Прикладная математика и механика. Том XXIV, 1960
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

РАЗВИТИЕ ВОЛН, ОБРАЗУЕМЫХ КОЛЕБАНИЯМИ ПОЛОСЫ

Л. В. Черкесов

(Москва)

Исследуется развитие волнового процесса, вызванного колебаниями полосы погруженной в жидкость; находится вид образующихся незатухающих волн, вычисляется энергия этих волн и сравнивается с энергией колеблющейся полосы.

Аналогичная задача для случая установившегося движения рассмотрена Эльбласом [1].

§ 1. Пусть жидкость заполняет часть пространства $y > 0$, $z < 0$. В плоскости $y = 0$ от $z = 0$ до $z = -h$ помещена полоса, которая, начиная с момента времени $t = 0$, совершает колебания по закону $y = a \exp[i(kx - \omega t)]$. Продолжением этой полосы от $z = -h$ до $z = -\infty$ является твердая неподвижная стенка. В начальный момент времени $t = 0$ жидкость покоится, а ее свободная поверхность горизонтальна.

Поставим своей задачей найти вид свободной поверхности жидкости в любой момент времени $t > 0$. Потенциал скорости $\varphi\ (x, y, z, t)$ искомого волнового движения должен удовлетворять уравнениям

$$\Delta\varphi = 0 \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = 0, \qquad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{y=0} = \begin{cases} 0 & (z < -h) \\ ai\omega e^{i(kx - \omega t)} & (z > -h) \end{cases} \tag{1.2}$$

$$\varphi(x, y, 0, 0) = 0, \qquad \frac{\partial\varphi(x, y, 0, 0)}{\partial t} = 0 \tag{1.3}$$

Найдем функцию $\varphi_1(x, y, z, t)$, удовлетворяющую условиям (1.1) — (1.2); для этого представим ее в виде

$$\varphi_1(x, y, z, t) = \varkappa(y, z)\, e^{i(kx - \omega t)} \tag{1.4}$$

Тогда $\varkappa(y, z)$ должна удовлетворять таким уравнениям

$$\frac{\partial^2\varkappa}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varkappa}{\partial z^2} - k^2\varkappa = 0 \tag{1.5}$$

$$\sigma\varkappa - \frac{\partial\varkappa}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = 0 \quad (\sigma = \omega^2 g^{-1}) \tag{1.6}$$

$$\left(\frac{\partial\varkappa}{\partial y}\right)_{y=0} = \begin{cases} 0 & (z < -h) \\ ai\omega & (z > -h) \end{cases} \tag{1.7}$$

Представляя $\varkappa(y, z)$ в виде

$$\varkappa(y, z) = ce^{[iy\sqrt{\sigma^2 - k^2} + \sigma z]} + \int_0^\infty A(\mu)\, e^{-y\sqrt{\mu^2 + k^2}} (\mu \cos \mu z + \sigma \sin \mu z)\, d\mu \quad (\sigma > k) \tag{1.8}$$

видим, что $\varkappa(y, z)$ при произвольных c и $A(\mu)$ удовлетворяет уравнениям (1.5) и (1.6).

Удовлетворяя условию (1.7), имеем (1.9)

$$i\sqrt{\sigma^2-k^2}ce^{\sigma z}-\int\limits_0^\infty A(\mu)\sqrt{\mu^2+k^2}(\mu\cos\mu z+\sigma\sin\mu z)\,d\mu=\begin{cases}0 & (z<-h)\\ ai\omega & (z>-h)\end{cases}$$

Используя решение этого уравнения, данное в работе [2], получим

$$c=\frac{2a\omega}{\sqrt{\sigma^2-k^2}}(1-e^{-\sigma h}),\qquad A(\mu)=\frac{2ai\omega\,[\sigma(1-\cos\mu h)-\mu\sin\mu h]}{\pi\mu\sqrt{\mu^2+k^2}(\mu^2+\sigma^2)}\tag{1.10}$$

Поэтому

$$\zeta_1=\frac{1}{g}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\right)_{z=0}=-\frac{i\omega}{g}e^{i(kx-\omega t)}\left\{ce^{iy\sqrt{\sigma^2-k^2}}+\int\limits_0^\infty\mu A(\mu)\,e^{-y\sqrt{\mu^2+k^2}}d\mu\right\}\tag{1.11}$$

где $A(\mu)$ и c даются формулами (1.10). Представим потенциал скорости $\varphi\ (x,y,z,t)$ в виде суммы трех слагаемых

$$\varphi(x,y,z,t)=\varphi_1(x,y,z,t)+\varphi_2(x,y,z,t)+\varphi_3(x,y,z,t)\tag{1.12}$$

Здесь

$$\varphi_2=\int\limits_0^\infty B(m)\cos my\exp\{i[kx-\vartheta(m)t]+z\sqrt{k^2+m^2}\}\,dm\tag{1.13}$$

$$\varphi_3=\int\limits_0^\infty D(m)\cos my\exp\{i[kx+\vartheta(m)t]+z\sqrt{k^2+m^2}\}\,dm\tag{1.14}$$

$$\vartheta(m)=\sqrt[4]{g^2(k^2+m^2)}$$

Очевидно, что φ_2 и φ_3 при произвольных $B(m)$ и $D(m)$ удовлетворяют условию (1.1), первому уравнению условия (1.2), и второму — с нулевой правой частью. Удовлетворяя условиям (1.3), приходим к следующим уравнениям для определения $B(m)$ и $D(m)$.

$$\int\limits_0^\infty[B(m)+D(m)]\cos my\,dm=-\varkappa(y,0)$$

$$\int\limits_0^\infty[B(m)-D(m)]\,\vartheta(m)\cos my\,dm=-\omega\varkappa(y,0)$$

Отсюда

$$B(m)=-\frac{\omega+\vartheta(m)}{\pi\vartheta(m)}(J_1+J_2),\qquad D(m)=\frac{\omega-\vartheta(m)}{\pi\vartheta(m)}(J_1+J_2)\tag{1.15}$$

где

$$J_1=c\int\limits_0^\infty e^{iy\sqrt{\sigma^2-k^2}}\cos my\,dy,\qquad J_2=\int\limits_0^\infty\cos my\,dy\int\limits_0^\infty\mu A(\mu)\,e^{-y\sqrt{\mu^2+k^2}}\,d\mu$$

Проводя вычисления, находим

$$B(m)=B_1(m)+B_2(m)$$

где

$$B_1(m)=-\frac{c}{2}\frac{\omega+\vartheta(m)}{\vartheta(m)}\left[\delta(q_1)+\frac{i}{\pi}P(q_1^{-1})+\delta(q_2)+\frac{i}{\pi}P(q_2^{-1})\right]\tag{1.16}$$

$$q_1=m+\sqrt{\sigma^2-k^2},\qquad q_2=-m+\sqrt{\sigma^2-k^2}$$

$$B_2(m)=-\frac{\omega+\vartheta(m)}{\vartheta(m)}\int\limits_0^\infty\frac{\mu A(\mu)\sqrt{\mu^2+k^2}}{m^2+\mu^2+k^2}\,d\mu\tag{1.17}$$

Здесь δ — дельта-функция Дирака, P — символ главного значения интеграла. Теперь из (1.13) получаем

$$\varphi_2(x, y, z, t) = \varphi_{21}(x, y, z, t) + \varphi_{22}(x, y, z, t)$$

при этом

$$\varphi_{21} = \int_0^\infty B_1(m) \cos my \exp\{i[kx - \vartheta(m)t] + z\sqrt{k^2+m^2}\}\, dm$$

$$\varphi_{22} = \int_0^\infty B_2(m) \cos my \exp\{i[kx - \vartheta(m)t] + z\sqrt{k^2+m^2}\}\, dm$$

Отсюда

$$\zeta_2 = \frac{1}{g}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}\right)_{z=0} = \zeta_{21} + \zeta_{22} \tag{1.18}$$

где

$$\zeta_{21} = \frac{ic}{2g} e^{ikx}\Big\{2\omega \cos\sqrt{\sigma^2 - k^2}\, y e^{-i\omega t} + \tag{1.19}$$

$$+ \frac{i\sqrt{gk(\sigma^2 - k^2)}}{\pi k} P \int_0^\infty \frac{\omega_1 + \sqrt[4]{1+n^2}}{\sigma_1^2 - n^2 - 1}\left[e^{kyM_1(n)} + e^{kyM_2(n)}\right] dn\Big\}$$

$$\zeta_{22} = \frac{ik\sqrt{gk}}{2g} e^{ikx} \int_0^\infty \left(\omega_1 + \sqrt[4]{1+n^2}\right) \int_0^\infty \frac{\mu A(\mu)\sqrt{\mu^2+k^2}}{k^2n^2 + \mu^2 + k^2}\, d\mu \left[e^{kyM_1(n)} + e^{kyM_2(n)}\right] dn \tag{1.20}$$

$$M_1(n) = i\left(n - \nu\sqrt[4]{1+n^2}\right), \qquad M_2(n) = -i\left(n + \nu\sqrt[4]{1+n^2}\right)$$

$$\nu = ty^{-1}g^{1/2}k^{-1/2}, \qquad \sigma_1 = \sigma k^{-1}, \qquad \omega_1 = \omega(gk)^{-1/2}$$

Аналогично получаем

$$\zeta_3 = \frac{1}{g}\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial t}\right)_{z=0} = \zeta_{31} + \zeta_{32} \tag{1.21}$$

причем

$$\zeta_{31} = -\frac{c\sqrt{\sigma^2 - k^2}}{2\pi\sqrt{gk}} e^{ikx} P \int_0^\infty \frac{\omega_1 - \sqrt[4]{1+n^2}}{\sigma_1^2 - n^2 - 1}\left[e^{-kyM_1(n)} + e^{-kyM_2(n)}\right] dn \tag{1.22}$$

$$\zeta_{32} = \frac{ik\sqrt{gk}}{2g} e^{ikx} \int_0^\infty \left(\omega_1 - \sqrt[4]{1+n^2}\right) \int_0^\infty \frac{\mu A(\mu)\sqrt{\mu^2+k^2}}{k^2n^2 + \mu^2 + k^2}\, d\mu \left[e^{-kyM_1(n)} + e^{-kyM_2(n)}\right] dn \tag{1.23}$$

Итак, уравнение свободной поверхности жидкости в любой момент времени $t > 0$ имеет вид

$$\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3$$

где ζ_1, ζ_2, ζ_3 представляются соответственно формулами (1.12), (1.18), (1.21).

§ **2.** Перейдем к исследованию полученного решения. Применяя для исследования интегралов, входящих в выражение (19), метод стационарных фаз при больших значениях ky, видим, что подынтегральное выражение второго интеграла на положительной действительной оси не имеет стационарных точек, так как здесь $M_2'(n)$ не обращается в нуль, и что $\operatorname{Re} M_2(n) \leqslant 0$ на контуре L_1, состоящем из положительной действительной оси с обходом полюса $n = n^0 = \sqrt{\sigma_1^2 - 1}$ по полуокружности, лежащей в нижней полуплоскости. Поэтому

$$P\int_0^\infty f(n)\, e^{kyM_1(n)}dn = \int_{(L_1)} f(n)\, e^{kyM_1(n)}dn + \frac{i\pi k}{\sqrt{(\sigma^2-k^2)\,gk}}\, e^{-i(y\sqrt{\sigma^2-k^2}+\omega t)} \tag{2.1}$$

где

$$f(n) = \frac{\omega_1 + \sqrt[4]{1+n^2}}{\sigma_1^2 - n^2 - 1}$$

Введем обозначения

$$\nu_0 = \sqrt[4]{108}, \qquad \nu^0 = \frac{2\omega_1^3}{\sqrt{\omega_1^4 - 1}}$$

Легко видеть, что уравнение $M_1'(n) = 0$ для $\nu < \nu_0$ не имеет положительных корней, а для $\nu > \nu_0$ имеет два различных положительных корня; при этом $\operatorname{Re} M_1(n) \leqslant 0$ для $\nu < \nu^0$ на контуре L_2, состоящем из положительной действительной оси с обходом полюса по верхней полуокружности, а для $\nu > \nu^0$ на контуре L_1. Проводя вычисление вычета с учетом направления обхода полюса, получаем следующее значение первого интеграла формулы (1.19)

$$P\int_0^\infty f(n)\, e^{kyM_1(n)}dn = \begin{cases} -J + J_3(L_2) & (\nu < \nu^0) \\ J + J_3(L_1) & (\nu > \nu^0) \end{cases} \tag{2.2}$$

где

$$J = \frac{i\pi k}{\sqrt{(\sigma^2-k^2)\,gk}}\, e^{i(y\sqrt{\sigma^2-k^2}-\omega t)}, \quad J_3(L) = \int_{(L)} f(n)\, e^{kyM_1(n)}dn \tag{2.3}$$

Применяя для оценки интегралов вида (2.3) при больших значениях ky метод Кельвина (см., например, [3]), получаем из формул (1.19), (2.1) и (2.2) такое значение для ζ_{21}

$$\zeta_{21} = \begin{cases} icg^{-1}\omega \exp\left[i\left(kx + y\sqrt{\sigma^2-k^2} - \omega t\right)\right] + J_4 & (\nu < \nu^0) \\ J_4 & (\nu > \nu^0) \end{cases} \tag{2.4}$$

где

$$J_4 = O\left[(ky)^{-1}\right] \text{ при } \nu < \nu_0, \quad J_4 = O\left[(ky)^{-1/2}\right] \text{ при } \nu > \nu_0$$

Перейдем к исследованию формулы (1.20). Подынтегральное выражение в этой формуле как функция переменного n не имеет особенностей на действительной оси, поэтому, используя результаты проведенного нами исследования выражений $M_1(n)$ и $M_2(n)$, имеем такое асимптотическое значение для ζ_{22} при больших значениях ky

$$\zeta_{22} = O\left[(ky)^{-1}\right] \text{ при } \nu < \nu_0, \qquad \zeta_{22} = O\left[(ky)^{-1/2}\right] \text{ при } \nu > \nu_0 \tag{2.5}$$

Переходя к исследованию выражения ζ_3, заметим, что существенное отличие выражения (1.22) от исследованного нами интегрального слагаемого формулы (1.19) состоит в том, что подынтегральное выражение в (1.22) не имеет полюсов на действительной оси, и поэтому здесь символ главного значения интеграла теряет свой смысл, а интегрирование ведется вдоль положительной действительной оси. Применяя для оценки выражения (1.22) при больших значениях ky метод Кельвииа, имеем

$$\zeta_{31} = O\left[(ky)^{-1}\right] \text{ при } \nu < \nu_0, \qquad \zeta_{31} = O\left[(ky)^{-1/2}\right] \text{ при } \nu > \nu_0 \tag{2.6}$$

Исследование выражения ζ_{32} проводится совершенно аналогично исследованию выражения ζ_{22} и приводит к такому результату

$$\zeta_{32} = O[(ky)^{-1}] \quad \text{при } \nu < \nu_0, \qquad \zeta_{32} = O[(ky)^{-1/2}] \quad \text{при } \nu > \nu_0 \tag{2.7}$$

Обозначим через y_1 то значение y, начиная с которого справедливы наши асимптотические формулы, и введем дополнительные обозначения

$$v_1 = \sqrt{\frac{g}{2k\sqrt{27}}}, \quad v_2 = \frac{g\sqrt{\omega^4 - k^2g^2}}{2\omega^3}, \quad t_1 = \frac{y_1}{v_1}, \quad t_2 = \frac{y_1}{v_2}$$

тогда формулы (1.12), (2.4) — (2.7) для возвышения жидкости в области $y > y_1$ дают следующие выражения

1) Волны вида

$$\zeta = O[(ky)^{-1}] \qquad \begin{cases} \text{для } t < t_1 & \text{в обл. } y > y_1 \\ \text{для } t > t_1 & \text{в обл. } y > v_1 t \end{cases} \tag{2.8}$$

2) Волны вида

$$\zeta = O[(ky)^{-1/2}] \qquad \begin{cases} \text{для } t_2 > t > t_1 & \text{в обл. } y_1 < y < v_1 t \\ \text{для } t > t_2 & \text{в обл. } v_2 t < y < v_1 t \end{cases} \tag{2.9}$$

3) Волны вида

$$\zeta = \frac{2a\omega^2}{g\sqrt{\sigma^2 - k^2}}(1 - e^{-\sigma h})\sin(kx + y\sqrt{\sigma^2 - k^2} - \omega t) \quad \begin{matrix} \text{для } t > t_2 \text{ в} \\ \text{обл. } y_1 < y < v_2 t \end{matrix} \tag{2.10}$$

Результаты проведенного исследования, выражаемые формулами (2.8)—(2.10), показывают, что в рассматриваемом случае на поверхности жидкости в области $y \geqslant y_1$ для моментов времени $t < t_2$ распространяются волны, амплитуда которых убывает с увеличением расстояния от колеблющейся полосы. Для моментов времени $t > t_2$ представляется следующая картина движения поверхностных волн: в области $y_1 < y < v_2 t$ образуются устанавливающиеся плоские прогрессивные волны вида (2.10), передний фронт которых перемещается вдоль оси y со скоростью v_2, равной проекции групповой скорости волн на ось y; в области $v_2 t < y < v_1 t$ распространяются затухающие волны вида (2.9), передний фронт которых перемещается со скоростью v_1, а задний со скоростью v_2 в положительном направлении оси y; область $y > v_1 t$ заполнена затухающими волнами вида (2.8), задний фронт которых перемещается вдоль оси y со скоростью v_1.

§ 3. Найдем выражение работы, которую совершает колеблющаяся в жидкости полоса. Работа полосы на длине волны полосы в момент времени t представляется в виде суммы трех слагаемых

$$W = W_1 + W_2 + W_3$$

где

$$W_1 = \int_{-h}^{0} dz \int_{x}^{x+2\pi k^{-1}} \rho\left[\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\right)_{y=0} - gz + \frac{p_0}{\rho}\right] a\omega \sin(kx - \omega t)\, dx \tag{3.1}$$

$$W_j = \int_{-h}^{0} dz \int_{x}^{x+2\pi k^{-1}} \rho\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial t}\right)_{y=0} a\omega \sin(kx - \omega t)\, dx \qquad (j = 2,\ 3) \tag{3.2}$$

Так как

$$\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}\right)_{y=0} = -i\int_0^\infty B(m)\,\vartheta(m)\exp[ikx + Q(m)t + z\sqrt{k^2 + m^2}]\,dm$$

где $Q(m) = -i\vartheta(m)$ то, подставляя вместо $B(m)$ его значение, даваемое формулами (1.16) и (1.17), и, учитывая, что $\operatorname{Re} Q(m) \leqslant 0$ на контуре L_1, получаем

$$W_2 = ic\sqrt{\sigma^2 - k^2} \int\limits_{(L_1)} \frac{\psi(m)}{\sigma^2 - k^2 - m^2} e^{tQ(m)} dm +$$

$$+ \int\limits_0^\infty \psi(m) \int\limits_0^\infty \frac{\mu A(\mu)\sqrt{\mu^2 + k^2}}{\mu^2 + k^2 + m^2} d\mu e^{tQ(m)} dm \tag{3.3}$$

при этом

$$\psi(m) = -\frac{\rho a\omega\left[1 - e^{-h\sqrt{k^2+m^2}}\right][\omega + \vartheta(m)]}{k\sqrt{k^2 + m^2}} e^{i\omega t}$$

Оценивая выражение (3.3) и аналогичное выражение W_3 для больших значений времени t, имеем

$$W_2 = O(t^{-1/2}), \quad W_3 = O(t^{-1/2})$$

Перейдем к вычислению W_1. Так как

$$\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\right)_{y=0} = -i\omega e^{i(kx-\omega t)}\left[ce^{\sigma z} + \int\limits_0^\infty A(\mu)(\mu\cos\mu z + \sigma\sin\mu z)\, d\mu\right]$$

то, подставляя это выражение в формулу (3.1), находим

$$W_1 = \frac{\pi c a\omega^2\rho}{\sigma k}(1 - e^{-\sigma h})$$

Отсюда получаем, что работа E, совершаемая полосой на длине волны полосы за период колебания полосы, имеет с точностью до величин порядка $t^{-1/2}$ такой вид

$$E = \int\limits_t^{t+2\pi\omega^{-1}} W_1 dt = \frac{\pi^2 c^2 \rho\sqrt{\sigma^2 - k^2}}{\sigma k} \tag{3.4}$$

Подсчитаем теперь энергию, которая уносится устанавливающимися волнами вида (2.10), которые запишем так:

$$\zeta = N\sin(\sigma x' - \omega t); \qquad \cos\alpha = \frac{\sqrt{\omega^4 - k^2 g^2}}{\omega^2}, \qquad N = \frac{c\omega}{g}$$

где направление x' составляет с осью y угол α.

Энергия E_1, переносимая этими волнами за период времени $2\pi\omega^{-1}$ через плоскость шириной $2\pi k^{-1}\cos\alpha$, перпендикулярную к направлению распространения волн, выражается так

$$E_1 = \frac{\pi N^2 \rho g\lambda\cos\alpha}{2} = \frac{\pi^2 c^2 \rho\sqrt{\sigma^2 - k^2}}{\sigma k} \tag{3.5}$$

Сравнивая формулы (3.4) и (3.5), приходим к выводу, что для больших значений времени t энергия полосы полностью идет на образование незатухающих волн.

Автор приносит глубокую благодарность Л. Н. Сретенскому за ценные советы при выполнении настоящей работы.

Поступила 31 VII 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Albl a s J. B. On the generation of water waves by a vibrating strip Appl. Scient. Res. 5A, 1958, № 2—3.
2. Черкесов Л. В. О волнах на поверхности жидкости. Изв. АН СССР, ОТН, 1959, № 2.
3. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. ОНТИ, 1936.