Отсюда при учете (1.2) и (1.3) находим

$$\frac{\partial(\Lambda_0+\Lambda)}{\partial\alpha_s}=\frac{\omega}{2\pi}\sum_{j=1}^{\nu}\int_0^{2\pi/\omega}\left\{x_j^{(0)}\frac{\partial}{\partial\alpha_s}\left[\frac{\partial L_0}{\partial x_j}\right]_0+\dot{x}_j^{(0)}\frac{\partial}{\partial\alpha_s}\left[\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_j}\right]_0\right\}dt=$$

$$=\frac{\omega}{2\pi}\sum_{j=1}^{\nu}\int_0^{2\pi/\omega}\left\{x_j^{(0)}\frac{\partial}{\partial\alpha_s}\left[\frac{\partial L}{\partial x_j}\right]_0+\dot{x}_j^{(0)}\frac{\partial}{\partial\alpha_s}\left[\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_j}\right]_0\right\}dt=$$

$$=\frac{\omega}{2\pi}\sum_{j=1}^{\nu}\int_0^{2\pi/\omega}\frac{d}{dt}\left\{x_j^{(0)}\frac{\partial}{\partial\alpha_s}\left[\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_j}\right]_0\right\}dt=0 \qquad (3.6)$$

Таким образом, равенство (3.1) доказано. Тем самым установлено совпадение условия стационарности функции $\Lambda_0(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$ с уравнениями (1.4) для определения порождающих фаз $\alpha_s=\alpha_s^*$, а условия минимума этой функции — с условиями устойчивости соответствующего синхронного движения.

Поступила 6 VI 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Блехман И. И., Лавров Б. П. Об одном интегральном признаке устойчивости движения. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 5.
2. Блехман И. И. О самосинхронизации механических вибраторов. Изв. АН СССР. ОТН, 1958, № 6.
3. Блехман И. И. Динамика привода вибрационных машин со многими вибраторами. Изв. АН СССР. ОТН. «Механика и машиностроение», 1960, № 1.
4. Гантмахер Ф. Р. и Крейн М. Г. Осцилляционные матрицы и малые колебания механических систем. ГТТИ, 1950.
5. Джанелидзе Г. Ю., Лурье А. И. О применении интегральных и вариационных принципов механики в задачах колебаний. ПММ, 1960, т. XXVI, вып. 1.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

А. П. Проскуряков (Москва)

1. Рассмотрим квазилинейную колебательную систему с двумя степенями свободы

$$\begin{aligned}a_{11}\ddot{x}_1+a_{12}\ddot{x}_2+c_{11}x_1+c_{12}x_2&=\mu F_1(x_1,x_2,\dot{x}_1,\dot{x}_2,\mu)\\ a_{21}\ddot{x}_1+a_{22}\ddot{x}_2+c_{21}x_1+c_{22}x_2&=\mu F_2(x_1,x_2,\dot{x}_1,\dot{x}_2,\mu)\end{aligned} \qquad (1.1)$$

Функции F_1 и F_2 предполагаются аналитическими от своих аргументов в некоторой области их изменения. Величина μ является малым параметром. Порождающая система (при $\mu=0$) представляет собой линейную консервативную систему с постоянными коэффициентами, причем $a_{12}=a_{21}$, $c_{12}=c_{21}$.

Предположим, что уравнение частот порождающей системы

$$\begin{vmatrix} c_{11}-\omega^2a_{11} & c_{12}-\omega^2a_{12}\\ c_{21}-\omega^2a_{21} & c_{22}-\omega^2a_{22}\end{vmatrix}=0 \qquad (1.2)$$

имеет только положительные корни. При этом возможны три случая: частоты колебаний — разные и соизмеримые; разные, но несоизмеримые; равные.

2. Остановимся подробнее на случае разных и соизмеримых частот. Пусть $m_1\omega_1=m_2\omega_2$, где m_1 и m_2 — целые положительные числа. В этом случае существует периодическое решение порождающей системы с частотой ω_0 и периодом T_0

$$\omega_0=\frac{\omega_1}{m_2}=\frac{\omega_2}{m_1},\qquad T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}$$

Предположим, что исходная нелинейная система (1.1) имеет периодическое решение с периодом $T=T_0+\alpha$, обращающееся в порождающее при $\mu=0$. Построим это решение.

Решение порождающей системы можно представить в виде

$$x_{10}(t)=A_0\cos\omega_1 t+\frac{B_0}{\omega_1}\sin\omega_1 t+E_0\cos\omega_2 t$$

$$x_{20}(t)=p_1\left(A_0\cos\omega_1 t+\frac{B_0}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right)+p_2E_0\cos\omega_2 t \tag{2.1}$$

Члены с $\sin\omega_2 t$ не входят в решение благодаря соответствующему выбору начала отсчета времени t. Величины p_1 и p_2 определяются формулами

$$p_r=-\frac{c_{11}-\omega_r^2a_{11}}{c_{12}-\omega_r^2a_{12}}=-\frac{c_{21}-\omega_r^2a_{21}}{c_{22}-\omega_r^2a_{22}}\qquad (r=1,\ 2) \tag{2.2}$$

Как показано в работе [3], начальные условия для системы (1.1) будут

$$x_1(0)=A_0+\beta_1+E_0+\beta_3,\qquad \dot{x}_1(0)=B_0+\beta_2$$

$$x_2(0)=p_1(A_0+\beta_1)+p_2(E_0+\beta_3),\qquad \dot{x}_2(0)=p_1(B_0+\beta_2) \tag{2.3}$$

Величины β_1, β_2 и β_3 являются функциями μ, уничтожающимися при $\mu=0$. Тогда, согласно [3], решение исходной системы (1.1) можно представить в виде

$$x_1(t)=x^{(1)}(t)+x^{(2)}(t),\qquad x_2(t)=p_1x^{(1)}(t)+p_2x^{(2)}(t) \tag{2.4}$$

Разложения $x^{(1)}(t)$ и $x^{(2)}(t)$ по степеням параметров β_1, β_2, β_3 и μ имеют вид

$$x^{(1)}(t)=(A_0+\beta_1)\cos\omega_1 t+\frac{B_0+\beta_2}{\omega_1}\sin\omega_1 t+ \tag{2.5}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n^{(1)}(t)+\frac{\partial C_n^{(1)}}{\partial A_0}\beta_1+\frac{\partial C_n^{(1)}}{\partial B_0}\beta_2+\frac{\partial C_n^{(1)}}{\partial E_0}\beta_3+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_n^{(1)}}{\partial A_0^2}\beta_1^2+\ldots\right]\mu^n$$

$$x^{(2)}(t)=(E_0+\beta_3)\cos\omega_2 t+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n^{(2)}(t)+\frac{\partial C_n^{(2)}}{\partial A_0}\beta_1+\frac{\partial C_n^{(2)}}{\partial B_0}\ {}_2+\frac{\partial C_n^{(2)}}{\partial E_0}\beta_3+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_n^{(2)}}{\partial A_0^2}\beta_1^2+\ldots\right]\mu^n$$

Величины $C_n^{(1)}(t)$ и $C_n^{(2)}(t)$ определяются по формулам

$$C_n^{(1)}(t)=\frac{1}{\Delta_0(\omega_2^2-\omega_1^2)\omega_1}\int_0^t R_n^{(1)}(t')\sin\omega_1(t-t')\,dt'$$

$$C_n^{(2)}(t)=\frac{1}{\Delta_0(\omega_1^2-\omega_2^2)\omega_2}\int_0^t R_n^{(2)}(t')\sin\omega_2(t-t')\,dt' \tag{2.6}$$

При этом

$$R_n^{(r)}(t)=(c_{22}-\omega_r^2a_{22})H_{1n}(t)-(c_{12}-\omega_r^2a_{12})H_{2n}(t)\qquad (r=1,2) \tag{2.7}$$

$$\Delta_0=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{2.8}$$

В дальнейшем будут использоваться также функции

$$C_{1n}(t)=C_n^{(1)}(t)+C_n^{(2)}(t),\qquad C_{2n}(t)=p_1C_n^{(1)}(t)+p_2C_n^{(2)}(t) \tag{2.9}$$

Величины $H_{1n}(t)$ и $H_{2n}(t)$, входящие в формулу (2.7), равны

$$H_{in}(t)=\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{d^{n-1}F}{d\mu^{n-1}}\right)_{\mu=0}\qquad (i=1,2) \tag{2.10}$$

Напишем в явном виде первые три функции $H_{in}(t)$

$$H_{i1}(t)=F_i(x_{10},\ x_{20},\ \dot{x}_{10},\ \dot{x}_{20},\ 0)$$

$$H_{i2}(t)=\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_1}\right)_0C_{11}+\left(\frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}_1}\right)_0\dot{C}_{11}+\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_2}\right)_0C_{21}+\left(\frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}_2}\right)_0\dot{C}_{21}+\left(\frac{\partial F_i}{\partial \mu}\right)_0$$

$$H_{i3}(t)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial x_1^2}\right)_0C_{11}^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial \dot{x}_1^2}\right)_0\dot{C}_{11}^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial x_2^2}\right)_0C_{21}^2+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial \dot{x}_2^2}\right)_0\dot{C}^2_{21}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial \mu^2}\right)_0+\left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial x_1\partial \dot{x}_1}\right)_0C_{11}\dot{C}_{11}+\left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial x_2\partial \dot{x}_2}\right)_0C_{21}\dot{C}_{21}+$$

$$+\left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial x_1 \partial x_2}\right)_0 C_{11} C_{21} + \left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial x_1 \partial \dot{x}_2}\right)_0 C_{11} \dot{C}_{21} + \left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial \dot{x}_1 \partial x_2}\right)_0 \dot{C}_{11} C_{21} + \left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_2}\right)_0 \dot{C}_{11} \dot{C}_{21} +$$

$$+\left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial x_1 \partial \mu}\right)_0 C_{11} + \left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial \dot{x}_1 \partial \mu}\right)_0 \dot{C}_{11} + \left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial x_2 \partial \mu}\right)_0 C_{21} + \left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial \dot{x}_2 \partial \mu}\right)_0 \dot{C}_{21} +$$

$$+\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_1}\right)_0 C_{12} + \left(\frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}_1}\right)_0 \dot{C}_{12} + \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_2}\right)_0 C_{22} + \left(\frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}_2}\right)_0 \dot{C}_{22} \qquad (2.11)$$

3. Условия периодичности для $x_1(t)$, $x_2(t)$ и их первых производных будут

$$x_1(T_0+\alpha) = A_0 + \beta_1 + E_0 + \beta_3, \qquad \dot{x}_1(0) = B_0 + \beta_2$$

$$x_2(T_0+\alpha) = p_1(A_0+\beta_1) + p_2(E_0+\beta_3), \qquad \dot{x}_2(0) = p_1(B_0+\beta_2) \qquad (3.1)$$

Одно из этих условий, например условие периодичности для $\dot{x}_1(t)$, используем для определения параметра α как неявной функции остальных параметров

$$\alpha = \alpha(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \mu)$$

Будем искать величину α в виде ряда по целым степеням этих параметров. Так как α обращается в нуль при $\mu = 0$ и так как производные любого порядка от α по β_1, β_2 и β_3 равны нулю при $t = T_0$ и $\mu = 0$, то разложение α имеет вид

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \left[N_n(T_0) + \frac{\partial N_n}{\partial A_0}\beta_1 + \frac{\partial N_n}{\partial B_0}\beta_2 + \frac{\partial N_n}{\partial E_0}\beta_3 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 N_n}{\partial A_0^2}\cdot\beta_1^2 + \ldots\right]\mu^n \qquad (3.2)$$

Последовательно дифференцируя равенство $\dot{x}_1(T_0+\alpha) = B_0 + \beta_2$ по μ, находим

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial \mu}\right)_0 = \frac{1}{P_1}\dot{C}_{11}(T_0) = N_1(T_0) \qquad (3.3)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \mu^2}\right)_0 = \frac{2}{P_1}\left[\dot{C}_{12}(T_0) + \ddot{C}_{11}(T_0) N_1(T_0) - \frac{1}{2} B_0\omega_1^2 N_1^2(T_0)\right] = 2N_2(T_0)$$

$$\left(\frac{\partial^3 \alpha}{\partial \mu^3}\right)_0 = \frac{6}{P_1}\Big[\dot{C}_{13}(T_0) + \ddot{C}_{12}(T_0) N_1(T_0) + \frac{1}{2}\dddot{C}_{11}(T_0) N_1^2(T_0) + \frac{1}{6} Q_1 N_1^3(T_0) -$$

$$- B_0\omega_1^2 N_1(T_0) N_2(T_0) + \ddot{C}_{11}(T_0) N_2(T_0)\Big] = 6N_3(T_0) \quad \text{и т. д.}$$

При этом обозначено

$$P_1 = A_0\omega_1^2 + E_0\omega_2^2, \qquad Q_1 = A_0\omega_1^4 + E_0\omega_2^4$$

Условием существования разложения (3.2) является неравенство $P_1 \neq 0$.

Разлагая по параметру α левые части остальных условий периодичности и подставляя в них α из формулы (3.2), получим для $j = 1,2,3$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[M_{jn}(T_0) + \frac{\partial M_{jn}}{\partial A_0}\beta_1 + \frac{\partial M_{jn}}{\partial B_0}\beta_2 + \frac{\partial M_{jn}}{\partial E_0}\beta_3 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 M_{jn}}{\partial A_0^2}\beta_1^2 + \ldots\right]\mu^n = 0 \qquad (3.4)$$

Вычислим во всех трех условиях три первых коэффициента при степенях параметра μ. Коэффициенты при μ в первой степени

$$M_{11}(T_0) = C_{11}(T_0) + B_0 N_1(T_0)$$

$$M_{21}(T_0) = C_{21}(T_0) + p_1 B_0 N_1(T_0) \qquad (3.5)$$

$$M_{31}(T_0) = \dot{C}_{21}(T_0) - P_2 N_1(T_0)$$

Коэффициенты при μ во второй степени

$$M_{12}(T_0) = C_{12}(T_0) + B_0 N_2(T_0) + \frac{1}{2} P_1 N_1^2(T_0)$$

$$M_{22}(T_0) = C_{22}(T_0) + p_1 B_0 N_2(T_0) + \frac{1}{2} P_2 N_1^2(T_0) \qquad (3.6)$$

$$M_{32}(T_0) = \dot{C}_{22}(T_0) - P_2 N_2(T_0) + \ddot{C}_{21}(T_0) N_1(T_0) - \frac{1}{2} p_1 B_0\omega_1^2 N_1^2(T_0)$$

Коэффициенты при μ в третьей степени (3.7)

$$M_{13}(T_0) = C_{13}(T_0) + B_0 N_3(T_0) + P_1 N_1(T_0) N_2(T_0) - \frac{1}{2}\ddot{C}_{11}(T_0) N_1^2(T_0) + \frac{1}{3} B_0 \omega_1^2 N_1^3(T_0)$$

$$M_{23}(T_0) = C_{23}(T_0) + p_1 B_0 N_3(T_0) + P_2 N_1(T_0) N_2(T_0) - \frac{1}{2}\ddot{C}_{21}(T_0) N_1^2(T_0) + \frac{1}{3} p_1 B_0 \omega_1^2 N_1^3(T_0)$$

$$M_{33}(T_0) = \dot{C}_{23}(T_0) - P_2 N_3(T_0) - p_1 B_0 \omega_1^2 N_1(T_0) N_2(T_0) + \ddot{C}_{21}(T_0) N_2(T_0) + \ddot{C}_{22}(T_0) N_1(T_0) + \frac{1}{2}\dddot{C}_{21}(T_0) N_1^2(T_0) + \frac{1}{6} Q_2 N_1^3(T_0)$$

В предыдущих формулах использованы обозначения

$$P_2 = p_1 A_0 \omega_1^2 + p_2 E_0 \omega_2^2, \qquad Q_2 = p_1 A_0 \omega_1^4 + p_2 E_0 \omega_2^4$$

4. Предположим, что параметры β_1, β_2 и β_3 могут быть разложены в ряды

$$\beta_1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mu^n, \qquad \beta_2 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \mu^n, \qquad \beta_3 = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \mu^n \tag{4.1}$$

Подставим значения этих параметров в формулу (3.4) и приравняем нулю коэффициенты при одинаковых степенях параметра μ. Из равенства нулю коэффициентов при μ в первой степени во всех трех условиях получаем

$$M_{11}(T_0) = 0, \qquad M_{21}(T_0) = 0, \qquad M_{31}(T_0) = 0 \tag{4.2}$$

Из этих трех уравнений определяются коэффициенты A_0, B_0 и E_0. Назовем эти уравнения уравнениями основных амплитуд.

Приравнивая нулю коэффициенты при μ во второй степени, получаем

$$\begin{aligned} M_{12}(T_0) + A_1 \frac{\partial M_{11}}{\partial A_0} + B_1 \frac{\partial M_{11}}{\partial B_0} + E_1 \frac{\partial M_{11}}{\partial E_0} &= 0 \\ M_{22}(T_0) + A_1 \frac{\partial M_{21}}{\partial A_0} + B_1 \frac{\partial M_{21}}{\partial B_0} + E_1 \frac{\partial M_{21}}{\partial E_0} &= 0 \\ M_{32}(T_0) + A_1 \frac{\partial M_{31}}{\partial A_0} + B_1 \frac{\partial M_{31}}{\partial B_0} + E_1 \frac{\partial M_{31}}{\partial E_0} &= 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Если якобиан

$$\frac{D(M_{11}, M_{21}, M_{31})}{D(A_0, B_0, E_0)} \neq 0 \tag{4.4}$$

то из уравнений (4.3) определяются коэффициенты A_1, B_1 и E_1.

Из равенства нулю коэффициентов при μ в третьей степени имеем

$$M_{13} + A_2 \frac{\partial M_{11}}{\partial A_0} + B_2 \frac{\partial M_{11}}{\partial B_0} + E_2 \frac{\partial M_{11}}{\partial E_0} + \frac{1}{2} A_1^2 \frac{\partial^2 M_{11}}{\partial A_0^2} + \frac{1}{2} B_1^2 \frac{\partial^2 M_{11}}{\partial B_0^2} + \frac{1}{2} E_1^2 \frac{\partial^2 M_{11}}{\partial E_0^2} + A_1 B_1 \frac{\partial^2 M_{11}}{\partial A_0 \partial B_0} + A_1 E_1 \frac{\partial^2 M_{11}}{\partial A_0 \partial E_0} + B_1 E_1 \frac{\partial^2 M_{11}}{\partial B_0 \partial E_0} + A_1 \frac{\partial M_{12}}{\partial A_0} + B_1 \frac{\partial M_{12}}{\partial B_0} + E_1 \frac{\partial M_{12}}{\partial E_0} = 0$$

и два других аналогичных уравнения. Из последних уравнений находятся коэффициенты A_2, B_2 и E_2. Дальнейшие условия также являются линейными уравнениями относительно A_n, B_n и E_n. Таким образом, коэффициенты A_n, B_n и E_n последовательно определяются из систем трех линейных уравнений с одним и тем же определителем, равным вышенаписанному якобиану. Если этот якобиан обращается в нуль, то для существования периодических решений необходимо, чтобы матрица якобиана и расширенная матрица с добавлением столбца со свободными членами уравнений имели бы один и тот же ранг. При этом для определения коэффициентов A_1, B_1 и E_1 будет служить уравнение не ниже второй степени. Таким образом, обращение в нуль якобиана означает или отсутствие периодического решения или бифуркацию порождающего решения.

Если уравнения (4.2) удовлетворяются тождественно, то разрешимость бесконечной системы уравнений относительно A_n, B_n и E_n будет связана с необращением в нуль якобиана

$$\frac{D(M_{12}, M_{22}, M_{32})}{D(A_0, B_0, E_0)} \quad \text{и т. д.}$$

Зная коэффициенты A_n, B_n и E_n, можно найти поправку к периоду в виде ряда по степеням параметра μ. Подставим значения β_1, β_2 и β_3 в формулу (3.2) и соберем члены с одинаковыми степенями μ. Получим

$$\alpha = T_0 \sum_{n=1}^{\infty} h_n \mu^n \tag{4.5}$$

Первые три коэффициента h_1, h_2 и h_3 имеют значения

$$h_1 = \frac{1}{T_0} N_1(T_0), \qquad h_2 = \frac{1}{T_0}\left[N_2(T_0) + A_1\frac{\partial N_1}{\partial A_0} + B_1\frac{\partial N_1}{\partial B_0} + E_1\frac{\partial N_1}{\partial E_0}\right] \tag{4.6}$$

$$h_3 = \frac{1}{T_0}\left[N_3(T_0) + A_2\frac{\partial N_1}{\partial A_0} + B_2\frac{\partial N_1}{\partial B_0} + E_2\frac{\partial N_1}{\partial E_0} + \frac{1}{2}A_1^2\frac{\partial^2 N_1}{\partial A_0^2} + \frac{1}{2}B_1^2\frac{\partial^2 N_1}{\partial B_0^2} + \frac{1}{2}E_1^2\frac{\partial^2 N_1}{\partial E_0^2} + \right.$$
$$\left. + A_1B_1\frac{\partial^2 N_1}{\partial A_0\partial B_0} + A_1E_1\frac{\partial^2 N_1}{\partial A_0\partial E_0} + B_1E_1\frac{\partial^2 N_1}{\partial B_0\partial E_0} + A_1\frac{\partial N_2}{\partial A_0} + B_1\frac{\partial N_2}{\partial B_0} + E_1\frac{\partial N_2}{\partial E_0}\right]$$

Для построения периодического решения системы (1.1) с периодом, не зависящим от параметра μ, сделаем замену независимого переменного по формуле

$$t = \tau(1 + h_1\mu + h_2\mu^2 + \ldots) \tag{4.7}$$

и будем искать решение в функции τ. Это решение будет иметь период, равный T_0.

Подставим t из формулы (4.7) в функции $C_{in}(t)$, $\cos\omega t$ и $\sin\omega t$ и разложим их в ряды по μ. Получим

$$C_{in}(t) = C_{in}(\tau) + h_1\tau\dot{C}_{in}(\tau)\mu + \ldots$$

$$\cos\omega t = \cos\omega\tau - h_1\omega\tau\sin\omega\tau\,\mu - (h_2\omega\tau\sin\omega\tau + \tfrac{1}{2}h_1^2\omega^2\tau^2\cos\omega\tau)\,\mu^2 + \ldots$$

$$\sin\omega t = \sin\omega\tau + h_1\omega\tau\cos\omega\tau\,\mu + (h_2\omega\tau\cos\omega\tau - \tfrac{1}{2}h_1^2\omega^2\tau^2\sin\omega\tau)\mu^2 + \ldots$$

Функции $x_1(\tau)$ и $x_2(\tau)$ представим в виде рядов по целым степеням параметра μ

$$x_k(\tau) = x_{k0}(\tau) + \mu x_{k1}(\tau) + \mu^2 x_{k2}(\tau) + \ldots \qquad (k = 1, 2) \tag{4.8}$$

причем

$$x_{1n}(\tau) = x_n^{(1)}(\tau) + x_n^{(2)}(\tau), \qquad x_{2n}(\tau) = p_1 x_n^{(1)}(\tau) + p_2 x_n^{(2)}(\tau) \tag{4.9}$$

Порождающее решение определяется формулой (2.1). Для последующих двух коэффициентов получаем (4.10)

$$x_1^{(1)}(\tau) = A_1\cos\omega_1\tau + \frac{B_1}{\omega_1}\sin\omega_1\tau + C_1^{(1)}(\tau) - h_1\tau(A_0\omega_1\sin\omega_1\tau - B_0\cos\omega_1\tau)$$

$$x_1^{(2)}(\tau) = E_0\cos\omega_2\tau + C_1^{(2)}(\tau) - h_1\tau E_0\omega_2\sin\omega_2\tau$$

$$x_2^{(1)}(\tau) = A_2\cos\omega_1\tau + \frac{B_2}{\omega_1}\sin\omega_1\tau + C_2^{(1)}(\tau) + A_1\frac{\partial C_1^{(1)}}{\partial A_0} + B_1\frac{\partial C_1^{(1)}}{\partial B_0} + E_1\frac{\partial C_1^{(1)}}{\partial E_0} +$$
$$+ h_1\tau\dot{C}_1^{(1)}(\tau) - \tau[\omega_1(h_1A_1 + h_2A_0)\sin\omega_1\tau - (h_1B_1 + h_2B_0)\cos\omega_1\tau] -$$
$$- \frac{1}{2}h_1^2\tau^2\omega_1(A_0\omega_1\cos\omega_1\tau + B_0\sin\omega_1\tau)$$

$$x_2^{(2)}(\tau) = E_2\cos\omega_2\tau + C_2^{(2)}(\tau) + A_1\frac{\partial C_1^{(2)}}{\partial A_0} + B_1\frac{\partial C_1^{(2)}}{\partial B_0} + E_1\frac{\partial C_1^{(2)}}{\partial E_0} + h_1\tau\dot{C}_1^{(2)}(\tau) -$$
$$- \tau\omega_2(h_1E_1 + h_2E_0)\sin\omega_2\tau - \frac{1}{2}h_1^2\tau^2\omega_2^2E_0\cos\omega_2\tau$$

Вопрос об оценке радиуса сходимости полученных рядов в данной работе не рассматривается.

5. Перейдем теперь ко второму случаю, когда частоты ω_1 и ω_2 разные, но несоизмеримые. Периодическое решение порождающей системы может осуществляться с одной из этих частот. Будем искать периодическое решение исходной нелинейной системы (1.1), которое, например, обращается при $\mu = 0$ в порождающее с частотой ω_1

$$x_{10}(t) = A_0\cos\omega_1 t, \qquad x_{20}(t) = p_1 A_0\cos\omega_1 t \tag{5.1}$$

Это однопараметрическое семейство решений. Начальные условия для системы (1.1) в этом случае будут

$$x_1(0) = A_0 + \beta_1, \qquad \dot{x}_1(0) = 0, \qquad x_2(0) = p_1(A_0 + \beta_1), \qquad \dot{x}_2(0) = 0 \tag{5.2}$$

Данный случай является частным случаем по отношению к предыдущему, и решение для него может быть получено из формул, выведенных для первого случая, полагая в них

$$B_n = 0, \quad E_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots); \qquad C_{1n}(t) = C_n^{(1)}(t), \quad C_{2n}(t) = p_1 C_n^{(1)}(t)$$

Следовательно, решение исходной системы (1.1) в случае разных, но несоизмеримых частот будет иметь вид

$$x_1(t) = x^{(1)}(t), \qquad x_2(t) = p_1 x^{(1)}(t) \tag{5.3}$$

Анализ решения, данный для систем с одной степенью свободы [2], целиком переносится на рассматриваемый случай.

6. Рассмотрим случай равных частот $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. Известно, что в этом случае между коэффициентами уравнений порождающей системы имеют место соотношения

$$\frac{c_{11}}{a_{11}} = \frac{c_{12}}{a_{12}} = \frac{c_{22}}{a_{22}} = \omega^2$$

Исходная система (1.1) принимает вид

$$a_{11}(\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1) + a_{12}(\ddot{x}_2 + \omega^2 x_2) = \mu F_1(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \mu)$$
$$a_{21}(\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1) + a_{22}(\ddot{x}_2 + \omega^2 x_2) = \mu F_2(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \mu)$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 &= \frac{\mu}{\Delta_0}(a_{22}F_1 - a_{12}F_2) = \mu F_1^*(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \mu) \\ \ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 &= \frac{\mu}{\Delta_0}(a_{11}F_2 - a_{21}F_1) = \mu F_2^*(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \mu) \end{aligned} \tag{6.1}$$

В силу автономности системы можно положить, что $\dot{x}_2(0) = 0$. Тогда решение порождающей системы будет иметь вид

$$x_{10}(t) = A_0 \cos \omega t + \frac{B_0}{\omega} \sin \omega t, \qquad x_{20}(t) = E_0 \cos \omega t \tag{6.2}$$

Начальные условия для исходной системы (1.1) будут

$$x_1(0) = A_0 + \beta_1, \qquad \dot{x}_1(0) = B_0 + \beta_2, \qquad x_2(0) = E_0 + \beta_3, \qquad \dot{x}_2(0) = 0 \tag{6.3}$$

Разложения функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$ по параметрам β_1, β_2 β_3 и μ в этом случае принимают вид (6.4)

$$x_1(t) = (A_0 + \beta_1)\cos \omega t + \frac{B_0 + \beta_2}{\omega} \sin \omega t +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_{1n}(t) + \frac{\partial C_{1n}}{\partial A_0}\beta_1 + \frac{\partial C_{1n}}{\partial B_0}\beta_2 + \frac{\partial C_{1n}}{\partial E_0}\beta_3 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_{1n}}{\partial A_0^2}\beta_1^2 + \ldots \right] \mu^n$$
$$x_2(t) = (E_0 + \beta_3)\cos \omega t +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_{2n}(t) + \frac{\partial C_{2n}}{\partial A_0}\beta_1 + \frac{\partial C_{2n}}{\partial B_0}\beta_2 + \frac{\partial C_{2n}}{\partial E_0}\beta_3 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_{2n}}{\partial A_0^2}\beta_1^2 + \ldots \right] \mu^n$$

Функции $C_{1n}(t)$ и $C_{2n}(t)$ могут быть найдены по формуле

$$C_{in}(t) = \frac{1}{\omega}\int_0^t H_{in}^*(t') \sin \omega (t - t')\, dt' \quad (i=1, 2) \tag{6.5}$$

Величины $H_{in}^*(t)$ определяются формулами (2.11), в которых функции F_i должны быть заменены на F_i^*.

Чтобы найти значения коэффициентов N_n и M_{jn} для данного случая, нужно в полученных выше формулах для случая разных и соизмеримых частот положить

$$P_1 = A_0\omega^2, \qquad Q_1 = A_0\omega^4, \qquad P_2 = E_0\omega^2, \qquad Q_2 = E_0\omega^4, \qquad p_1 = 0$$

Коэффициенты рядов, представляющих решение $x_1(\tau)$ и $x_2(\tau)$, в данном случае будут равны

$$x_{1n}(\tau) = x_n^{(1)}(\tau), \qquad x_{2n}(\tau) = x_n^{(2)}(\tau) \tag{6.6}$$

При этом вместо величин $C_n^{(1)}(\tau)$ и $C_n^{(2)}(\tau)$ нужно подставить соответственно величины $C_{1n}(\tau)$ и $C_{2n}(\tau)$ согласно формуле (6.5), а ω_1 и ω_2 заменить на ω.

Поступила 29 VI 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Малкин И. Н. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. Гостехиздат, 1956.
2. Проскуряков А. П. Построение периодических решений автономных систем с одной степенью свободы в случае произвольных вещественных корней уравнения основных амплитуд. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 4.
3. Проскуряков А. П. Об одном свойстве периодических решений квазилинейных автономных систем с несколькими степенями свободы. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 4.

КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

А. М. Родионов

(Москва)

Рассмотрим квазилинейные системы нейтрального типа с постоянными коэффициентами и постоянными положительными отклонениями:

$$\frac{dx(t)}{dt} + \sum_{p=0}^{1}\sum_{j=1}^{q} a_{pj}x^{(p)}(t-\tau_j) = f(t) + \mu F(t, x(t), x(t-\tau_1), \ldots, x(t-\tau_q), \mu)$$

или кратко

$$Ux = f + \mu F \tag{1}$$

Здесь μ — малый параметр,

$$x(t) = \{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}, \qquad f(t) = \{f_1(t), \ldots, f_n(t)\}, \qquad F = \{F_1, \ldots, F_n\}$$

$$a_{pj} = \| a_{pjsk} \| \qquad (s, k = 1, \ldots, n)$$

Функция F по t непрерывна, имеет период 2π; при достаточно малом μ и при значениях $x(t)$, $x(t-\tau_j)$, лежащих в некоторой области G пространства этих переменных, обладает по ним непрерывными частными производными первого порядка; функция $f(t)$ — непрерывная периодическая функция периода 2π.

Докажем при помощи принципа сжатых отображений существование единственного периодического решения, переходящего при $\mu = 0$ в решение соответствующего порождающего уравнения. Могут представиться нерезонансный, резонансный и «исключительный» [1] случаи.

1°. *Нерезонансный случай.* Предположим, что соответствующее (1) характеристическое уравнение

$$\Delta(\lambda) = \left| \lambda\left(E + \sum_{j=1}^{q} a_{1j}e^{-\lambda\tau_j}\right) + \sum_{j=1}^{q} a_{0j}e^{-\lambda\tau_j} \right| = 0 \tag{2}$$

не имеет целочисленных частот.

Будем рассматривать замкнутое подмножество $C_p\,(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ таких функций, у которых $x^{(i)}(0) = x^{(i)}(2\pi)$ $(i = 0, 1, \ldots, p)$, эти функции продолжим вне промежутка $[0, 2\pi]$ так, чтобы они были периодическими периода 2π. В этом смысле будем говорить о пространстве $C_p\,(-\infty < t < +\infty)$ периодических функций.

Рассмотрим порождающую систему:

$$Ux = f \tag{3}$$

Левая часть (3) определяет оператор U, имеющий смысл, во всяком случае, для любой функции x из C_1. Значения U — любая функция из C.

Легко проверить, что U — линейный (т. е. аддитивный и непрерывный) оператор. И так как (2) не имеет целочисленных частот, то $Ux = \theta$ только при $x = \theta$.