ОБОСНОВАНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРИЗНАКА УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ В ЗАДАЧАХ О САМОСИНХРОНИЗАЦИИ ВИБРАТОРОВ

И. И. Блехман (Ленинград)

Справедливость интегрального признака устойчивости синхронных движений в задачах о самосинхронизации механических вибраторов первоначально была установлена на ряде частных примеров [1]. Изучение тех же примеров натолкнуло на мысль о возможности упрощения вывода соотношений для определения фаз вращения вибраторов в синхронных движениях.

Ниже показано, что в общем случае результаты исследования синхронных движений, получаемые при использовании упрощенного способа определения фаз и интегрального признака устойчивости движений, в точности совпадают с результатами решения задачи методами Пуанкаре и Ляпунова [2].

1. Рассмотрим более общий случай задачи о самосинхронизации любого числа k механических вибраторов, когда последние установлены на одном или нескольких твердых телах (вибрирующих органах), связанных между собой и с неподвижным основанием произвольной системой упругих элементов и имеющих ν степеней свободы. Отклонения указанных тел от положений статического равновесия характеризуются обобщенными координатами $x_1, \ldots, x_\nu$, а положение роторов вибраторов — углами поворота роторов $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ по отношению к некоторому неподвижному направлению.

Синхронными движениями системы называются движения вида

$$\varphi_s = \sigma_s [\omega t + \psi_s(\omega t)] \quad (s = 1, \ldots, k), \qquad x_r = x_r(\omega t) \quad (r = 1, \ldots, \nu) \tag{1.1}$$

где ψ_s и x_r — периодические функции времени с периодом $2\pi/\omega$, $\sigma_s = \pm 1$.

Исходное приближение (порождающее решение) при рассмотрении задачи об исследовании синхронных движений вибраторов с равными и положительными парциальными скоростями вдали от резонанса методами Пуанкаре и Ляпунова [2,3]

$$\varphi_s^{(0)} = \sigma_s(\omega t + \alpha_s), \qquad x_r^{(0)} = x_r^{(0)}(\omega t) \tag{1.2}$$

как нетрудно убедиться, удовлетворяет уравнениям[1]

$$\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_r} - \frac{\partial L}{\partial x_r}\right]_0 = 0 \qquad (r = 1, \ldots, \nu) \tag{1.3}$$

$$\sigma_s \frac{\omega}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi/\omega}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_s} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_s}\right]_0 dt \equiv W_s(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = 0 \qquad (s = 1, \ldots, k) \tag{1.4}$$

где $L = L(x_1, \ldots, x_\nu; \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_\nu; \varphi_1, \ldots, \varphi_k, \dot{\varphi}_1, \ldots, \dot{\varphi}_k)$ — функция Лагранжа системы, а W_s — величины, названные в [3] вибрационными моментами; L есть периодическая функция φ_3 с периодом 2π. Из последних k уравнений определяются (с точностью до аддитивной постоянной) значения «порождающих фаз» $\alpha_s = \alpha_s^*$, которым могут отвечать синхронные движения.

2. Прежде чем обратиться к доказательству предложения работы [1], докажем более общее утверждение, которое может быть использовано с небольшими видоизменениями и при решении других нелинейных задач.

Покажем, что уравнения (1.4) для определения порождающих фаз α_s^* совпадают с условиями стационарности среднего за период $2\pi/\omega$ значения функции Лагранжа всей системы, вычисленной для порождающего решения (1.2)

$$\Lambda = \Lambda(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \frac{\omega}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi/\omega}[L]_0\, dt \tag{2.1}$$

а условия устойчивости синхронных движений, найденные методами Пуанкаре и Ляпунова [2,3], в случае вибраторов, обладающих одинаковыми положительными парциальными скоростями, получаются из требования, чтобы значения

[1] Квадратные скобки с индексом 0 означают, что заключенные в них функции обобщенных координат вычисляются для порождающего решения (1.2).

фаз α_s^*, отвечающие рассматриваемому синхронному движению, сообщали максимум функции $\Lambda(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$.

Вычислим производную $\partial\Lambda/\partial\alpha_s$. В результате несложных преобразований, включающих интегрирование по частям, при учете соотношений (1.3), (1.4) и периодичности решения (1.2), получаем

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\alpha_s} = \frac{\omega}{2\pi}\sum_{j=1}^{\nu}\int_0^{2\pi/\omega}\left\{\left[\frac{\partial L}{\partial x_j}\right]_0\frac{\partial x_j^{(0)}}{\partial\alpha_s} + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\right]_0\frac{\partial \dot{x}_j^{(0)}}{\partial\alpha_s}\right\}dt + \frac{\omega}{2\pi}\sum_{j=1}^{k}\int_0^{2\pi/\omega}\left\{\left[\frac{\partial L}{\partial \varphi_j}\right]_0\frac{\partial \varphi_j^{(0)}}{\partial\alpha_s} +\right.$$

$$\left.+\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_j}\right]_0\frac{\partial \dot{\varphi}_j^{(0)}}{\partial\alpha_s}\right\}dt = \frac{\omega}{2\pi}\sum_{j=1}^{k}\int_0^{2\pi/\omega}\left[\frac{\partial L}{\partial x_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\right]_0\frac{\partial x_j^{(0)}}{\partial\alpha_s}dt + \frac{\omega}{2\pi}\sum_{j=1}^{\nu}\int_0^{2\pi/\omega}\left[\frac{\partial L}{\partial \varphi_j} -\right.$$

$$\left.-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_j}\right]_0\frac{\partial \varphi_j^{(0)}}{\partial\alpha_s}dt = \sigma_s\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega}\left[\frac{\partial L}{\partial \varphi_s} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_s}\right]_0 dt = -W_s(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \qquad (2.2)$$

Таким образом, условия $\partial\Lambda/\partial\alpha_s = 0$ совпадают с уравнениями (1.4), и первая часть предложения доказана.

Для доказательства второй его части разложим функцию $\Lambda(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ в степенной ряд вблизи точки, соответствующей изучаемому решению $\alpha_1^*, \ldots, \alpha_k^*$ уравнений (1.4); в силу (2.2) и (1.4) линейные члены этого ряда обращаются в нуль и

$$\Lambda(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) - \Lambda(\alpha_1^*, \ldots, \alpha_k^*) = -\sum_{r=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial W_r}{\partial\alpha}\right)_{\alpha=\alpha^*}(\alpha_r - \alpha_r^*)(\alpha_j - \alpha_j^*) + \ldots \qquad (2.3)$$

где невыписанные слагаемые имеют относительно $\alpha_1 - \alpha_1^*, \ldots, \alpha_k - \alpha_k^*$ порядок выше второго. Для того чтобы функция Λ в точке $(\alpha_1^*, \ldots, \alpha_k^*)$ имела максимум, достаточно, чтобы квадратичная форма

$$\Phi = -\sum_{r=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial W_r}{\partial\alpha_j}\right)_{\alpha=\alpha^*}(\alpha_r - \alpha_r^*)(\alpha_j - \alpha_j^*) \qquad (2.4)$$

была знакоопределенной отрицательной; для этого необходимо и достаточно [4], чтобы все корни алгебраического уравнения k-й степени (δ_{rj} — символ Кронекера)

$$\left|-\left(\frac{\partial W_r}{\partial\alpha_j}\right)_{\alpha=\alpha^*} - \delta_{rj}z\right| = 0 \qquad (r, j = 1, \ldots, k) \qquad (2.5)$$

были отрицательны; заметим, что все корни уравнения (2.5) вещественны, так как

$$\left(\frac{\partial W_r}{\partial\alpha_j}\right)_{\alpha=\alpha^*} = \left(\frac{\partial W_j}{\partial\alpha_r}\right)_{\alpha=\alpha^*} = -\left(\frac{\partial^2\Lambda}{\partial\alpha_r\,\partial\alpha_j}\right)_{\alpha=\alpha^*}$$

Если хотя бы один из корней уравнения (2.5) положителен, то форма (2.4) не является знакоопределенной и максимум отсутствует; случай, когда имеются корни, равные нулю, является сомнительным и требует, вообще говоря, изучения членов разложения (2.3), имеющих более высокий порядок.

Заметим, что вследствие автономности исходной системы уравнений постоянные α_s входят в выражения Λ и W_s только в виде разностей $\alpha_r - \alpha_s$ и поэтому указанные выражения не изменятся, если все α_r^* заменить на $\alpha_r^* + \alpha_0$, где α_0 — произвольная постоянная. Поэтому функция Λ не изменяется вдоль гиперпрямой $\alpha_1 = \alpha_1^* + \alpha_0, \ldots, \alpha_k = \alpha_k^* + \alpha_0$ и уравнение (2.5) в рассматриваемом случае всегда имеет один корень, равный нулю, не влияющий, однако, на суждение о характере стационарной точки. Поэтому достаточным условием максимума функции Λ является требование отрицательности остальных $k-1$ корней уравнения (2.5); при наличии хотя бы одного положительного корня максимум не имеет места; случай более одного нулевого корня является сомнительным. Но последние условия, в рассматриваемом случае являются как раз условиями устойчивости синхронного движения, полученными методами Ляпунова и Пуанкаре [2,3].

Таким образом, доказана и вторая часть высказанного предложения.

Замечание. Наличие корня $z=0$ в рассмотренном случае можно доказать и непосредственно, если продифференцировать тождество

$$W_r(\alpha_1^*+\alpha_0,\ldots,\alpha_k^*+\alpha_0)\equiv W_r(\alpha_1^*,\ldots,\alpha_k^*)$$

по α_0, положив затем $\alpha_0=0$. Тогда получим соотношение

$$\sum_{s=1}^{k}(\partial W_r/\partial\alpha_s)_{\alpha=\alpha^*}\equiv 0$$

из которого следует, что если прибавить к элементам какого-либо столбца определителя (2.5) элементы всех других столбцов, то получится столбец с элементами, равными — z.

Заметим, что если стационарность функции Λ для возможных синхронных движений по существу вытекает из принципа Гамильтона, так как Λ отличается от действия по Гамильтону для соответствующей системы лишь постоянным множителем, то суждение о характере стационарной точки в данном случае не может быть получено, исходя из принципа Гамильтона, так как действие берется за конечный, а не за достаточно малый промежуток времени [5].

3. Для доказательства предложения, приведенного в работе [1], как вытекает из равенства (2.3), теперь достаточно доказать соотношение

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\alpha_s}=-\frac{\partial\Lambda_0}{\partial\alpha_s}=-W_s(\alpha_1,\ldots,\alpha_k) \tag{3.1}$$

где Λ_0 — среднее за период $2\pi/\omega$ значение функции Лагранжа L_0 вспомогательных тел, вычисленной для решения (1.2). Представив функцию Лагранжа L в виде

$$L=L_0+L_1 \tag{3.2}$$

заметим, что L_0 является квадратичной формой от $x_1,\ldots,x_\nu$ и $\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_\nu$, а L_1 в рассматриваемых задачах есть сумма квадратичной формы переменных $\dot{\varphi}_1,\ldots,\dot{\varphi}_k$, линейной формы от $\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_\nu$ с коэффициентами, зависящими от $\varphi_1,\ldots,\varphi_k$ и $\dot{\varphi}_1,\ldots,\dot{\varphi}_k$ и периодической (с периодом 2π) функции только координат $\varphi_1,\ldots,\varphi_k$, среднее значение которой за период равно нулю.

В силу сказанного имеем

$$\int_0^{2\pi/\omega}\sum_{j=1}^{\nu}\dot{x}_j^{(0)}\left[\frac{\partial L_1}{\partial\dot{x}_j}\right]_0 dt=\int_0^{2\pi/\omega}[L_1]_0\,dt+B,\qquad \sum_{j=1}^{\nu}\left(\dot{x}_j\frac{\partial L_0}{\partial\dot{x}_j}+x_j\frac{\partial L_0}{\partial x_j}\right)=2L_0 \tag{3.3}$$

где B — величина, не зависящая от $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$. Дифференцируя эти тождества, взятые для решения (1.2), по α_s, получаем после сокращений соотношения

$$\int_0^{2\pi/\omega}\sum_{j=1}^{\nu}\dot{x}_j^{(0)}\frac{\partial}{\partial\alpha_s}\left[\frac{\partial L_1}{\partial\dot{x}_j}\right]_0 dt=\int_0^{2\pi/\omega}\sum_{j=1}^{k}\left\{\left[\frac{\partial L_1}{\partial\varphi_j}\right]_0\frac{\partial\varphi_j^{(0)}}{\partial\alpha_s}+\left[\frac{\partial L_1}{\partial\dot{\varphi}_j}\right]_0\frac{\partial\dot{\varphi}_j^{(0)}}{\partial\alpha_s}\right\}dt \tag{3.4}$$

$$\sum_{j=1}^{\nu}\left\{x_j^{(0)}\frac{\partial}{\partial\alpha_s}\left[\frac{\partial L_0}{\partial x_j}\right]_0+\dot{x}_j^{(0)}\frac{\partial}{\partial\alpha_s}\left[\frac{\partial L_0}{\partial\dot{x}_j}\right]_0\right\}=\sum_{j=1}^{\nu}\left\{\left[\frac{\partial L_0}{\partial x_j}\right]_0\frac{\partial x_j^{(0)}}{\partial\alpha_s}+\left[\frac{\partial L_0}{\partial\dot{x}_j}\right]_0\frac{\partial\dot{x}_j^{(0)}}{\partial\alpha_s}\right\}$$

Используя эти равенства, получаем в соответствии с (2.2)

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\alpha_s}=\frac{\omega}{2\pi}\sum_{j=1}^{k}\int_0^{2\pi/\omega}\left\{\left[\frac{\partial L}{\partial\varphi_j}\right]_0\frac{\partial\varphi_j^{(0)}}{\partial\alpha_s}+\left[\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_j}\right]_0\frac{\partial\dot{\varphi}_j^{(0)}}{\partial\alpha_s}\right\}dt=\frac{\omega}{2\pi}\sum_{j=1}^{\nu}\int_0^{2\pi/\omega}\dot{x}_j^{(0)}\frac{\partial}{\partial\alpha_s}\left[\frac{\partial L_1}{\partial\dot{x}_j}\right]_0 dt$$

$$\frac{\partial\Lambda_0}{\partial\alpha_s}=\frac{\omega}{2\pi}\sum_{j=1}^{\nu}\int_0^{2\pi/\omega}\left\{\left[\frac{\partial L_0}{\partial x_j}\right]_0\frac{\partial x_j^{(0)}}{\partial\alpha_s}+\left[\frac{\partial L_0}{\partial\dot{x}_j}\right]_0\frac{\partial\dot{x}_j^{(0)}}{\partial\alpha_s}\right\}dt= \tag{3.5}$$

$$=\frac{\omega}{2\pi}\sum_{j=1}^{\nu}\int_0^{2\pi/\omega}\left\{x_j^{(0)}\frac{\partial}{\partial\alpha_s}\left[\frac{\partial L_0}{\partial x_j}\right]_0+\dot{x}_j^{(0)}\frac{\partial}{\partial\alpha_s}\left[\frac{\partial L_0}{\partial\dot{x}_j}\right]_0\right\}dt$$

Отсюда при учете (1.2) и (1.3) находим

$$\frac{\partial(\Lambda_0+\Lambda)}{\partial\alpha_s}=\frac{\omega}{2\pi}\sum_{j=1}^{\nu}\int_0^{2\pi/\omega}\left\{x_j^{(0)}\frac{\partial}{\partial\alpha_s}\left[\frac{\partial L_0}{\partial x_j}\right]_0+\dot{x}_j^{(0)}\frac{\partial}{\partial\alpha_s}\left[\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_j}\right]_0\right\}dt=$$

$$=\frac{\omega}{2\pi}\sum_{j=1}^{\nu}\int_0^{2\pi/\omega}\left\{x_j^{(0)}\frac{\partial}{\partial\alpha_s}\left[\frac{\partial L}{\partial x_j}\right]_0+\dot{x}_j^{(0)}\frac{\partial}{\partial\alpha_s}\left[\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_j}\right]_0\right\}dt=$$

$$=\frac{\omega}{2\pi}\sum_{j=1}^{\nu}\int_0^{2\pi/\omega}\frac{d}{dt}\left\{x_j^{(0)}\frac{\partial}{\partial\alpha_s}\left[\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_j}\right]_0\right\}dt=0 \tag{3.6}$$

Таким образом, равенство (3.1) доказано. Тем самым установлено совпадение условия стационарности функции $\Lambda_0(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$ с уравнениями (1.4) для определения порождающих фаз $\alpha_s=\alpha_s^*$, а условия минимума этой функции — с условиями устойчивости соответствующего синхронного движения.

Поступила 6 VI 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Блехман И. И., Лавров Б. П. Об одном интегральном признаке устойчивости движения. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 5.
2. Блехман И. И. О самосинхронизации механических вибраторов. Изв. АН СССР. ОТН, 1958, № 6.
3. Блехман И. И. Динамика привода вибрационных машин со многими вибраторами. Изв. АН СССР. ОТН. «Механика и машиностроение», 1960, № 1.
4. Гантмахер Ф. Р. и Крейн М. Г. Осцилляционные матрицы и малые колебания механических систем. ГТТИ, 1950.
5. Джанелидзе Г. Ю., Лурье А. И. О применении интегральных и вариационных принципов механики в задачах колебаний. ПММ, 1960, т. XXVI, вып. 1.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

А. П. Проскуряков (Москва)

1. Рассмотрим квазилинейную колебательную систему с двумя степенями свободы

$$\begin{aligned}a_{11}\ddot{x}_1+a_{12}\ddot{x}_2+c_{11}x_1+c_{12}x_2&=\mu F_1(x_1,x_2,\dot{x}_1\dot{x}_2,\mu)\\ a_{21}\ddot{x}_1+a_{22}\ddot{x}_2+c_{21}x_1+c_{22}x_2&=\mu F_2(x_1,x_2,\dot{x}_1,\dot{x}_2,\mu)\end{aligned} \tag{1.1}$$

Функции F_1 и F_2 предполагаются аналитическими от своих аргументов в некоторой области их изменения. Величина μ является малым параметром. Порождающая система (при $\mu=0$) представляет собой линейную консервативную систему с постоянными коэффициентами, причем $a_{12}=a_{21}$, $c_{12}=c_{21}$.

Предположим, что уравнение частот порождающей системы

$$\begin{vmatrix} c_{11}-\omega^2a_{11} & c_{12}-\omega^2a_{12}\\ c_{21}-\omega^2a_{21} & c_{22}-\omega^2a_{22}\end{vmatrix}=0 \tag{1.2}$$

имеет только положительные корни. При этом возможны три случая: частоты колебаний — разные и соизмеримые; разные, но несоизмеримые; равные.

2. Остановимся подробнее на случае разных и соизмеримых частот. Пусть $m_1\omega_1=m_2\omega_2$, где m_1 и m_2 — целые положительные числа. В этом случае существует периодическое решение порождающей системы с частотой ω_0 и периодом T_0

$$\omega_0=\frac{\omega_1}{m_2}=\frac{\omega_2}{m_1},\qquad T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}$$

Предположим, что исходная нелинейная система (1.1) имеет периодическое решение с периодом $T=T_0+\alpha$, обращающееся в порождающее при $\mu=0$. Построим это решение.