При этом вместо величин $C_n^{(1)}(\tau)$ и $C_n^{(2)}(\tau)$ нужно подставить соответственно величины $C_{1n}(\tau)$ и $C_{2n}(\tau)$ согласно формуле (6.5), а ω_1 и ω_2 заменить на ω.

Поступила 29 VI 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Малкин И. Н. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. Гостехиздат, 1956.
2. Проскуряков А. П. Построение периодических решений автономных систем с одной степенью свободы в случае произвольных вещественных корней уравнения основных амплитуд. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 4.
3. Проскуряков А. П. Об одном свойстве периодических решений квазилинейных автономных систем с несколькими степенями свободы. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 4.

КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

А. М. Родионов

(Москва)

Рассмотрим квазилинейные системы нейтрального типа с постоянными коэффициентами и постоянными положительными отклонениями:

$$\frac{dx(t)}{dt}+\sum_{p=0}^{1}\sum_{j=1}^{q} a_{pj}x^{(p)}(t-\tau_j)=f(t)+\mu F(t, x(t), x(t-\tau_1), \ldots, x(t-\tau_q), \mu)$$

или кратко

$$Ux=f+\mu F \tag{1}$$

Здесь μ — малый параметр,

$$x(t)=\{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}, \qquad f(t)=\{f_1(t), \ldots, f_n(t)\}, \qquad F=\{F_1, \ldots, F_n\}$$

$$a_{pj}=\|a_{pjsk}\| \qquad (s, k=1, \ldots, n)$$

Функция F по t непрерывна, имеет период 2π; при достаточно малом μ и при значениях $x(t)$, $x(t-\tau_j)$, лежащих в некоторой области G пространства этих переменных, обладает по ним непрерывными частными производными первого порядка; функция $f(t)$ — непрерывная периодическая функция периода 2π.

Докажем при помощи принципа сжатых отображений существование единственного периодического решения, переходящего при $\mu=0$ в решение соответствующего порождающего уравнения. Могут представиться нерезонансный, резонансный и «исключительный» [1] случаи.

1°. *Нерезонансный случай.* Предположим, что соответствующее (1) характеристическое уравнение

$$\Delta(\lambda)=\left|\lambda\left(E+\sum_{j=1}^{q} a_{1j}e^{-\lambda\tau_j}\right)+\sum_{j=1}^{q} a_{0j}e^{-\lambda\tau_j}\right|=0 \tag{2}$$

не имеет целочисленных частот.

Будем рассматривать замкнутое подмножество $C_p\,(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ таких функций, у которых $x^{(i)}(0)=x^{(i)}(2\pi)$ $(i=0,1, \ldots, p)$, эти функции продолжим вне промежутка $[0, 2\pi]$ так, чтобы они были периодическими периода 2π. В этом смысле будем говорить о пространстве $C_p\,(-\infty<t<+\infty)$ периодических функций.

Рассмотрим порождающую систему:

$$Ux=f \tag{3}$$

Левая часть (3) определяет оператор U, имеющий смысл, во всяком случае, для любой функции x из C_1. Значения U — любая функция из C.

Легко проверить, что U — линейный (т. е. аддитивный и непрерывный) оператор. И так как (2) не имеет целочисленных частот, то $Ux=\theta$ только при $x=\theta$.

Таким образом, существует оператор U и устанавливает взаимнооднозначное соответствие между полными пространствами C_1 и C. Согласно известной теореме Банаха [2], обратный оператор U^{-1} — линейный. Отсюда

$$\| U^{-1} f \| \leqslant C \| f \|$$

Следовательно, для единственного периодического решения системы (3) имеем оценку

$$| x_s^\circ (t) | \leqslant CM \tag{4}$$

где M определяется условием $|f_s| \leqslant M$. Используя оценку (4), можно показать, что к уравнению

$$Ux^{(l)} = f(t) + \mu F(t, x^{(l-1)}(t), x^{(l-1)}(t-\tau_j), \mu)$$

в классе функций, обращающихся при $\mu = 0$ в решение $x^\circ(t)$ порождающей системы (3) (предполагается, что $x^\circ(t) \in G$), применим принцип сжатых отображений при достаточно малом μ. Отсюда следует теорема.

Теорема 1. В нерезонансном случае система (1) имеет при достаточно малом μ единственное периодическое решение (периода 2π), обращающееся при $\mu = 0$ в решение порождающей системы (3).

2°. *Резонансный случай.* Пусть уравнение (2) имеет конечное число целочисленных частот, и $\varphi_m = C_m \exp iN_m$ $(m = 1, \ldots, r)$ — соответствующие периодические решения однородной системы $Ux = \theta$. В этом случае, вообще говоря, периодическое решение не существует и функции $f(t)$ должны удовлетворять некоторым условиям.

Наряду с системой (3) рассмотрим сопряженную ей систему. Согласно теореме Рисса о пространстве C линейный функционал

$$g(f) = \int_0^{2\pi} (f, d\psi), \qquad (f, d\psi) = \sum_{s=1}^{n} f_s(t)\, d\psi_s(t)$$

где $\psi \in V_0$ — периодическая функция t с периодом 2π (V_0 означает множество всех правильных функций с $\psi(0) = 0$), $(f, d\psi)$ — скалярное произведение вектор-функций f и $d\psi$. По определению сопряженной системы имеем $U^* g = g(Ux)$. После простых вычислений получим

$$U^* g = g(Ux) =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sum_{s=1}^{n} x_s(t)\, d \left\{ -\frac{d\psi_s(t)}{dt} - \sum_{j=1}^{q} \sum_{k=1}^{n} a_{1jks} \frac{d\psi_s(t+\tau_j)}{dt} + \sum_{j=1}^{q} \sum_{k=1}^{n} a_{0jks}\, \psi_s(t+\tau_j) \right\}$$

Следовательно, $U^* g = \theta$ на функционалах с $\psi_s(t) = \varphi_{sm}^*(t) - \varphi_{sm}^*(0)$, где φ_{sm}^* — периодические решения системы:

$$\frac{d\varphi_m^*(t)}{dt} + \sum_{j=1}^{q} a_{1j}^* \frac{d\varphi_m^*(t+\tau_j)}{dt} - \sum_{j=1}^{q} a_{0j}^* \varphi_m^*(t+\tau_j) = 0 \qquad (m = 1, \ldots, r) \tag{5}$$

где a_{1j}^* и a_{0j}^* — транспонированные матрицы (фундаментальное уравнение, соответствующее (5), имеет корни, лишь знаком отличающиеся от корней уравнения (2)).

Банахом установлена теорема, что система $Ux = f$ разрешима тогда и только тогда, когда из $U^* g = \theta$ следует $g(f) = 0$.

Таким образом, чтобы система (3) в резонансном случае допускала периодические решения, функции $f(t)$ должны удовлетворять следующим r условиям:

$$\int_0^{2\pi} \sum_{s=1}^{n} f_s(t)\, \varphi_{sm}^*(t)\, dt = 0 \qquad (m = 1, \ldots, r) \tag{6}$$

Функции $f(t)$, удовлетворяющие условиям (6), образуют, очевидно, линейное и замкнутое множество, которое обозначим через N. Имеем, следовательно, $U(C_1) = N$. Решение системы (3) можно записать в виде

$$x_s^\circ(t) = \sum_{m=1}^{r} M_m^\circ \varphi_{sm}(t) + X_s(t) \qquad (|X_s(t)| \leqslant C^* M)$$

Здесь $X_s(t)$ — частное решение неоднородной системы (3), C^* — постоянная, не зависящая от вида $f(t)$, так как согласно теореме Банаха, упомянутой в 1°, оператор U есть гомоморфизм пространства C_1 на N.

В резонансном случае процесс последовательных приближений выглядит следующим образом:

$$U x^{(l)} = f(t) + \mu F(t, x^{(l-1)}(t), x^{(l-1)}(t-\tau_j), \mu) \tag{7}$$

$$x_s^{(l)} = \sum_{m=1}^{r} M_m^{(l)} \varphi_{sm}(t) + x_s^{\circ}(t) + \mu L_s(F^{(l-1)}) \tag{8}$$

Здесь $F^{(l-1)} = F(t, x^{(l-1)}(t), x^{(l-1)}(t-\tau_j), \mu)$, а $L_s(F^{(l-1)})$ представляет собой частное решение системы (7), соответствующее известной функции времени $F^{(l-1)}$; коэффициенты $M_m^{(l)}$ определяются из условия отсутствия резонирующих членов в правой части системы, определяющей $x_s^{(l+1)}(t)$:

$$P_m(M_1^{(l)}, \ldots, M_r^{(l)}, \mu) = \int_0^{2\pi} (F^{(l)}, \varphi_m^*)\, dt = 0 \qquad (m = 1, \ldots, r) \tag{9}$$

Если в классе функций, обращающихся при $\mu = 0$ в решение порождающей системы, существует решение основной системы (1), то при $\mu = 0$ должны обращаться в $x^{\circ}(t)$ все $x^{(l)}(t)$, являющиеся последовательными приближениями точного решения $x(t, \mu)$. Для этого необходимо, как видно из (8) и (9), чтобы постоянные $M_1^{\circ}, \ldots, M_r^{\circ}$ определялись из уравнений

$$P_m^{\circ}(M_1^{\circ}, \ldots, M_r^{\circ}, 0) = \int_0^{2\pi} \sum_{s=1}^{n} F_s(t, x^{\circ}(t), x^{\circ}(t-\tau_j), 0)\, \varphi_{sm}^*(t)\, dt = 0 \tag{10}$$

Положим, что при этом выполнено условие

$$\frac{\partial(P_1^{\circ}, \ldots, P_r^{\circ})}{\partial(M_1^{\circ}, \ldots, M_r^{\circ})} \neq 0 \tag{11}$$

Тогда вновь можно показать применимость принципа сжатых отображений подобно тому, как это фактически делается в работе И. Г. Малкина [3]. Отсюда следует теорема.

Теорема 2. Чтобы система (1) имела решение $x(t, \mu)$, обращающееся при $\mu = 0$ в решение порождающей системы $x^{\circ}(t)$, необходимо, чтобы выполнялись условия (10), если при этом выполнено условие (11), существует единственное периодическое решение (1), обращающееся при $\mu = 0$ в решение порождающей системы.

Замечание 1. Как и в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, подобным же образом решается вопрос о нахождении периодических решений автономных систем.

Замечание 2. Особого подхода требует исключительный случай, когда уравнение (2) имеет счетное множество целочисленных собственных частот [1]. Заметим [4], что этот случай не может реализоваться, когда

$$\| a_{1jsk} \| = 0 \qquad \begin{pmatrix} j = 1, \ldots, q \\ s, k = 1, \ldots, n \end{pmatrix}$$

т. е. (1) становится системой с запаздыванием.

В заключение выражаю искреннюю признательность Л. Э. Эльсгольцу за предложенную тему и внимание к работе.

Поступила 16 V 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Эльсгольц Л. Э. Некоторые свойства периодических решений линейных и квазилинейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Вестн. Моск. ун-та, 1959, № 5.
2. Канторович Л. В. и Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах, гл. XII. Гостехиздат, 1959.
3. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, гл. II. Гостехиздат, 1956.
4. Зубов В. И. К теории линейных стационарных систем с запаздывающим аргументом. Изв. вузов (математика), 1958, № 6.