

О СТРУКТУРЕ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ОБЛАСТИ МАЛЫХ МАСШТАБОВ

Г. С. Голицын

(Москва)

1. Поведение спектра турбулентности в области больших волновых чисел, соответствующих интервалу вязкой диссипации, исследовалось в ряде работ, однако до сих пор этот вопрос нельзя считать решенным. Этот вопрос эквивалентен исследованию структурной функции скорости для малых расстояний, так как структурная функция

$$D_{ij}(r) = \overline{[v_i(M) - v_i(M')][v_j(M) - v_j(M')]}$$

где r — расстояние между точками наблюдения M и M' , связана со спектральным тензором $\Phi_{ij}(\kappa)$ соотношением

$$D_{ij}(r) = 2 \iiint_{-\infty}^{\infty} (1 - e^{i\kappa r}) \Phi_{ij}(\kappa) d\kappa \quad (1)$$

Тензор Φ_{ij} определяется единственной скалярной функцией — спектральной плотностью $E(\kappa)$

$$\Phi_{ij}(\kappa) = \frac{E(\kappa)}{2\pi\kappa^2} \left(\delta_{ij} - \frac{\kappa_i\kappa_j}{\kappa^2} \right) \quad (2)$$

В связи с тем, что современная статистическая теория турбулентности не располагает замкнутой системой уравнений для моментов, которая в принципе позволила бы решить данные вопросы, приходится прибегать к различного рода гипотезам, позволяющим приближенно замкнуть систему уравнений для моментов. Подробный обзор такого рода гипотез можно найти в книге Бэтчелора [1].

Спектр турбулентности известен только в инерционном интервале при значениях волновых чисел, много меньших чисел, соответствующих внутреннему масштабу турбулентности. В этом интервале спектральная плотность $E(\kappa)$ падает с ростом волнового числа, как $\kappa^{-5/3}$. В области внутреннего масштаба, где сказывается действие вязкости, интенсивность турбулентных пульсаций сильно ослабляется, и спектр должен падать гораздо быстрее. Поведение структурной функции флуктуаций скорости известно как для больших, так и для малых масштабов по сравнению с внутренним масштабом $r_0 = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$, где ν — кинематическая вязкость, ε — диссипация энергии турбулентного движения на единицу массы. Если $r \gg r_0$, то инвариант структурного тензора D_{ij} — его след, растет с ростом r , как $r^{2/3}$. При $r \ll r_0$ след $D_{ii} \sim r^2$. Первая попытка определения структурной функции во всем интервале масштабов была сделана А. М. Обуховым [2, 3], который использовал гипотезу о постоянстве асимметрии

$$S = D_{lll}(r) / [D_{ll}(r)]^{3/2} = \text{const}, \quad D_{lll} = \overline{[v_e(M) - v_e(M')]^3} \quad (3)$$

Индекс l означает проекцию на направление r . В инерционном интервале $D_{lll} \sim r$, а $D_{ll} \sim r^{2/3}$, так что там действительно $S = \text{const}$. При $r \ll r_0$ роль третьих моментов невелика, и данная гипотеза не может сильно исказить результаты. В итоге была получена структурная функция, имеющая правильный асимптотический вид для больших и малых расстояний. Однако не всякая функция, даже если она имеет правильное асимптотическое представление, может быть структурной.

Основное требование к структурной функции состоит в том, чтобы соответствующий ей спектр, точнее спектральная плотность, была положительной при всех значениях волновых чисел, так как она в волновом пространстве представляет плотность кинетической энергии на единицу массы. Вообще говоря, заранее не ясно, удовлетворяет ли структурная функция А. М. Обухова этому требованию. Ниже в работе приведен расчет спектра при гипотезе постоянства асимметрии и показано, что при некоторых значениях волновых чисел спектр имеет отрицательные значения. В заключение вычислены структурные функции, соответствующие различным видам убывания спектра для больших волновых чисел, откуда будет видно, что характер спектра в этой области не очень сильно влияет на вид структурной функции в соответствующем интервале.

2. Гипотеза о постоянстве асимметрии позволяет из уравнения А. Н. Колмогорова [2, 3] получить уравнение для определения структурной функции

$$\beta' + \left(\frac{4}{3}\beta\right)^{3/2} = x$$

где $\beta(x)$ — нормированная продольная структурная функция (компоненты скорости взяты по направлению r), а x — длина, взятая в определенном масштабе. Нормировка здесь следующая:

$$r = k_1 \left(\frac{v^3}{\varepsilon}\right)^{1/4} x, \quad D_{11} = k_2 (v\varepsilon)^{1/2} \beta(x)$$

$$k_1 = \left(\frac{5}{2}\right)^{1/4} \frac{4}{|S|} \approx \frac{5.035}{|S|}, \quad k_2 = \left(\frac{2}{45}\right)^{1/4} \frac{4}{|S|} \approx \frac{1.838}{|S|}$$

Значение $x = 1$ приблизительно отвечает внутреннему масштабу турбулентности. При $x \ll 1$ $\beta \approx 1/2 x^2$, при $x \gg 1$ $\beta \approx (3/4) x^{2/3}$. В промежуточной области уравнение (4) интегрировалось численно, графики функции $\beta(x)$ приведены в [2, 3].

Предположим на время, что турбулентность не только локально однородна, но и просто однородна. Тогда справедливы разложения

$$R_{ij}(\mathbf{r}) = \iiint_{-\infty}^{\infty} \Phi_{ij}(\boldsymbol{\kappa}) e^{i\boldsymbol{\kappa}\mathbf{r}} d\boldsymbol{\kappa} \quad (5)$$

$$\Phi_{ij}(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{1}{8\pi^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} R_{ij}(\mathbf{r}) e^{-i\boldsymbol{\kappa}\mathbf{r}} d\mathbf{r} \quad (6)$$

где $R_{ij}(\mathbf{r})$ и $\Phi_{ij}(\boldsymbol{\kappa})$ — корреляционная функция и соответствующий ей спектр. Применим к разложению (5) оператор Лапласа, а затем к результату — преобразование Фурье, тогда получим

$$-\boldsymbol{\kappa}^2 \Phi_{ii}(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{1}{8\pi^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} \Delta R_{ii}(\mathbf{r}) e^{-i\boldsymbol{\kappa}\mathbf{r}} d\mathbf{r} \quad (7)$$

Совершая ряд преобразований, использующих условия изотропии и неразрывности, и осредняя по углам, можно получить следующую формулу для спектральной плотности:

$$\boldsymbol{\kappa} E(\boldsymbol{\kappa}) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (r^2 f''' + 7rf'' + 8f') \sin(\boldsymbol{\kappa}r) dr \quad (8)$$

где f — продольная корреляционная функция. Используем далее тот факт, что производная корреляционной функции равна производной структурной функции, умноженной на $(-1/2)$. Так как в формулу (8) входят только производные, то она будет верна и для случая локально однородной турбулентности. Произведя нормировку, указанную выше, получим

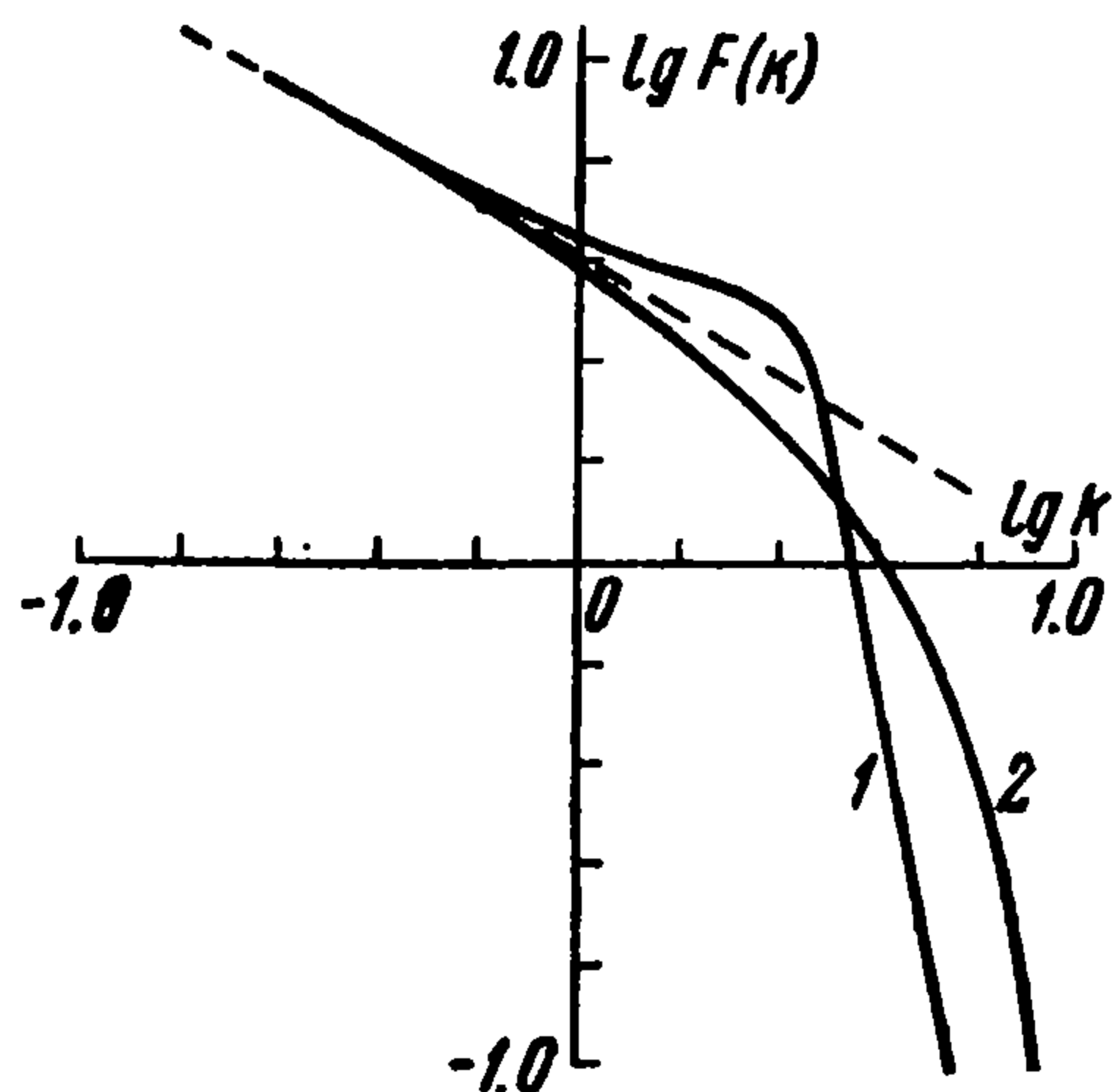
$$F(k) \equiv CkE(k) = \int_0^{\infty} (x^2 \beta''' + 7x\beta'' + 8\beta') \sin(kx) dx \quad (9)$$

где C — некоторая константа, определяемая масштабными множителями, а функция $\beta(x)$ определяется уравнением (4). Левая часть этого выражения является универсальной функцией нормированного волнового числа k .

Приводим некоторые результаты численного интегрирования выражения (9); способ интегрирования дан ниже в приложении.

k	$=$	0.5	1.0	2.0	5.0	7.5	8.0
$F(k)$	$=$	6.1241	4.2704	3.6238	0.1725	-0.0034	-0.0424
k	$=$	8.5	9.0	3π	5π	10π	20π
$F(k)$	$=$	-0.0097	0.0029	0.0124	0.0000	-0.0001	0.0000

Впервые $F(k)$ переходит через нуль при $k \approx 6.5$. Точность расчета вблизи $k = 8$ оценивается в $1 \div 2$ единицы третьего знака после запятой (см. приложение). Таким образом, результаты расчета свидетельствуют о том, что спектр турбулентности при гипотезе постоянства асимметрии становится отрицательным при некоторых значениях волновых чисел, хотя эти отрицательные значения относительно невелики. Довольно уверенный нуль для $F(k)$ при больших волновых числах подтверждает теоретические представления о быстром убывании спектра в области, соответствующей интервалу вязкой диссипации, а также служит указанием на достаточную точность и надежность довольно сложной системы расчета функции $F(k)$.



Фиг. 1

На фиг. 1 приведен график $F(k)$ в логарифмическом масштабе — кривая 1; кривая 2 — спектр, сглаженный по Гауссу (см. далее (10)). При $k \ll 1$ справедливо асимптотическое разложение

$$F(k) = \frac{55\sqrt{3}}{24} \Gamma\left(\frac{5}{3}\right) k^{-5/3} \approx 3.584k^{-5/3}.$$

Эта асимптота изображена на фигуре пунктирной прямой. Расчетные точки при $k < 1$ хорошо ложатся на эту прямую. При $k \geq 1$ функция $F(k)$ идет выше асимптотической линии, что указывает на более медленное, чем $k^{-5/3}$, спадание спектральной плотности $E(k)$. Это также не свидетельствует в пользу гипотезы о постоянстве асимметрии.

Аналогичные вычисления были проделаны для спектра пульсаций температуры, соответствующего структурной функции, определяемой уравнением А. М. Яглома [4], при гипотезах постоянства асимметрии для пульсаций скорости и постоянства коэффициента

$$N = D_{uu}(r) / D_{tt}(r) \sqrt{D_{ll}(r)}$$

$$D_{ll} = \overline{[v_l(M) - v_l(M')] [T(M) - T(M')]^2}$$

Здесь D_{ll} и D_{tt} — структурные функции скорости и температуры. Полученный спектр также имеет отрицательные участки.

3. Структурные функции для всего интервала масштабов можно построить, задавая спектр турбулентности, который будет положительным всюду. Форма спектра известна только для $k \ll 2\pi/r_0$. При $k \gg 2\pi/r_0$ спектр быстро спадает до нуля, так как интенсивность пульсаций скорости в этих масштабах сильно падает из-за действия вязкости. Убывание спектра по какому-либо степенному закону вызывает большие сомнения, так как это означало бы, что не существуют некоторые старшие производные скорости. Если предположить, что существуют все производные скорости, то отсюда легко заключить, что спектр с ростом k убывает быстрее всякой степени k . Наиболее простой формой спектра, имеющей вместе с тем некоторое теоретическое основание, является следующая:

$$E(k) = A \varepsilon^{5/3} k^{-5/3} \exp\left(\frac{-\alpha^2 k^2}{k_0^2}\right), \quad k_0 = 2\pi \left(\frac{\varepsilon}{\nu^3}\right)^{1/4} \quad (10)$$

где A и α — некоторые константы, которые будут уточнены далее. При $k \ll k_0$ выражение (10) дает нужную форму спектра. Поскольку уравнение Навье — Стокса параболического типа, то пульсации скорости, генерируемые крупномасштабными вихрями, будут сглаживаться в мелких масштабах гауссовой функцией (или близкой к ней), что в какой-то степени оправдывает выражение (10).

Для следа структурного тензора D_{ii} имеем спектральное разложение (получаемое из (1) осреднением по углам)

$$D_{ii}(r) = A \varepsilon^{5/3} \int_0^\infty \left(1 - \frac{\sin kr}{kr}\right) k^{-5/3} e^{-\frac{\alpha^2 k^2}{k_0^2}} dx \quad (11)$$

Перейдем к безразмерным переменным

$$\kappa r_0 = k \quad r = x r_0, \quad D_{ii}(r) = \sqrt{\nu \varepsilon} d_{ii}(x)$$

Тогда

$$d_{ii}(x) = A \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{\sin kx}{kx}\right) k^{-5/3} e^{-\alpha^2 k^2} dk \quad (11')$$

Параметрами A и α распорядимся таким образом, чтобы главные члены асимптотических разложений при $x \ll 1$ и $x \gg 1$ совпадали с соответствующими разложениями следа структурного тензора, вычисленного при гипотезе постоянства асимметрии. При этом для обеих структурных функций одинаков внутренний масштаб, определяемый как абсцисса точки пересечения асимптот. Интеграл (11') вычисляется при помощи известного интеграла [5]

$$\int_0^{\infty} x^{\lambda-1} e^{-ax^2} \sin(kx) dx = \frac{1}{2} a^{-\frac{\lambda+1}{2}} \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right) M\left(\frac{\lambda+1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{k^2}{4a}\right) \quad (\lambda > 0)$$

где M — вырожденная гипергеометрическая функция, и принципа аналитических продолжений на нужные нам значения λ . В результате получаем

$$d_{ii}(x) = \frac{9}{2} A \alpha^{5/3} \Gamma\left(\frac{5}{3}\right) \left[M\left(-\frac{1}{3}; \frac{3}{2}; -\frac{x^2}{4\alpha^2}\right) - 1 \right] \quad (12)$$

Асимптотические разложения следа структурного тензора β_{ii} находятся при помощи соотношений

$$\beta_{ii} = \beta_{ll} + 2\beta_{nn}, \quad \beta_{nn} = \frac{1}{2x} \frac{d^2}{dx^2} (x^2 \beta_{ll})$$

где β_{ll} и β_{nn} — продольная и поперечная структурные функции. Несколько первых членов разложения β_{ll} при $x \gg 1$ приведено в [3]. Разложение β_{ll} при $x \ll 1$ можно найти, интегрируя уравнение (4) рядами. Главные члены разложений следующие:

$$\beta_{ii} \approx \frac{11}{4} x^{3/2} \quad \text{при } x \gg 1, \quad \beta_{ii} \approx \frac{5}{2} x^2 \quad \text{при } x \ll 1$$

Используя известные разложения вырожденной гипергеометрической функции, можно подобрать параметры A и α так, чтобы совпадали главные члены асимптотических разложений.

Одновременно была вычислена структурная функция, соответствующая спектру, предложенному В. И. Татарским [6]

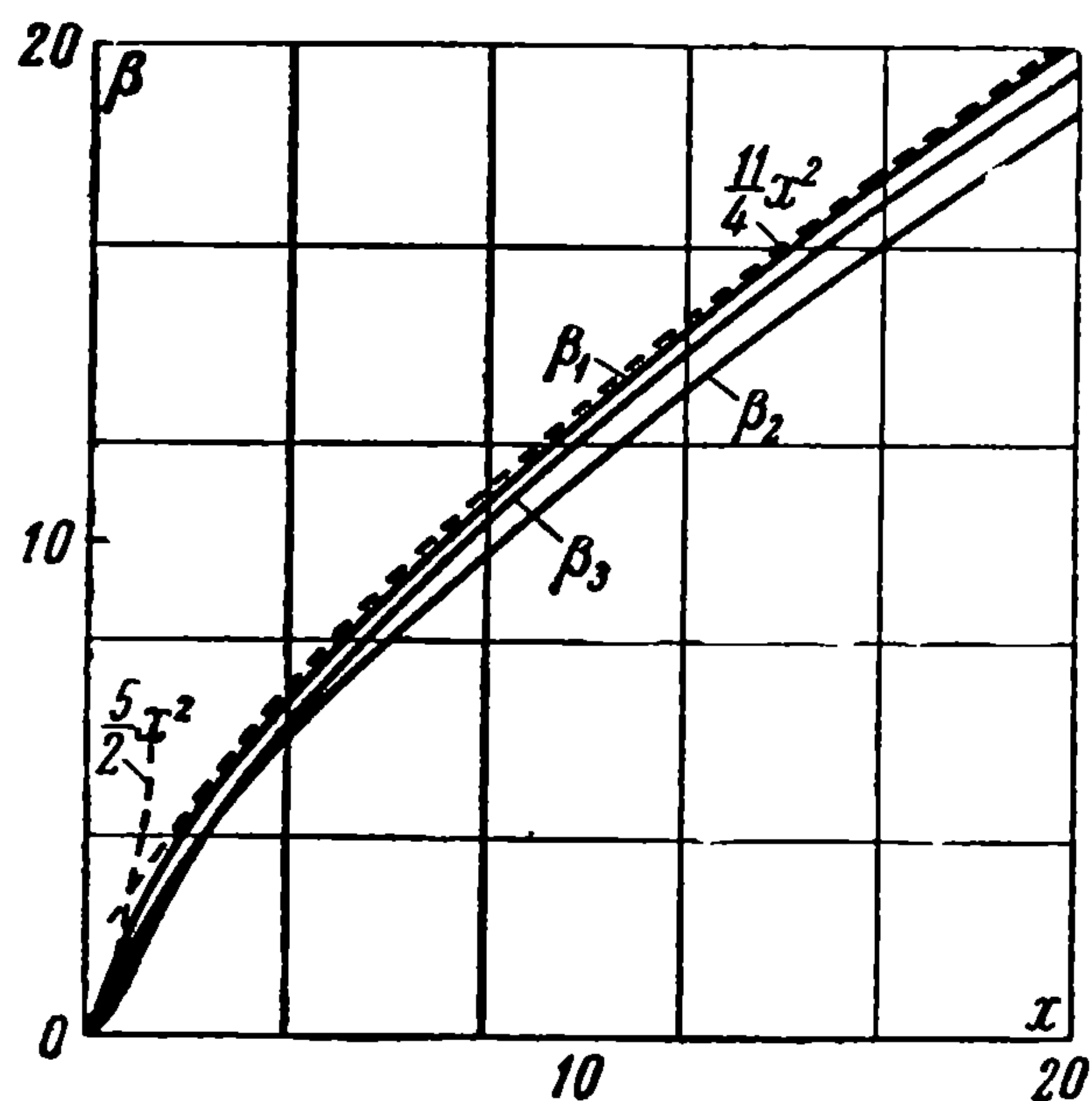
$$E(\kappa) = \begin{cases} B \varepsilon^{2/3} \kappa^{-5/3} & (\kappa \leq \kappa_m) \\ 0 & (\kappa > \kappa_m) \end{cases} \quad (13)$$

Соответствующий след структурного тензора также может быть вычислен и удовлетворен выбором параметров B и κ_m необходимым требованиям в смысле асимптотических разложений.

Результаты вычислений для трех разных структурных функций следующие:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 2.5x^2 (1 - 0.436x^2 + 0.765x^4), \\ \beta_2 &= 2.5x^2 (1 - 1.034x^2 + 1.274x^4), \quad \text{при } x \leq 1 \\ \beta_3 &= 2.5x^2 (1 - 1.184x^2 + 1.042x^4), \\ \beta_1 &= 2.75x^{2/3} (1 - 0.2121x^{-4/3} + O(x^{-8/3})) \\ \beta_2 &= 2.75x^{2/3} (1 - 0.5370x^{-2/3} + O(x^{-10/3})) \quad \text{при } x \gg 1 \\ \beta_3 &= 2.75x^{2/3} (1 - 0.1844x^{-2/3} + 0.0021 \sin(7.693x) x^{-4/3} + O(x^{-7/3})) \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь β_1 — структурная функция, вычисленная при гипотезе постоянства асимметрии, β_2 — структурная функция, соответствующая спектру, сглаженному по Гауссу, β_3 соответствует спектру В. И. Татарского. Эти структурные функции изображены на фиг. 2.



Фиг. 2

Функция β_3 имеет при $x \gg 1$ небольшие осцилляции, возникшие благодаря резкому обрыву спектра, но на фигуре эти осцилляции изобразить затруднительно.

Как видно из фигуры, характер убывания спектра при больших волновых числах не очень сильно сказывается на виде структурных функций.

До сих пор экспериментально не удалось подойти очень близко к внутреннему масштабу турбулентности.

Однако новые методы исследования, как, например, рассеяния звука в турбулентной атмосфере [7], позволяют надеяться, что спектр турбулентности может быть непосредственно измерен и в области, где

уже сказывается действие вязкости. Эксперимент решит тогда, какая из моделей ближе к природе.

Приложение. Опишем вычисления функции

$$F(k) = \int_0^{\infty} (x^2 \beta''' + 7x\beta'' + 8\beta') \sin(kx) dx \equiv \int_0^{\infty} f(x) \sin(kx) dx$$

В принципе, зная функцию $\beta(x)$, по уравнению (4) можно определить и все необходимые ее производные. Однако функция $\beta(x)$ известна в виде таблицы с небольшим числом знаков и определение даже первой ее производной этим способом приводит к большой ошибке. Поэтому пришлось пойти по другому пути.

Для $x \ll 1$ и $x \gg 1$ были найдены асимптотические разложения.

$$f(x) = 15x - \frac{68}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} x^3 + \frac{20}{3} x^5 + O(x^7) \quad (x \ll 1)$$

$$f(x) = \frac{55}{18} x^{-1/3} + \frac{7}{54} x^{-5/3} + \frac{7}{36} x^{-3} + O(x^{-13/3}) \quad (x \gg 1)$$

Эти разложения использовались при $x \leq 0.5$ и $x \geq 5.0$. Для производной $\beta'(x) \equiv y(x)$ из (4) получаем уравнение

$$y' = 1 - 2y(x - y)^{1/2}$$

Сделаем замену: $y = x - v^{3/2}$. Тогда для $v(x)$ получим более простое уравнение

$$v' = \frac{4}{3} (x - v^{3/2})$$

которое и интегрировалось методом Рунге — Кутты для значений x от 0.5 до 5.0. Связь β'' и β''' с $v(x)$ дается соотношениями

$$\beta''(x) = 1 - 2v^{1/2}y, \quad \beta'''(x) = 4vy - 2v^{1/2} - \frac{4}{3}y^2v^{-1/2}$$

В результате

$$f(x) = 8y + 7x(1 - 2v^{1/2}y) + x^2(4vy - 2v^{1/2} - \frac{4}{3}y^2v^{-1/2})$$

Точность вычисления этого выражения в указанном интервале является уже удовлетворительной.

Для вычисления функции $F(k)$ при различных значениях k был использован метод Филона [8], который представляет собой модификацию метода Симпсона на случай быстро осциллирующих тригонометрических функций. Этот метод использовался для значений x от 0 до 5, и так как для $f(x)$ асимптотическое представление известно, то нетрудно вычислить асимптотическое представление для интеграла

от 5 до ∞ . Точная оценка погрешности метода Филона, вообще говоря, неизвестна. Можно думать, однако, что она определяется точно так же, как погрешность метода Симпсона, т. е. равна $1/15$ разности между значениями интеграла, сосчитанными и с удвоенным шагом. Все значения функции $F(k)$, приведенные в таблице, считались с шагом 0.1. Значение $F(k)$ при $k = 8.0$, вычисленное с шагом 0.2, оказалось равным -0.0211 . Поэтому можно полагать, что $F(8.0) = -0.0424 \pm 0.0014$.

В заключение выражаю свою благодарность А. М. Обухова за постановку задачи и обсуждения, а также Л. А. Дикому и В. И. Татарскому за полезные советы в процессе выполнения работы.

Поступила 26 IV 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Бэтчелор Дж. К. Теория однородной турбулентности. Изд-во иностр. лит. 1955.
2. Обухов А. М. Локальная структура атмосферной турбулентности. Докл. АН СССР, 1949, т. 67, № 4.
3. Обухов А. М., Яглом А. М. Микроструктура турбулентного потока. ПММ, 1951, т. XV, вып. 1.
4. Яглом А. М. О локальной структуре температурного поля турбулентного потока. Докл. АН СССР, 1949, т. 69, № 6.
5. Oberhettinger F. Tabellen zur Fourier Transformation. Springer — Verlag, 1957.
6. Татарский В. И. Теория флюктуационных явлений при распространении волн в турбулентной атмосфере, Изд-во АН СССР, М., 1959.
7. Каллистратова М. А. Экспериментальное исследование рассеяния звука на турбулентности в атмосфере. Докл. АН СССР, 1959, т. 125, № 1.
8. Трантер К. Дж. Интегральные преобразования в математической физике, ГИТТЛ, М., 1956, § 5.3.

ЗАПОЛНЕНИЕ ПУЗЫРЬКОВ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Е. И. Забабахин

(Москва)

Рассматривается заполнение пустого сферического пузырька в жидкости с учетом ее вязкости. Обнаружено существование двух различных типов движения: пузырьки, начальный размер которых меньше критического, заполняются медленно за неограниченное время; заполнение больших пузырьков происходит быстро с неограниченной кумуляцией энергии в стадии фокусировки.

Для критического радиуса пузырька получена количественная формула.

Пусть в жидкости по каким-либо причинам возник пузырек, который в дальнейшем может вновь заполниться под действием окружающего давления. Задачу о заполнении сферического пузырька в невязкой несжимаемой жидкости рассмотрел Рэлей, в частности, он получил, что направленная к центру скорость его поверхности в конце заполнения неограниченно растет как $r^{-3/2}$, т. е. происходит неограниченная кумуляция энергии. Это явление считается возможной причиной быстрого износа гребных винтов и турбин, работающих в условиях кавитации: заполнение пузырьков на металлической поверхности может интенсивно ее разрушать.

Рассмотрим задачу Рэля для вязкой жидкости. Такая постановка задачи больше соответствует фактическим условиям, хотя и она не дает точного описания явления, так как не учитывает сжимаемости жидкости, неизбежного наличия паров ее в пузырьке и возможной неустойчивости его формы.

Пусть в жидкости с плотностью ρ , давлением p_0 (вдали от пузырька) и вязкостью η возник сферический пузырек с радиусом a ; давления внутри него нет, начальная скорость отсутствует.