностр. лит. 1955.
2. Обухов А. М. Локальная структура атмосферной турбулентности. Докл. АН СССР, 1949, т. 67, № 4.
3. Обухов А. М., Яглом А. М. Микроструктура турбулентного потока. ПММ, 1951, т. XV, вып. 1.
4. Яглом А. М. О локальной структуре температурного поля турбулентного потока. Докл. АН СССР, 1949, т. 69, № 6.
5. Oberhettinger F. Tabellen zur Fourier Transformation. Springer — Verlag, 1957.
6. Татарский В. И. Теория флюктуационных явлений при распространении волн в турбулентной атмосфере, Изд-во АН СССР, М., 1959.
7. Каллистратова М. А. Экспериментальное исследование рассеяния звука на турбулентности в атмосфере. Докл. АН СССР, 1959, т. 125, № 1.
8. Трантер К. Дж. Интегральные преобразования в математической физике, ГИТТЛ, М., 1956, § 5.3.

---

# ЗАПОЛНЕНИЕ ПУЗЫРЬКОВ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Е. И. Забабахин

(Москва)

Рассматривается заполнение пустого сферического пузырька в жидкости с учетом ее вязкости. Обнаружено существование двух различных типов движения: пузырьки, начальный размер которых меньше критического, заполняются медленно за неограниченное время; заполнение больших пузырьков происходит быстро с неограниченной кумуляцией энергии в стадии фокусировки.

Для критического радиуса пузырька получена количественная формула.

Пусть в жидкости по каким-либо причинам возник пузырек, который в дальнейшем может вновь заполниться под действием окружающего давления. Задачу о заполнении сферического пузырька в невязкой несжимаемой жидкости рассмотрел Рэлей, в частности, он получил, что направленная к центру скорость его поверхности в конце заполнения неограниченно растет как $r^{-3/2}$, т. е. происходит неограниченная кумуляция энергии. Это явление считается возможной причиной быстрого износа гребных винтов и турбин, работающих в условиях кавитации: заполнение пузырьков на металлической поверхности может интенсивно ее разрушать.

Рассмотрим задачу Рэлея для вязкой жидкости. Такая постановка задачи больше соответствует фактическим условиям, хотя и она не дает точного описания явления, так как не учитывает сжимаемости жидкости, неизбежного наличия паров ее в пузырьке и возможной неустойчивости его формы.

Пусть в жидкости с плотностью $\varrho$, давлением $p_0$ (вдали от пузырька) и вязкостью $\eta$ возник сферический пузырек с радиусом $a$; давления внутри него нет, начальная скорость отсутствует.

Движение пузырька будет сферически симметричным, описывающие его уравнения Навье — Стокса имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{2u}{r}=0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}=0 \tag{1}$$

Здесь $u(r, t)$ — скорость, $p(r, t)$ — давление.

Вязкость в уравнения (1) не входит, так как в уравнениях в общем виде она представлена слагаемым

$$\eta\,(\text{grad div } \mathbf{u} - \text{rot rot } \mathbf{u})$$

которое в рассматриваемом случае тождественно равно нулю div $\mathbf{u} = 0$, так как жидкость несжимаема, rot $\mathbf{u} = 0$ из-за сферической симметрии.

На свободной поверхности пузырька нормальное напряжение $\sigma_{rr}$ отсутствует (граница с вакуумом), а так как $\sigma_{rr} = -p + 2\eta\, du/dr$, то

$$p_1 = 2\eta\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_1$$

т. е. вязкость вошла в граничное условие; здесь и в дальнейшем индексом 1 отмечены значения величин на границе. Вторым граничным условием будет

$$p = p_0 \qquad \text{при } r = \infty$$

Из (1) получаем

$$u(r, t) = \frac{q(t)}{r^2} \qquad (q(t) = u_1 r_1^2)$$

Подставляя это во второе уравнение (1) и интегрируя от $r_1$ до $\infty$ с учетом граничных условий для $p$, после несложных выкладок получаем

$$\frac{du_1}{dr_1}+\frac{3}{2}\frac{u_1}{r_1}+\frac{p_0}{\rho r_1 u_1}+\frac{4\nu}{r_1^2}=0 \qquad \left(\nu=\frac{\eta}{\rho}\right) \tag{2}$$

Здесь $\nu$ — кинематическая вязкость. Введем безразмерные переменные

$$\zeta=\frac{u_1}{\sqrt{p_0/\rho}}, \qquad \alpha=\frac{r_1 R}{a} \qquad \left(R=\frac{a}{\nu}\sqrt{\frac{p_0}{\rho}}\right)$$

где $R$ — число Рейнольдса; тогда уравнение (2) примет вид

$$\frac{d\zeta}{d\alpha}+\frac{3}{2}\frac{\zeta}{\alpha}+\frac{1}{\zeta\alpha}+\frac{4}{\alpha^2}=0 \tag{3}$$

Начальное условие имеем в виде $\zeta(R) = 0$ (т. е. $u_1(a) = 0$). Как видим, рассматриваемая задача имеет семейство решений, зависящее от числа $R$, одно из них с $R = \infty$ ($\nu = 0$) совпадает с решением Рэлея; для этого семейства вблизи фокуса скорость растет по закону $\zeta \sim \alpha^{-3/2}$.

Исследуем поведение скорости вблизи фокуса в случае отличной от нуля вязкости. Для исследования величины $\zeta^{-1}$ уравнение (3) представим в виде

$$\frac{d\zeta^{-1}}{d\alpha}=\frac{\zeta^{-2}}{\alpha}\left(\frac{3}{2}\zeta+\zeta^{-1}+\frac{4}{\alpha}\right) \tag{4}$$

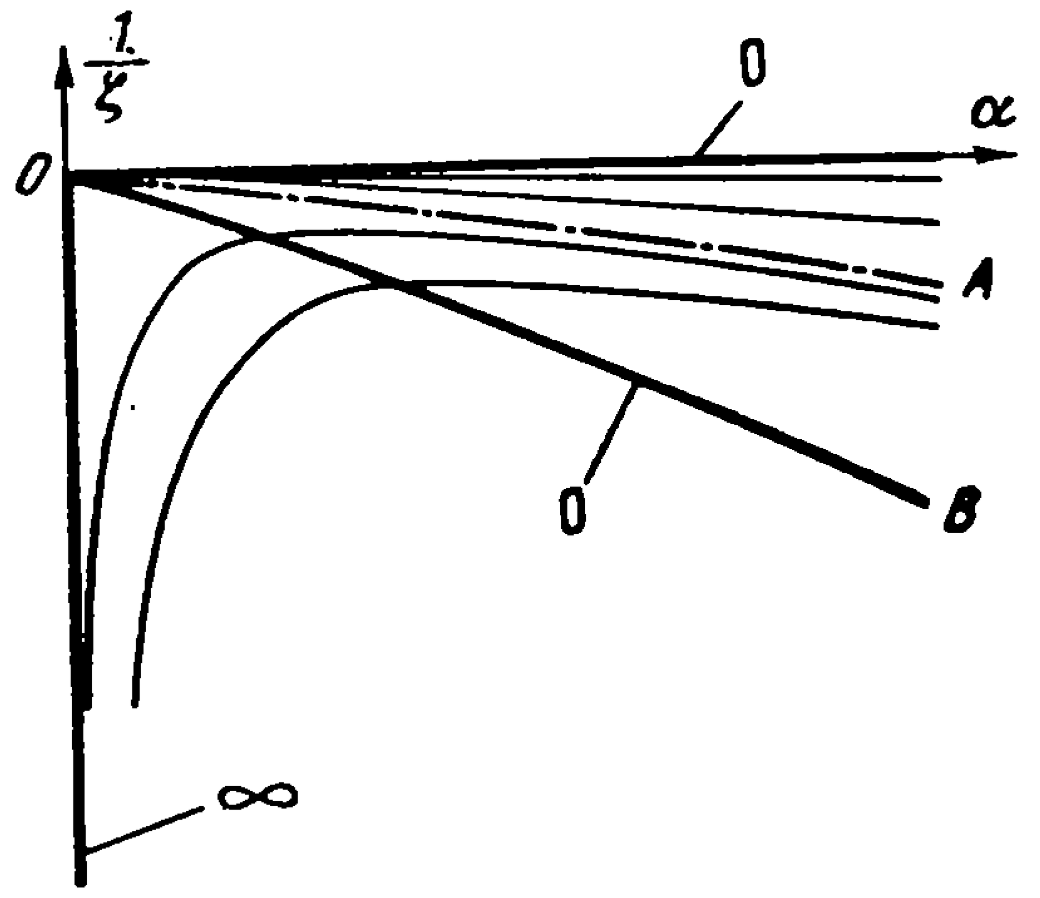
Точка ($\alpha = 0$, $\xi^{-1} = 0$) для этого уравнения является сложной особой точкой, показанной на фиг. 1.

Изоклины нулей и бесконечностей на фиг. 1 нанесены жирными линиями и отмечены значками $O$ и $\infty$, интегральные кривые — тонкими линиями. Показанная штрихпунктиром сепаратриса $OA$ есть единственная интегральная кривая, выходящая из начала координат с конечным наклоном; наклон ее $x$ определяется из (4) подстановкой туда решения $\xi^{-1} = x\cdot\alpha$ вблизи $\alpha = 0$ и составляет $x = -{}^1/_8$. Изоклина нулей $OB$

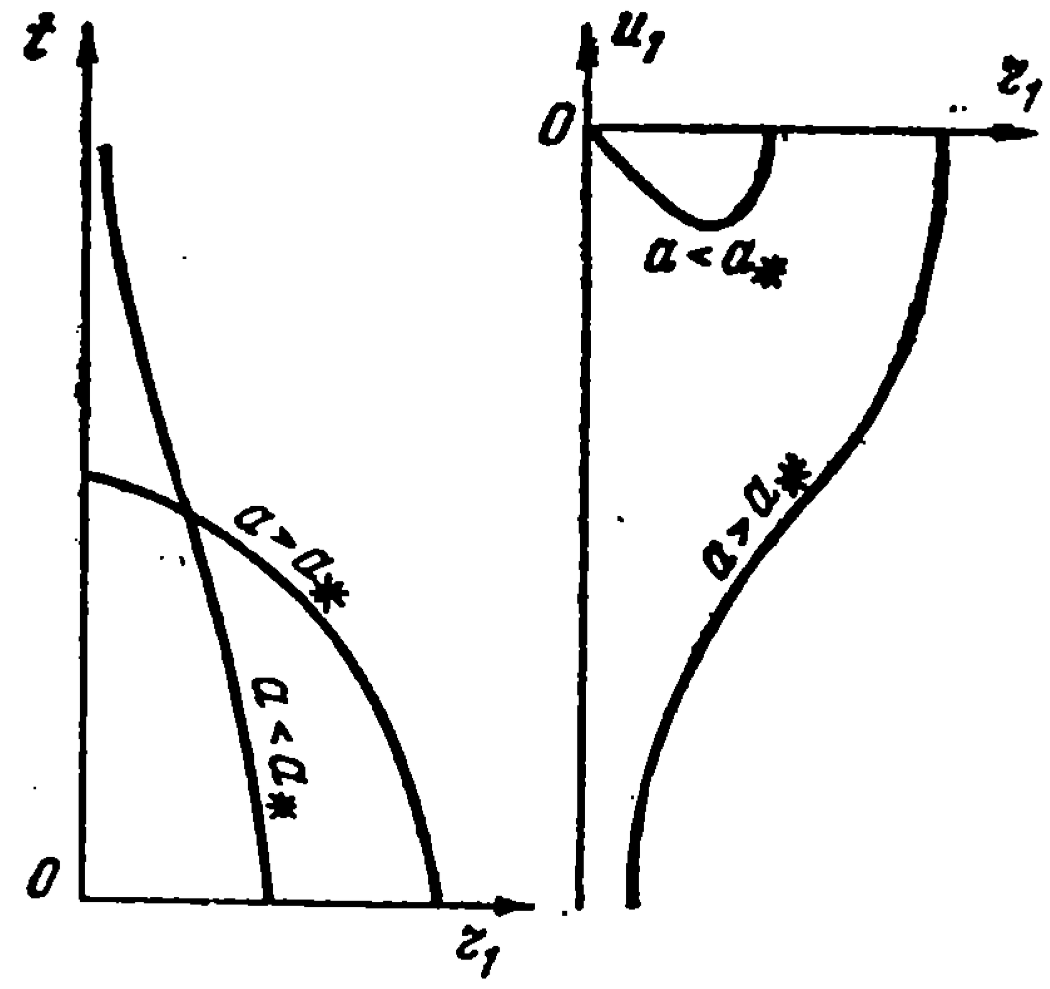
проходит ниже, наклон ее равен — $^3/_8$. Интегральные кривые выше $OA$ входят в узел, где $\zeta \sim \alpha^{-3/2}$, ниже $OA$ они образуют седло, причем

$$\zeta \to -\,{}^1/_4\,\alpha, \quad \text{или} \quad u_1 \to -\frac{r_1 p_0}{4\eta}$$

при $\alpha \to 0$. То и другое проверяется подстановкой в (4) при $\alpha \to 0$. Решению задачи соответствует та кривая, которая приходит в точку, соответствующую начальному условию, т. е. $\alpha = R$, $\zeta = 0$.




Фиг. 1




Фиг. 2

При разных числах $R$, вообще говоря, решения могут принадлежать к разным семействам: в случае принадлежности к узлу они соответствуют неограниченному воз растанию скорости $\zeta \sim \alpha^{-3/2}$, в случае седла — замедляющемуся движению пузырька с $\zeta \sim \alpha$, в результате которого заполнение его достигается лишь за неограниченное время.

В промежуточном случае, соответствующем сепаратрисе $OA$, заполнение достигается за конечное время и скорость в окрестности фокуса растет по закону $\zeta \sim \alpha^{-1}$. Соответствующее сепаратрисе число Рейнольдса является критическим, оно разграничивает два существенно различных класса решения. Критическое значение числа $R = R_*$ можно определить, построив сепаратрису от $\alpha = 0$ (вблизи этой точки асимптотическое представление ее известно: $\zeta = -\,{}^1/_8\,\alpha^{-1}$) до $\zeta = 0$, где $\alpha = R$. Построение ее, выполненное при помощи численного интегрирования (3), дает

$$R_* = 8.4 \qquad \left(R = \frac{a}{\nu}\sqrt{\frac{p_0}{\rho}}\right)$$

При $R < 8.4$ заполнение пузырька происходит медленно за неограниченно большое время; кумуляция энергии полностью устранена вязкостью.

При $R > 8.4$ скорость вблизи фокуса неограниченно растет, как в задаче Рэлея без вязкости), т. е. как const $r_1^{-3/2}$, но с меньшим значением | const |. В промежуточном случае при $R_* = 8.4$ пузырек заполняется за конечное время, скорость фокуса неограниченно растет, но слабее, как $r_1^{-1}$.

Схемы всех трех случаев движения показаны на фиг. 2. При заданных $p_0$, $\rho$ и $\nu$ можно говорить о критическом радиусе $a_*$ пузырька

$$a_* = 8.4\,\nu\sqrt{\frac{\rho}{p_0}}$$

При $a < a_*$ кумуляция полностью устраняется вязкостью.

Скорость в конце заполнения маленьких пузырьков

$$u_1 = -\frac{r_1 p_0}{4\eta}$$

не зависит от плотности и от их начального радиуса $a$. Практически критический радиус $a_*$ весьма мал, т. е. вязкость устраняет кумуляцию в пузырьках только очень малого размера, например, при $p_0 = 1$ *атм* $= 10^6$ *бар* для воды ($\nu = 0.01$, $\rho = 1$) $a_* = 0{,}8$ микрона для глицерина ($\nu = 6{,}8$, $\rho = 0{,}8$) $a_* = 0{,}5$ *мм*.

Поступила 7 V 1960