Прикладная математика и механика. Том XXIV, 1960
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

О ТЕНЗОРНОМ МЕТОДЕ В ТЕОРИИ НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ ТИПА «ДВОЙНОЙ ВОЛНЫ»

Ю. Бондер

(Варшава)

Рассматривается обширный класс неустановившихся пространственных безвихревых течений сжимаемого газа, изучение которых можно провести до эффективного решения, при этом используется аппарат тензорного исчисления в четырехмерном пространстве. Рассматриваются только общие, «внутренние» свойства двойных волн, т. е. те их свойства, которые не зависят от специальных условий движения: начальных и краевых.

1. Будем полагать, что в рассматриваемой области течения нет сильных разрывов (ударных волн), а кроме того, пренебрегая вязкостью и теплопроводностью газа, будем считать движение изэнтропическим; наконец, в уравнениях движения будем опускать внешние силы (так, впрочем, делают обычно во всех типичных задачах динамики газов). В этих условиях обычным является ограничение исследований до безвихревых (потенциальных) течений.

Введем в рассмотрение четырехмерное эвклидово пространство — время R_4, которое в дальнейшем будем называть пространством движения. В этом пространстве за систему отсчета возьмем прямоугольную систему декартовых координат:

$$x^1 \equiv x, \qquad x^2 \equiv y, \qquad x^3 \equiv z, \qquad x^4 \equiv v^\circ t$$

где v° — произвольная постоянная с размерностью скорости, а t — время.

Затем в этом пространстве движения R_4, исходя из трехмерного поля вектора скоростей частиц газа $\boldsymbol{v}$, с компонентами по осям x^1, x^2, x^3, равными соответственно v_1, v_2, v_3, введем четырехмерное поле вектора $\mathbf{u}$, определяемого равенствами

$$u_k = \begin{cases} v_k, & \text{если } k = 1,\ 2,\ 3 \\ v^\circ = \text{const}, & \text{если } k = 4 \end{cases} \tag{1.1}$$

С помощью этого векторного поля $\mathbf{u}$ уравнение неразрывности можно представить в тензорной сокращенной записи [1] следующим образом

$$\partial (\rho u^k)/\partial x^k = 0 \tag{1.2}$$

[1] Согласно этой записи, каждое выражение, в котором какой-либо буквенный индекс встречается дважды: один раз — как контравариантный (вверху) и другой раз — в смысле ковариантного индекса (внизу), надо суммировать по всем значениям, пробегаемым данным индексом. Условимся, что $i, j = 1,\ 2,\ 3$; тогда как $k,\ l,\ m = 1,\ 2,\ 3,\ 4$.

где ρ (x^1, x^2, x^3, x^4) — плотность газа. В этом уравнении и других формулах, для которых системой отсчета служат прямоугольные декартовы координаты, различие между контра- и ковариантными компонентами векторов чисто формальное: $u^k = u_k$. Необходимость четкого их различия появляется с момента введения общих криволинейных координат (ср. п. 3).

Особо здесь стоит подчеркнуть симметричную форму уравнения (1.2) по отношению ко всем координатам x^k. Напротив, структура трех уравнений движения для изэнтропного сжимаемого совершенного газа даже по использовании условия безвихревости течения

$$\partial v_i/\partial x^j = \partial v_j/\partial x^i \qquad (i, j = 1, 2, 3) \tag{1.3}$$

совершенно различна по отношению к временной и пространственным координатам:

$$v^\circ (\partial v_i/\partial x^4) + \partial H/\partial x^i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{1.4}$$

Здесь H — «полная энтальпия»

$$H \equiv \frac{1}{2}(v)^2 + \int_0^\rho \frac{c^2}{\rho}\, d\rho = \frac{1}{2}(v)^2 + \frac{c^2}{\varkappa - 1} \tag{1.5}$$

где c — локальная скорость звука, $\varkappa$ — показатель изэнтропы,

$$(v)^2 = |\mathbf{v}|^2 = v_i v^i$$

Заметим, что для установившихся течений асимметрия уравнений (1.4) сама по себе исчезает, так как в этом случае $\partial v_i/\partial x^4 \equiv 0$. Одновременно сразу получаем первый интеграл этих уравнений в виде уравнения Бернулли $H = \text{const}$. В этих условиях можно без труда исключить из уравнения неразрывности (1.2) плотность ρ, приходя этим путем к известному дифференциальному уравнению установившихся течений:

$$(c^2 \delta^i_j - v^i v_j)\frac{\partial v^j}{\partial x^i} = 0, \qquad \delta^i_j = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \tag{1.6}$$

Стоит еще только заменить в (1.6) частные производные ковариантными производными, чтобы это уравнение приняло инвариантную форму.

2. В случае неустановившегося течения плотность, давление, скорость звука и прочие газодинамические величины не будут функциями одной только скорости. Поэтому изучение течений, не подчиненных условию стационарности, требует весьма существенного «расширения» векторного пространства скоростей $\boldsymbol{v}$ посредством присоединения четвертой компоненты, которая зависела бы и от плотности ρ (или давления p, или скорости звука c). Делая это расширение, уравнениям движения (1.4) можно придать симметрию. Действительно, каждое из трех этих уравнений содержит соответствующую производную «полной энтальпии» H. Поэтому ясно, что, вводя новое расширенное (четырехмерное) эвклидово векторное пространство $\{\boldsymbol{w}\}$, достаточно положить (в прямоугольных декартовых координатах):

$$w_k = \begin{cases} v_k & (k = 1, 2, 3) \\ -H/v^\circ & (k = 4) \end{cases} \tag{2.1}$$

чтобы получить взамен уравнений (1.3) и (1.4) эквивалентную им, вполне уже симметричную систему соотношений:

$$\frac{\partial w_m}{\partial x^k} = \frac{\partial w_k}{\partial x^m} \qquad (k, m = 1,\ 2,\ 3,\ 4) \tag{2.2}$$

Из этих уравнений следует, что введенное здесь четырехмерное векторное поле w потенциально — потенциалом служит обычный потенциал скоростей течения $\varphi(x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^4)$:

$$w_k = \partial\varphi / \partial x^k \qquad (k = 1,\ 2,\ 3,\ 4) \tag{2.3}$$

Теперь можем исключить плотность ρ из уравнения неразрывности. Дифференцируя равенство (1.5) по x^l и учитывая (1.1) и (2.1), находим

$$u^m \frac{\partial w_m}{\partial x^l} + \frac{c^2}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x^l} = 0 \qquad (l = 1,\ 2,\ 3,\ 4) \tag{2.4}$$

Затем, исключая из (1.2) и (2.4) плотность ρ и ее производные, приходим к уравнению

$$c^2 \frac{\partial u^k}{\partial x^k} - u^l u^m \frac{\partial w_m}{\partial x^l} = 0 \tag{2.5}$$

Если написать это уравнение в развернутом виде и ввести потенциал скоростей течения $\varphi(x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^4)$, то сразу получим хорошо известное нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка, которому подчиняются самые общие потенциальные течения сжимаемого газа.

Чтобы получить дальнейшее, очень существенное преобразование этого уравнения, заметим прежде всего, что согласно (1.1) и (2.1) имеем

$$\frac{\partial u^k}{\partial x^k} = \tau^{lm} \frac{\partial w_m}{\partial x^l} \tag{2.6}$$

где тензор второго ранга τ^{lm} в принятой прямоугольной декартовой системе координат (x^k) определяется матрицей

$$\| \tau^{lm} \| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \tag{2.7}$$

Вводя, кроме того, симметричный тензор

$$T^{lm} \equiv c^2 \tau^{lm} - u^l u^m \qquad (l,\ m = 1,\ 2,\ 3,\ 4) \tag{2.8}$$

можно основное уравнение (2.5) записать в исключительно простой и краткой тензорной форме:

$$T^{lm} \frac{\partial w_m}{\partial x^l} = 0 \tag{2.9}$$

Заметим, что в выбранной нами системе координат (x^k) компонента $\tau^{44} = 0$. Таким образом, тензор τ^{lm} (в отличие от δ_j^i из (1.6)) не является простым единичным тензором четырехмерного пространства движения R_4 — его строение более сложно. В этом именно и заключается источник тех трудностей, о которых шла речь в самом начале (п.1), а в дальнейшем здесь же кроется и ключ к их разрешению.

3. Перейдем от прямоугольной системы отсчета к произвольной системе криволинейных координат (x^λ); криволинейные координаты будем обозначать греческими индексами.

С этой целью, как известно, строго теперь соблюдая закономерность размещения контра- и ковариантных индексов в уравнении (2.9), нужно везде заменить частные производные по декартовым координатам $\partial w_m / \partial x^l$ ковариантными производными $\nabla_\lambda w_\mu$. Таким образом, получим

$$T^{\lambda\mu} \nabla_\lambda w_\mu = 0 \qquad (T^{\lambda\mu} \equiv c^2 \tau^{\lambda\mu} - u^\lambda u^\mu) \tag{3.1}$$

Здесь

$$\nabla_\lambda w_\mu = \frac{\partial w_\mu}{\partial x^\lambda} - \Gamma^\nu{}_{\lambda\mu} w_\nu \tag{3.2}$$

где $\Gamma_{\lambda\mu}{}^\nu$ обозначает символ Кристоффеля второго рода.

4. Каждое решение $\boldsymbol{w}$ уравнения (2.9) или (3.1) можно интерпретировать как отображение пространства движения, всего или определенной его части, на некоторую область четырехмерного эвклидова пространства V_4, радиусы-векторы которого определены векторным полем $\boldsymbol{w}$. Как видно, это пространство V_4 является натуральным обобщением трехмерного пространства обыкновенного годографа. Пространство V_4 принято называть обобщенным годографом.

Понятие обобщенного годографа позволяет построить классификацию тех специальных классов течений, о которых речь шла в самом начале.

Принято называть волной порядка q, или q-волной, в частности: простой волной ($q = 1$), двойной волной ($q = 2$) и тройной волной ($q = 3$), такое потенциальное течение [1] сжимаемого совершенного изэнтропического газа, которое отображается в пространстве обобщенного годографа на q-мерную поверхность (то есть соответственно: на линию, на поверхность в собственном смысле слова или на гиперповерхность).

Ясно, что во всех этих случаях мы имеем дело с вырожденным отображением годографа: некоторая четырехмерная область пространства движения R_4 отображается на область V_q пространства обобщенного годографа V_4 с размерностью $q < 4$. Аналитически это обстоятельство проявляется в том, что функциональный определитель, иначе якобиан функций отображения $w_m(x^1, x^2, x^3, x^4)$, равен тождественно нулю: $|\partial w_m / \partial x^l| = 0$ (очевидно, в той только части пространства движения, которая занята рассматриваемой q-волной). При этом ранг матрицы якобиана равен q.

Следовательно, q-волну можно определить и так: это потенциальное течение, векторное поле $\boldsymbol{w}$ которого имеет из m компонент w_m в прямоугольной декартовой системе лишь q независимых ($q < m = 4$).

---

[1] В ранее опубликованной работе [4] показано, что в случае простых нестационарных волн потенциальность течения вытекает из самого их определения. По отношению же к остальным q-волнам это свойство потенциальности течения вводится, как правило, в качестве добавочного условия для упрощения проблемы.

Замечание. Напомним, что два первых точных решения нелинейных уравнений динамики газов — одно, полученное еще в 1860 г. Риманом [1], а другое,— в 1907 г. Прандтлем и Майером [2] — принадлежат к указанным выше специальным видам течений. Однако эти решения далеко не исчерпывают содержания рассматриваемых здесь классов движений. В частности, течения типа Прандтля — Майера образуют лишь малый подкласс простых волн, так как эти течения плоские и установившиеся. Волны Римана, даже в наиболее общей своей трактовке, когда оба «инварианта Римана» переменны, также составляют все-таки довольно ограниченный подкласс двойных волн, так как они зависят только от двух переменных: от одной пространственной, например $x^1 \equiv x$, и от временной переменной: $x^4 \equiv v^\circ t$.

Несомненно, в течение последних лет изучение различных классов волн продвинулось вперед. Проблему простых волн в особенности, на основе ряда последних работ [3-7], можно считать в некотором отношении почти разрешенной. Значительные и интересные результаты получены также в теории двойных волн как установившихся [3,8], так и неустановившихся [9-11]. Тройные волны рассматриваются в статье [12].

5. Как отмечено выше, изучение общих свойств двойных волн сводится в основном к анализу геометрической структуры отображения пространства движения на поверхность соответственного вырожденного годографа. В прямоугольных системах координат (x^k) и $(w^m = w_m)$ это отображение определяется некоторой системой функций

$$w_m \equiv w_m(x^1, x^2, x^3, x^4) \qquad (m = 1, 2, 3, 4) \tag{5.1}$$

с условием, чтобы ранг матрицы $\|\partial w_m/\partial x^k\|$ был равен двум. Из этого условия следует, что система (5.1) не допускает однозначного обращения; более точно: каждой отдельной точке P годографа двойной волны она ставит в соответствие в пространстве движения $R_4\{x^k\}$ некоторую поверхность П. На каждой такой поверхности П, во всех ее точках x^k, мы имеем по самому определению $\mathbf{w} = \mathrm{const}$ и отсюда: $w_m = \mathrm{const}$, $c = \mathrm{const}$, $\rho = \mathrm{const}$, $p = \mathrm{const}$. Для краткости будем называть эти поверхности изодинамическими.

В дальнейшем понадобятся, кроме уравнений (5.1), также параметрические уравнения годографа рассматриваемой двойной волны:

$$w_m \equiv w_m(\xi^1, \xi^2) \qquad (m = 1, 2, 3, 4) \tag{5.2}$$

причем ранг матрицы $\|\partial w_m/\partial \xi^\alpha\|$ равен двум.

Заметим, что параметры ξ^1 и ξ^2 служат на поверхности годографа изучаемой двойной волны криволинейными координатами ξ^α $(\alpha = 1,2)$ точек P. Следовательно, ξ^1 и ξ^2 можно также принять за параметры, определяющие двупараметрическое семейство изодинамических поверхностей П.

Для упрощения дальнейшего исследования удобно ввести функцию Лежандра:

$$\Phi \equiv x^m w_m - \varphi(x^1, x^2, x^3, x^4) \tag{5.3}$$

полный дифференциал которой $d\Phi$ в силу соотношения (2.3) не содержит дифференциалов переменных x^m. Учитывая еще (5.2), получаем:

$$d\Phi = x^m dw_m = x^m \frac{\partial w_m}{\partial \xi^\alpha} d\xi^\alpha \tag{5.4}$$

Из этого равенства следует, во-первых, что функция Лежандра для двойной волны зависит только от переменных ξ^α:

$$\Phi \equiv \Phi(\xi^1, \xi^2) \tag{5.5}$$

и, стало быть, она тоже принимает на каждой изодинамической поверхности П постоянное значение; во-вторых,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi^\alpha} = x^m \frac{\partial w_m}{\partial \xi^\alpha} \qquad (\alpha = 1,2) \tag{5.6}$$

Здесь существенно, что, согласно (5.5) и (5.2), свободные члены и коэффициенты этой линейной (по отношению к переменным x^m) системы уравнений являются функциями одних только параметров ξ^1 и ξ^2. Отсюда вытекает следующая теорема.

Теорема 1. Изодинамические поверхности образуют в пространстве движения $R_4\{x^m\}$ двупараметрическое семейство плоскостей П, определяемых системой двух линейных уравнений первой степени (5.6).

Дальнейший анализ этой системы уравнений показывает, что геометрическая форма поверхности годографа двойной волны предопределяет также направления плоскостей П. В самом деле, численные значения коэффициентов этих уравнений (5.6) определяют в системе координат x^m пространства движения R_4 два вектора $W^m_{(\alpha)}(\xi^1, \xi^2)$:

$$W^m_{(\alpha)} \equiv \frac{\partial w^m}{\partial \xi^\alpha} = \frac{\partial w_m}{\partial \xi^\alpha} = \frac{\partial w_m}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial \xi^\alpha} \qquad \begin{pmatrix} m = 1,\ 2,\ 3,\ 4 \\ \alpha = 1,2 \end{pmatrix} \tag{5.7}$$

которые в силу самих уравнений (5.6) ортогональны к рассматриваемой плоскости П. Но, с другой стороны, принимая во внимание форму этих выражений как частных производных $\partial w^m/\partial \xi^\alpha$, ясно, что они образуют— в пространстве годографа с системой прямоугольных декартовых координат $w^m = w_m$ — компоненты двух векторов, касательных в точке P поверхности годографа соответственно к координатной линии ξ^1 или ξ^2. Полагая еще для упрощения формулировки окончательного результата, что в обеих системах координат, x^m и w^m, оси с одинаковыми номерами индексов параллельны, получаем вторую теорему.

Теорема 2. Каждая изодинамическая плоскость П ортогональна к поверхности годографа двойной волны в соответствующей точке P годографа.

6. Базируясь на полученных теоремах, можно, используя систему уравнений (5.6), найти интересное аналитическое выражение для неоднозначной зависимости переменных x^m от криволинейных координат ξ^α. Легко показать, что одной из возможных форм этого выражения является следующая система, содержащая два произвольных параметра η и ζ:

$$x^m \equiv f^m(\xi^1, \xi^2; \eta, \zeta) = g^{\beta\gamma}\frac{\partial w^m}{\partial \xi^\beta}\frac{\partial \Phi}{\partial \xi^\gamma} + \eta\pi_{(1)}{}^m + \zeta\pi_{(2)}{}^m \tag{6.1}$$

здесь контра- и ковариантные координаты метрического тензора поверхности годографа удовлетворяют известным соотношениям:

$$g^{\gamma\beta}g_{\alpha\beta} = \delta^\gamma_\alpha \begin{cases} 1 \ (\alpha = \gamma), \\ 0 \ (\alpha \neq \gamma), \end{cases} \qquad g_{\alpha\beta} = \frac{\partial w_m}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial w^m}{\partial \xi^\beta} \qquad (\alpha,\beta = 1,2) \tag{6.2}$$

а единичные, непараллельные векторы, $\pi_{(1)}{}^m(\xi^1, \xi^2)$ и $\pi_{(2)}{}^m(\xi^1, \xi^2)$ расположены на соответствующей изодинамической плоскости П. Чтобы доказать правильность формулы (6.1), достаточно показать, что первый член в правой ее части тождественно удовлетворяет системе уравнений (5.6). Это легко проверить, учитывая соотношения (6.2). В самом деле:

$$x^m \frac{\partial w_m}{\partial \xi^\alpha} = g^{\beta\gamma} \frac{\partial w^m}{\partial \xi^\beta} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^\gamma} \frac{\partial w_m}{\partial \xi^\alpha} = g^{\beta\gamma} g_{\beta\alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^\gamma} = \delta^\gamma_\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^\gamma} = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^\alpha}$$

7. В п. 5 независимо от уравнений динамики газов были выведены общие свойства двойных волн. Эти геометрические свойства являются прямым следствием тех специальных кинематических условий, которыми определяется класс безвихревых (потенциальных) двойных волн.

Для дальнейшего же исследования используем уравнение движения (2.9). Принимая во внимание параметрические уравнения (5.2), это уравнение движения представим в виде:

$$T^{lm} \frac{\partial w_m}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^l} = 0 \qquad (7.1)$$

выявляющем существенную роль криволинейных координат ξ^α ($\alpha = 1,2$).

Нас будут здесь интересовать общие, «внутренние» свойства двойных волн, т. е. те их свойства, которые не зависят от специальных условий движения — начальных и краевых. Имея это в виду, мы постараемся выразить все члены уравнения (7.1) через функции криволинейных координат ξ^α годографа двойной волны. Прежде всего сделаем это по отношению к производным $\partial\xi^\alpha/\partial x^l$. С этой целью используем опять уравнения (5.6), дифференцируя обе их части по x^k:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^\alpha \partial \xi^\beta} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^k} = \delta^m_k \frac{\partial w_m}{\partial \xi^\alpha} + x^m \frac{\partial^2 w_m}{\partial \xi^\alpha \partial \xi^\beta} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^k}$$

где $x^m \equiv f^m(\xi^1, \xi^2; \eta, \zeta)$ согласно (6.1). Эти уравнения можно представить в более сжатой форме:

$$h_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^k} = \frac{\partial w_k}{\partial \xi^\alpha} \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 1,2 \\ k = 1, 2, 3, 4 \end{pmatrix} \qquad (7.2)$$

если одним символом $h_{\alpha\beta}$ обозначить ковариантные координаты симметрического тензора:

$$h_{\alpha\beta} \equiv \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^\alpha \partial \xi^\beta} - f^m \frac{\partial^2 w_m}{\partial \xi^\alpha \partial \xi^\beta}, \qquad h_{\alpha\beta} = h_{\beta\alpha} \qquad (\alpha, \beta = 1,2) \qquad (7.3)$$

Для каждого произвольно выбранного значения индекса k формулы (7.2) представляют систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными $\partial\xi^\beta/\partial x^k$. Обозначим через $H^{\alpha\beta}$ алгебраическое дополнение $h_{\alpha\beta}$. Как известно

$$H^{\alpha\beta} = g\varepsilon^{\alpha\gamma}\varepsilon^{\beta\delta}h_{\gamma\delta}, \qquad \varepsilon^{11} = \varepsilon^{22} = 0$$
$$\varepsilon^{12} = -\varepsilon^{21} = 1/\sqrt{g}, \quad g \equiv |g_{\alpha\beta}| \qquad (7.4)$$

Пользуясь этим выражением (при условии, что $h \equiv |h_{\alpha\beta}| \neq 0$), можно представить решения системы (7.2) в виде:

$$\frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^k} = \frac{H^{\alpha\beta}}{h} \frac{\partial w_k}{\partial \xi^\alpha} \qquad \begin{pmatrix} \beta = 1,2 \\ k = 1, 2, 3, 4 \end{pmatrix} \qquad (7.5)$$

Выражения (6.1) и (7.3) — (7.5) позволяют эффективно исключить из уравнения (7.1) переменные x^k. Таким образом, приходим к основному для дальнейшего исследования уравнению:

$$T^{lm} \frac{\partial w_m}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial w_l}{\partial \xi^\beta} H^{\alpha\beta} = 0 \tag{7.6}$$

где

$$H^{\alpha\beta} = g\varepsilon^{\alpha\gamma}\varepsilon^{\beta\delta} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^\gamma \partial \xi^\delta} - \left(g^{\sigma\omega} \frac{\partial w^m}{\partial \xi^\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^\omega} + \eta \pi_{(1)}{}^m + \zeta \pi_{(2)}{}^m \right) \frac{\partial^2 w_m}{\partial \xi^\gamma \partial \xi^\delta} \right] \tag{7.7}$$

Но, учитывая (6.2), для символа Кристоффеля первого рода получим

$$[\alpha\beta, \gamma] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial \xi^\alpha} + \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial \xi^\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \xi^\gamma} \right) = \frac{\partial^2 w_m}{\partial \xi^\alpha \partial \xi^\beta} \frac{\partial w^m}{\partial \xi^\gamma}$$

При помощи этого выражения легко показать, что в равенстве (7.7) в квадратных скобках находится, между прочим, выражение, сводящееся к ковариантной производной

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^\gamma \partial \xi^\delta} - g^{\sigma\omega} [\gamma\delta, \sigma] \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^\omega} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^\gamma \partial \xi^\delta} - \Gamma^{\omega}_{\gamma\delta} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^\omega} = \nabla_\delta \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi^\gamma} \right) = \nabla_{\gamma\delta} \Phi = \nabla_{\delta\gamma} \Phi$$

Принимая во внимание полученные выше соотношения, мы можем нашему основному уравнению (7.6) придать окончательный вид:

$$T^{lm} \frac{\partial w_m}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial w_l}{\partial \xi^\beta} \varepsilon^{\alpha\gamma}\varepsilon^{\beta\delta} \left[\nabla_{\gamma\delta} \Phi - (\eta \pi_{(1)}{}^m + \zeta \pi_{(2)}{}^m) \frac{\partial^2 w_m}{\partial \xi^\gamma \partial \xi^\delta} \right] = 0 \tag{7.8}$$

Здесь существенно, что значения параметров η и ζ, выступающих в этом уравнении, совершенно произвольны. Это показывает, что уравнение (7.8) эквивалентно системе трех независимых дифференциальных уравнений, первое из которых записывается так:

$$T^{lm} \frac{\partial w_m}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial w_l}{\partial \xi^\beta} \varepsilon^{\alpha\gamma}\varepsilon^{\beta\delta} \nabla_{\gamma\delta} \Phi = 0 \tag{7.9}$$

а два другие получаем соответственно заменой ковариантной производной $\nabla_{\gamma\delta} \Phi$ на $\pi_{(1)}{}^m \partial^2 w_m / \partial \xi^\gamma \partial \xi^\delta$ и на $\pi_{(2)}{}^m \partial^2 w_m / \partial \xi^\gamma \partial \xi^\delta$.

И в самой структуре уравнений этой системы, и в их механической интерпретации легко заметить существенную разницу. Два последних из указанных уравнений касаются исключительно геометрической структуры годографа двойной волны (напомним, что $\pi_{(1)}{}^m$ и $\pi_{(2)}{}^m$ обозначают единичные векторы, ортогональные к поверхности этого годографа). Для детального же изучения самих течений, их частных видов, определяемых функцией Лежандра Φ, обращаться надо к уравнению (7.9). Однако роль дифференциального уравнения (7.9) в теории двойных волн не ограничивается этим: с его помощью можно, кроме того, легко доказать некоторые интересные, весьма общие и основные, свойства двойных волн.

С этой целью, заметив, что уравнение (7.9) — линейное, с частными производными второго порядка, напишем сразу соответствующее ему уравнение характеристик:

$$T^{lm} \frac{\partial w_m}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial w_l}{\partial \xi^\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta = 0$$

Отсюда следует, что вдоль самих характеристик имеем:

$$T^{lm}\,dw_m\,dw_l = 0 \tag{7.10}$$

Написав это равенство в раскрытом виде, найдем, согласно (2.8),

$$\pm c\sqrt{\tau^{lm}\,dw_m\,dw_l} = u^k\,dw_k$$

Учитывая соотношения (2.7), (2.4) и (1.5), получаем:

$$ds \equiv \sqrt{(dv_1)^2 + (dv_2)^2 + (dv_3)^2} = \pm\frac{c}{\rho}\,d\rho = \pm\frac{2dc}{\varkappa - 1} \tag{7.11}$$

Здесь символ ds означает дифференциал дуги проекции изучаемых характеристик в обычном трехмерном векторном пространстве с декартовыми координатами v_1, v_2, v_3. Таким образом, полученный результат позволяет сформулировать основную теорему, выявляющую тесную связь между структурой годографа двойных и простых волн.

Теорема 3. На поверхности годографа произвольной двойной волны вдоль ее характеристик выполняется то же самое «условие совместности движения» (7.11), которое, как известно [3-5], ограничивает свободу выбора линии годографа простой волны.

Поступила 16 II 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Riemann B. Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite. Abhandl. Göttinger Ges. Wiss., 1860.
2. Meyer Th. Über zweidimensionale Bewegungsvorgänge in einem Gas, das mit Überschallgeschwindigkeit strömt. Dissertation, Göttingen, 1908, Forsch. Ver. Deutsch. Ing. 62, Berlin, 1908.
3. Giese J. H. Compressible Flows with Degenerate Hodographs. Quart. Appl. Math., 1951, 9.
4. Bonder J. Application des ondes simples à la recherche des écoulements compressibles, isentropiques, non stationnaires. Actes du IX Congrès Intern. de Méc. Appl. t. III, 1956 — 57.
5. Никольский А. А. Обобщение волн Римана на случай пространства. Сб. теоретич. работ по аэродинамике, М., Оборонгиз, 1957, стр. 34—38.
6. Яненко Н. Н. Бегущие волны системы квазилинейных уравнений. ДАН СССР, 1956, т. 109, № 1, стр. 44—47.
7. Burnat M. On the Conditions of Simple Wave Formation. Bull. Acad. Polon. Sci., 1959, vol. VII, № 10 и Burnat M. Simple Waves in Plane, Non — Steady, Compressible, Inviscid and Non—Heat—Conducting Flow. Archiwum Mechaniki Stosowanej, 1960, 12, № 1.
8. Никольский А. А. О классе адиабатических течений, которые в пространстве годографа скорости изображаются поверхностями. Сб. теоретич. работ по аэродинамике, М., Оборонгиз, 1957, стр. 39—42.
9. Рыжов О. С. О течениях с вырожденным годографом. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 4.
10. Погодин Ю. Я., Сучков В. А. и Яненко Н. Н. О бегущих волнах уравнений газовой динамики. ДАН СССР, 1958, т. 119, № 3; ПММ, 1958, т. XXII, вып. 2.
11. Сидоров А. Ф., Яненко Н. Н. Неустановившиеся плоские течения политропного газа с прямолинейными образующими. Изв. вузов, Математика, 1959, № 1 (8).
12. Сидоров А. Ф. О нестационарных потенциальных движениях политропного газа с вырожденным годографом. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 5.