ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Б. А. Костандян (Москва)

Имеется много путей исследования устойчивости нелинейного уравнения теплопроводности. В работе Беллмана [1] рассматривается эта задача для области в виде параллелепипеда; Млак [2] рассматривал более общую задачу для систем параболического типа. Некоторую литературу по этой проблеме можно найти в работах [1,2].

В работе рассматривается устойчивость решения нелинейного уравнения теплопроводности в пространстве C_{L_2}. С помощью некоторых идей второго метода Ляпунова получены достаточные условия асимптотической устойчивости.

Пусть G — ограниченная область в пространстве $E^m(x_1, \ldots, x_m)$. Границу G обозначим через Г. Рассмотрим следующую задачу для уравнения нелинейной теплопроводности в области G для $0 < t < \infty$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \triangle u + f(x, t, u), \qquad u = 0 \quad \text{на } \Gamma, \qquad u = \varphi(x) \quad \text{при } t = 0 \tag{1}$$

Здесь $\triangle$ — оператор Лапласа в области G, а f — интенсивность распределенных по области источников, причем $f(x, t, u) = o(u)$ при $u \to 0$.

Пусть $M = \{u(x, t)\}$ — множество непрерывных функций, обладающих непрерывными производными $\partial u / \partial t$ и $\partial^2 u / \partial x_i \partial x_j$. Вводя норму [3]

$$\| u \| = \left(\int_G u^2(x, t)\, d\Omega \right)^{1/2} \tag{2}$$

получим нормированное пространство, которое обозначим C_{L_2}. Если $\varphi(x) \equiv 0$, то задача имеет тривиальное решение $u = 0$. Представляет интерес, при каких условиях можно гарантировать, что решение задачи (1) стремится к нулю при $t \to \infty$. Стремление к нулю понимается по норме C_{L_2}.

Определение. Нулевое решение задачи (1) устойчиво, если для любого положительного числа ε существует δ такое, что $\|u\| \leqslant \varepsilon$ при $t > 0$, если $u = 0$ на Г и $\|u(x, 0)\| \leqslant \delta$.

Ищем решение задачи (1) в виде

$$u(x, t) = a_1(t) z_1(x) + a_2(t) z_2(x) + \ldots \tag{3}$$

где $a_i(t)$ пока неопределенные коэффициенты, зависящие от времени, а $z_i(x)$ — собственные функции оператора $\triangle z + \lambda z = 0$ в G при граничных условиях $z = 0$ на контуре Г. Как видно из (3), граничное условие удовлетворяется автоматически. Если подставить (3) в уравнение (1), то решение задачи приводится к решению бесконечной системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Подставляя (3) в (1) и имея в виду свойства функций z_i, т. е. $\triangle z_i = -\lambda_i z_i$, получим

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{da_i}{dt} + \lambda_i a_i \right) z_i = f(x, t, u) \tag{4}$$

где в правой части вместо u подразумевается выражение (3).

Можно предположить, что система собственных функций $\{z_i\}$ ортонормирована. Умножая обе части (4) на z_j и интегрируя по области G, получим

$$\frac{da_j}{dt} + \lambda_j a_j = \int_G f(x, t, u) z_j\, d\Omega \qquad (j = 1, 2, \ldots) \tag{5}$$

Положим $a_i(t) = e^{-\beta t} b_i(t)$. Система (5) для новых переменных $b_i(t)$ будет

$$\frac{db_j(t)}{dt} = (-\lambda_j + \beta) b_j + e^{\beta t} \int_G f\left(x, t, e^{-\beta t} \sum_{i=1}^{\infty} b_i z_i\right) z_j\, d\Omega \qquad (j = 1, 2, \ldots) \tag{6}$$

Рассмотрим знакоопределенную функцию

$$V = \frac{1}{2} [b_1^2(t) + b_2^2(t) + \ldots] \tag{7}$$

Полная производная функции V по t, взятая в предположении, что переменные $b_i(t)$ удовлетворяют бесконечной системе дифференциальных уравнений (6), будет

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{j=1}^{\infty}(-\lambda_j + \beta)\, b_j^2 + e^{\beta t}\int\limits_G f\Big(x,\ t,\ e^{-\beta t}\sum_{i=1}^{\infty} b_i z_i\Big)\Big(\sum_{j=1}^{\infty} b_j z_j\Big)\, d\Omega \qquad (8)$$

Предположим, что функция $f(x, t, u)$ удовлетворяет следующему условию

$$|f(x,\ t,\ u)| \leqslant \alpha(t)\, \|u\|_{C_{L_2}}\, |u| \qquad (9)$$

равномерно по $x \in G$; где $\alpha(t)$ — положительная функция, такая, что, начиная с некоторого момента $\alpha(i)\, e^{-\beta t}$, не возрастает.

Используя (9) для производной функции V, получим

$$\frac{dV}{dt} \leqslant 2(-\lambda_{\min} + \beta)\, V + e^{\beta t}\alpha(t)\, \|u\| \int\limits_G |u| \,\Big|\sum_{i=1}^{\infty} b_i z_i\Big|\, d\Omega$$

Здесь $\lambda_{\min}$ — наименьшее собственное число оператора $\Delta z + \lambda z = 0$ в области G и $z = 0$ на контуре Γ. Имея в виду, что

$$|u| = e^{-\beta t}\Big|\sum_{i=1}^{\infty} b_i z_i\Big|, \qquad \|u\| = \sqrt{2}\, e^{-\beta t} V^{1/2}$$

получим

$$\frac{dV}{dt} \leqslant 2(-\lambda_{\min} + \beta)\, V + \sqrt{2}\,\alpha(t)\, e^{-\beta t} V^{1/2} \int\limits_G \Big(\sum_{i=1}^{\infty} z_i b_i\Big)^2 d\Omega \qquad (10)$$

или, что то же самое,

$$\frac{dV}{dt} \leqslant 2(-\lambda_{\min} + \beta)\, V + 2\sqrt{2}\, e^{-\beta t}\alpha(t)\, V^{3/2} \qquad (11)$$

Предположим, что $e^{-\beta t}\alpha(t)$, начиная с некоторого $t = t_0$, не возрастает. Пусть в момент $t = t_0$

$$b_1^2(t_0) + b_2^2(t_0) + \ldots \leqslant \varepsilon, \qquad \sqrt{2}\,\alpha(t_0)\, e^{-\beta t_0}[V(t_0)]^{1/2} \leqslant \eta \qquad (12)$$

Имея в виду, что $V(t_0) \leqslant {}^1/_2\,\varepsilon$, и выбирая ε настолько малым, чтобы имело место неравенство $-\lambda_{\min} + \beta + \eta \leqslant 0$, получим $(dV/dt)_{t=t_0} \leqslant 0$, и поэтому неравенство (12) не нарушается и для $t > t_0$.

Используя неравенство (12), из (11) получим

$$\frac{dV}{dt} \leqslant 2(-\lambda_{\min} + \beta + \eta)\, V, \quad t > t_0$$

Если $\lambda_{\min} \geqslant \beta + \eta$, то производная определенно положительной функции V отрицательная, и, значит, функция V, начиная с $t = t_0$, не возрастает. Следовательно, все решения системы (6), попав в область (12), в дальнейшем не выходят из этой области. Так как

$$\|u\| = \sqrt{2}\, e^{-\beta t} V^{1/2}, \qquad \text{то} \qquad \|u\| \to 0 \ \text{при}\ t \to \infty$$

Предположим, что в окрестности нулевого решения для конечного отрезка $0 \leqslant t \leqslant T$ $(T \geqslant t_0)$ имеет место единственность решения. Тогда существует область начальных значений $b_1^2(0) + b_2^2(0) \ldots \leqslant \delta$ $(\delta > 0)$ при $t = 0$ такая, что все решения системы (6), выходящие из этой области, попадают в область $b_1^2(t_0) + b_2^2(t_0) + \ldots \leqslant \varepsilon$ при $t = t_0$. Каждой системе $\{b_i(0)\}$ соответствует начальная функция $\varphi(x)$, причем $\|\varphi(x)\|^2 = b_1^2(0) + b_2^2(0) + \ldots$, где $b_i(0)$ коэффициенты Фурье элемента $\varphi(x)$.

Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

Норма решения задачи (1) в пространстве C_{L_2} асимптотически стремится к нулю при $t \to \infty$, если:

а) функция $f(x, t, u)$ в правой части уравнений (1) удовлетворяет условию

$$|f(x,\ t,\ u)| \leqslant \alpha(t)\, \|u\|_{C_{L_2}}\, |u|$$

где характеристичное число ([4], стр. 162) положительной функции $\alpha(t)$ больше, чем β;

б) норма начальной функции $\varphi(x)$

$$\|\varphi\| \leqslant \delta$$

с) наименьшее собственное число $\lambda_{\min}$ оператора $\triangle z + \lambda z = 0$ в области G при $z = 0$ на контуре Γ будет

$$\lambda_{\min} \geqslant \beta + \eta$$

Поступила 10 VI 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Bellman R. On the existence and boundedness of solutions of non-linear partial differential equations of parabolic type. Trans. Amer. Math. Soc., 1948, 64.
2. Mlak W. Remarks on the stability problem for parabolic equations. Ann. polon. math., 1957, 3, № 2.
3. Вулих Б. З. Введение в функциональный анализ. М., Физматгиз, 1958.
4. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. М., ГИТТЛ, 1955.

О ВЫЧИСЛЕНИИ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛОВ С РЕГУЛЯРНЫМ ЯДРОМ ТИПА КОШИ

Г. Н. Пыхтеев

(Новосибирск)

При решении многих задач гидро-аэродинамики, теории упругости и теории фильтрации встречаются интегралы с регулярным ядром типа Коши, взятые вдоль отрезка действительной оси, которые могут быть приведены к любому из двух интегралов следующего вида:

$$G(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(t)}{t-x}\,dt, \quad E(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(t)}{t-x}\,\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \qquad (1 \leqslant x \leqslant \infty) \qquad (0.1)$$

Если функция $f(t)$ удовлетворяет условию Гельдера [1,2] на отрезке $[-1,1]$, то при $x > 1$ эти интегралы являются обычными регулярными римановыми интегралами. В точке $x = 1$ интеграл $G(x)$ может иметь особенность логарифмического типа.

Ниже выводятся формулы, которые позволяют получить приближенные выражения для интегралов $G(x)$ и $E(x)$ и оценить ошибку приближения. Полученные формулы содержат функции, определяемые известными элементарными функциями или быстро сходящимися рядами. Для некоторых из этих функций приводятся таблицы.

1. Введем в рассмотрение полиномы Чебышева первого и второго рода

$$T_n(t) = \cos n \arccos t, \qquad U_n(t) = \sin n \arccos t \qquad (1.1)$$

а также переменную x^{**}, определяемую равенствами

$$x^{**} = x - \sqrt{x^2-1}, \qquad x = (1 + x^{**2}) / 2x^{**} \qquad (1 \leqslant x \leqslant \infty,\ 0 \leqslant x^{**} \leqslant 1) \quad (1.2)$$

Нетрудно показать, что $T_n(t)$ и $U_n(t)$ удовлетворяют соотношениям

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{U_n(t)}{t-x}\,dt = -x^{**n}, \qquad \frac{\sqrt{x^2-1}}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_n(t)}{t-x}\,\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -x^{**n} \qquad (1.3)$$

Пусть функция $f(t)$, входящая в интегралы $G(x)$ и $E(x)$, удовлетворяет условию Гельдера на отрезке $[-1,1]$, тогда интегралы $G(x)$ и $E(x)$ можно представить в виде степенных рядов

$$G(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{**n}, \qquad E(x) = -\frac{a_0}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{**n} \qquad (0 \leqslant x^{**} \leqslant 1) \qquad (1.4)$$