

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФОРМЫ ТЕЛ МИНИМАЛЬНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ПРИ БОЛЬШИХ СВЕРХЗВУКОВЫХ СКОРОСТЯХ

А. Л. Гонор

(Москва)

В последние годы на основе закона сопротивления И. Ньютона были решены различные вариационные задачи о форме тел наименьшего сопротивления при больших сверхзвуковых скоростях полета [1].

Решение вариационной задачи в более точной постановке, использующей закон сопротивления А. Буземана, было предложено в работах [2, 3, 5]. Однако, как указал Хейс [3], в уточненной постановке контур тела наименьшего сопротивления должен иметь разрыв наклона касательной в концевой точке, так как тогда, согласно закону А. Буземана, создается бесконечное отрицательное давление в этой точке, уменьшающее сопротивление на конечную величину. Физически давление не может быть отрицательным, и изменение наклона касательной в концевой точке не должно влиять в сверхзвуковом потоке на распределение давления впереди и, следовательно, на сопротивление.

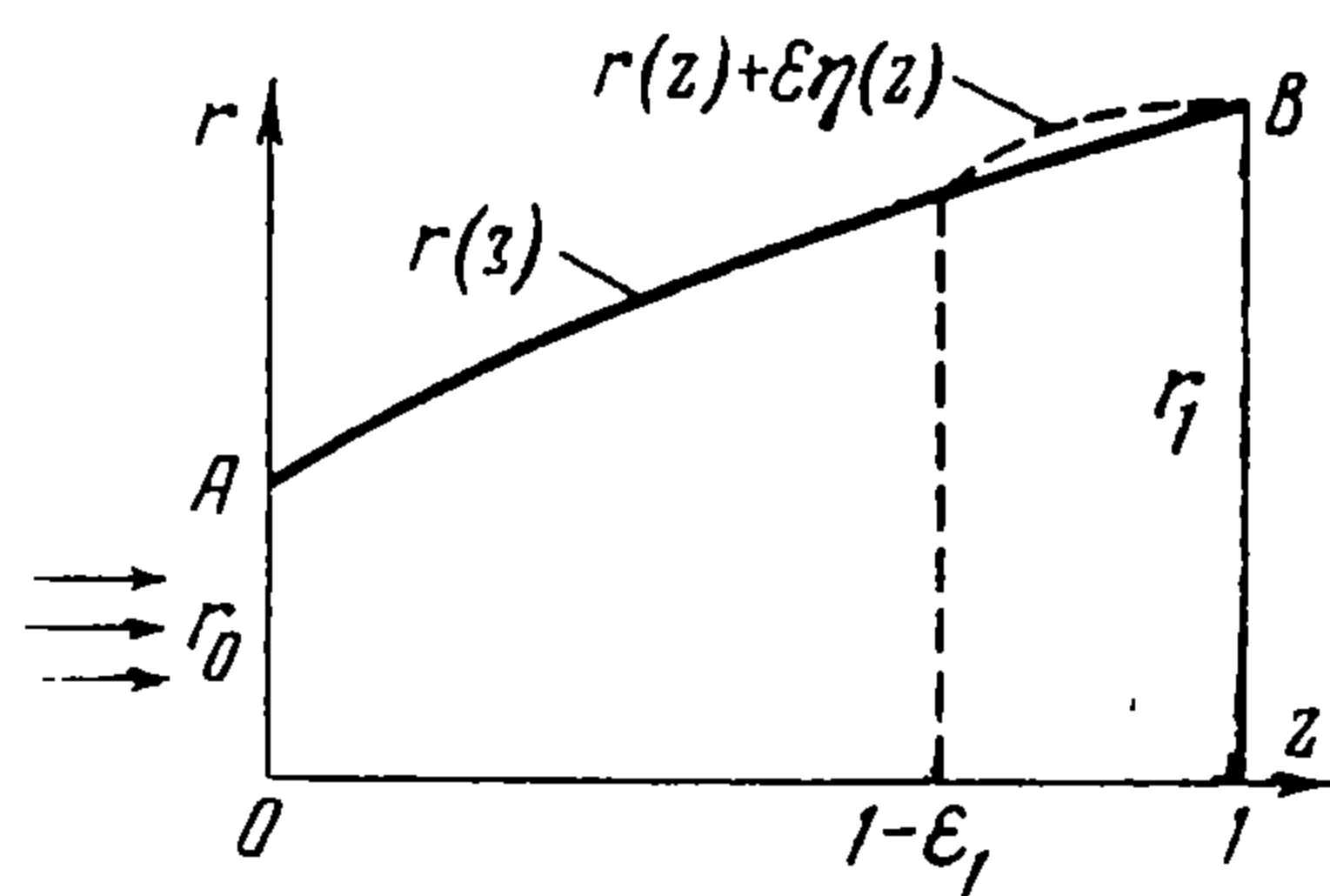
Указанное несоответствие с физикой сверхзвукового течения требует новой постановки вариационной задачи с дополнительным требованием, чтобы давление на контуре тела было везде неотрицательное.

Ниже дается общий метод решения этой задачи для плоского и осесимметричного течения газа.

Рассмотрим обтекание тела, вообще говоря с протоком, плоским или осесимметричным гиперзвуковым потоком газа. Считая, что все характерные размеры отнесены к длине тела, примем длину за единицу.

Коэффициент сопротивления тела тогда согласно формуле Буземана и после преобразования, выполненного в работе [2], будет равен (1)

$$C_x = \frac{2\nu}{r_1^\nu - r_0^\nu} \left[\frac{r_1^\nu - r_0^\nu}{\nu} - \frac{1}{(1 + r_1'^2)^{1/2}} \int_0^1 \frac{r^{\nu-1} r' dz}{(1 + r'^2)^{1/2}} \right]$$



Фиг. 1

Обозначения даны на фиг. 1; значение $\nu = 1$ — для плоского потока, $\nu = 2$ — для осесимметричного потока, r_1' — производная в концевой точке контура.

При вычислении коэффициента C_x для тела вращения сила сопротивления отнесена к кольцевой площади $\pi(r_1^2 - r_0^2)$, в случае плоского течения $r_0 = 0$ и рассматривается сила сопротивления, действующая на одну сторону профиля. Контур предполагается гладким и имеющим только конечные разрывы второй производной в отдельных точках. При таких предположениях запись формулы А. Буземана в виде (1) остается справедливой.

Сопротивление тела при заданных значениях r_0 и r_1 , как следует из (1), достигает абсолютного минимума при максимальном значении интеграла и условии, что $r_1' = 0$. Соответствующий контур найден в вышеупомянутых работах и, как показано, не является гладким.

Запишем требование, чтобы давление на контуре было неотрицательным, согласно [2] имеем

$$r'^2 + \frac{r''}{r^{\nu-1}(1+r'^2)^{1/2}} \int_0^z \frac{r'r^{\nu-1} dz}{(1+r'^2)^{1/2}} \geq 0 \quad (2)$$

Вариационную задачу будем решать для тела заданного удлинения (r_0 и r_1) при условии (2), предварительно докажем следующую теорему.

Теорема. Минимум выражения (1) для тела заданного удлинения при условии (2) может достигаться только на кривых, вдоль которых на некотором конечном участке $c \leq z \leq 1$ неравенство (2) переходит в равенство, т. е. давление обращается в нуль.

Доказательство. Предположим противное, пусть минимум (1) достигается на некоторой кривой $r(z)$, давление вдоль которой везде больше нуля. Рассмотрим тогда значение (1) на некоторой близкой кривой $r^\circ(z) = r(z) + \varepsilon \eta(z)$, где $\eta(z)$ отлична от нуля только в интервале $1 - \varepsilon_1 < z < 1$ и обладает необходимыми условиями гладкости (ε и ε_1 — малые величины). Если на кривой $r(z)$ неравенство (2) выполнялось строго, то при достаточно малых ε оно будет выполняться и для функции $r^\circ(z)$, так как левая часть (2) изменяется на величину порядка $O(\varepsilon)$. Подставляя $r^\circ(z)$ в функционал (1), получим, что второе слагаемое в квадратных скобках после несложных выкладок представится выражением

$$\frac{1}{(1+r_1'^2)^{1/2}} \int_0^1 \frac{r^{\nu-1} r' dz}{(1+r'^2)^{1/2}} - \frac{\varepsilon \eta'(1)}{(1+r_1'^2)^{3/2}} \int_0^1 \frac{r^{\nu-1} r' dz}{(1+r'^2)^{1/2}} + O(\varepsilon \varepsilon_1)$$

Выбрав теперь функцию $\eta(z)$ со значением производной $\eta'(1) < 0$ (это всегда можно, так как легко доказать, что $r'(1) > 0$), получим из (1), что значение C_x на кривой $r^\circ(z)$ меньше, чем на кривой $r(z)$. Таким образом, приходим к противоречию, и, следовательно, искомая экстремаль содержит конечной участок $c \leq z \leq 1$ с нулевым давлением. Все другие возможности, исключая случай $c = 1$, к которому переходим, отпадают.

Действительно, допустим $c = 1$, тогда в этой точке равенство (2) удовлетворяется тождественно, при любом значении $r_c' > 0$ (см. также (4)). Следовательно, можно полностью повторить доказательство теоремы и прийти к противоречию. При этом неравенство (2) на линии сравнения можно удовлетворить, например, если на интервале $1 - \frac{1}{2} \varepsilon_1 < z < 1$ положить $r'' = 0$ и в точке $z = 1 - \frac{1}{2} \varepsilon_1$ ввести конечный разрыв функции $\eta''(z)$ такой, чтобы на участке $1 - \varepsilon_1 \leq z \leq 1 - \frac{1}{2} \varepsilon_1$ функция $\eta''(z)$ была порядка единицы.

Перейдем к исследованию многообразия кривых нулевого давления. На этом многообразии неравенство (2) переходит в равенство и нетрудно увидеть, что оно представляет производную от выражения

$$\frac{r'}{(1+r'^2)^{1/2}} \int_0^z \frac{r'r^{\nu-1} dz}{(1+r'^2)^{1/2}} = \text{const} \quad (3)$$

Отсюда, в частности, следует, что нельзя провести контур нулевого давления от начальной точки $z = 0$.

Исключая из (2) и (3) интеграл, получим простое дифференциальное уравнение второго порядка для функции $r(z)$. Общее решение, представляющее семейство кривых нулевого давления, на отрезке $c \leq z \leq 1$ имеет вид¹

$$\frac{r_1^{\nu+1} - r^{\nu+1}}{\nu(\nu+1)} - r_c^\nu \left(\frac{1}{\nu} - \frac{k}{r_c'} \right) (r_1 - r) = k(1-z) \quad (4)$$

$$k = \frac{r_c'}{r_c^\nu (1+r_c'^2)^{1/2}} \int_0^c \frac{r' r^{\nu-1} dz}{(1+r'^2)^{1/2}}$$

Постоянные интегрирования найдены последовательно из условий, что кривая имеет в точке $C(c, r_c)$ наклон касательной r_c' и проходит через точку $B(1, r_1)$. Форма линии нулевого давления зависит через постоянную k от формы линии тока впереди. Исследование уравнения (4) показывает, что если на контуре в окрестности концевой точки давление отрицательное, то заведомо его концевой кусок можно заменить линией нулевого давления, касающейся в точке стыка. С другой стороны, контур, давление на котором везде положительное, можно в окрестности конечной точки подправить так, чтобы давление на конце стало отрицательным. Отсюда, если заменить в подправленном контуре участок линией нулевого давления, то получим новый контур, сопротивление которого либо меньше, чем сопротивление контура с положительным давлением, либо отличается на сколь угодно малую величину. Следовательно, приходим к выводу, что если существует контур минимального сопротивления в классе кривых с участком нулевого давления на конце, и на этом контуре везде $p \geq 0$, то этот минимум есть наименьшее значение сопротивления (1) при условии (2).

В результате доказанной теоремы сопротивление оптимального тела возникает только от передней его части $0 \leq z \leq c$, и формулу (1) можно заменить выражением

$$C_x = \frac{2\nu}{r_1^\nu - r_0^\nu} \left[\frac{r_c^\nu - r_0^\nu}{\nu} - \frac{1}{(1+r_c'^2)^{1/2}} \int_0^c \frac{r^{\nu-1} r' dz}{(1+r'^2)^{1/2}} \right] \quad (5)$$

Вычислим вариацию C_x с учетом, что величины c, r_c, r_c' — переменные. После несложных преобразований получим

$$\delta C_x = \frac{2\nu r_c^{\nu-1} r_c'^2}{(r_1^\nu - r_0^\nu) (1+r_c'^2)^2} \left\{ (2+r_c'^2) \delta r_c - r_c' \delta c + \right. \quad (6)$$

$$\left. + \frac{(1+r_c'^2)^{1/2} \delta r_c'}{r_c' r_c^{\nu-1}} \int_0^c \frac{r^{\nu-1} r' dz}{(1+r'^2)^{1/2}} - \frac{(1+r_c'^2)^{3/2}}{r_c'^2 r_c^{\nu-1}} \int_0^c \left[F_r - \frac{d}{dz} (F_{r'}) \right] \delta r dr \right\}$$

$$F = \frac{r^{\nu-1} r'}{(1+r'^2)^{1/2}}, \quad \delta r_c \neq \delta r \quad \text{при } z = c$$

¹ В других переменных кривая нулевого давления получена впервые Лайтхиллом [4].

На оптимальной кривой ($0 \leq z \leq c$) вариация должна обращаться в нуль. В связи с этим, если рассмотреть более узкий класс допустимых линий, закрепленных в концах и с постоянным угловым коэффициентом r_c' , равным угловому коэффициенту экстремали интеграла, стоящего в фигурных скобках (6) последним, то и в этом классе искомая кривая оптимальна. Следовательно, согласно (6), должно удовлетворяться уравнение Эйлера для функции F . Решение его изучено в работах [2,5]. В работе [5] показано, что вдоль экстремалей давление больше нуля.

Исследование для плоского и осесимметричного потоков удобно проводить отдельно. Большие трудности представляет осесимметричный поток, хотя ход рассуждений в обоих случаях одинаков. В связи с тем, что результаты решения для плоского потока совпали с результатами имеющегося для этого случая нестрогого решения Хейса [3], здесь приводится решение только для осесимметричного потока.

В параметрическом виде экстремали упомянутого уравнения Эйлера [2] определяются формулами

$$\frac{r}{c} = \frac{R(\alpha)}{z(\alpha_1) - z(\alpha_0)}, \quad \frac{z}{c} = \frac{z(\alpha) - z(\alpha_0)}{z(\alpha_1) - z(\alpha_0)} \quad (7)$$

$$R(\alpha) = \frac{1}{\sin^3 \alpha}, \quad z(\alpha) = \frac{3}{4} \frac{\cos^3 \alpha}{\sin^4 \alpha} + \frac{3}{8} \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{3}{8} \ln \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

Здесь параметр $\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg}(dr/dz)$ изменяется в пределах $\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1$, когда $0 \leq z \leq c$.

В конечных точках контура имеют место соотношения

$$\frac{r_0}{c} = \frac{R(\alpha_0)}{z(\alpha_1) - z(\alpha_0)}, \quad \frac{r_c}{c} = \frac{R(\alpha_1)}{z(\alpha_1) - z(\alpha_0)}, \quad \alpha_0 = \operatorname{arc} \sin \left[\left(\frac{r_c}{r_0} \right)^{1/2} \sin \alpha_1 \right] \quad (8)$$

Носовая часть оптимальной кривой находится, как было показано, среди экстремалей уравнения Эйлера, поэтому можно искать ее в более узком классе допустимых линий, содержащем только одни экстремали. Это позволяет варьировать соотношения (8).

В результате получим, что

$$\begin{aligned} \delta c = \frac{1}{R(\alpha_1)} \left[z(\alpha_1) - z(\alpha_0) - \frac{z'(\alpha_0)}{3 \operatorname{ctg} \alpha_0} \right] \delta r_c + \frac{r_c}{R(\alpha_1) (1 + r_c'^2)} \left\{ z'(\alpha_1) - \right. \\ \left. - \frac{R'(\alpha_1)}{R(\alpha_1)} [z(\alpha_1) - z(\alpha_0)] - \frac{z'(\alpha_0)}{r_c' \operatorname{ctg} \alpha_0} \right\} \delta r_c' \quad (9) \end{aligned}$$

Исключая с помощью (8), (9) величины c и δc из выражения (6), имеем соотношение

$$\delta C_x = M_1(r_c, r_c') \frac{\delta r_c}{r_c} + M_2(r_c, r_c') \frac{\delta r_c'}{1 + r_c'^2} = 0$$

$$M_1(r_c, r_c') = 2 + r_c'^2 - \frac{r_c'}{R(\alpha_1)} \left[z(\alpha_1) - z(\alpha_0) - \frac{z'(\alpha_0)}{3 \operatorname{ctg} \alpha_0} \right]' \quad (10)$$

$$M_2(r_c, r_c') = \frac{k(1 + r_c'^2)^2}{r_c'^2} - \frac{r_c'}{R(\alpha_1)} \left\{ z'(\alpha_1) - \frac{R'(\alpha_1)}{R(\alpha_1)} \left[z(\alpha_1) - z(\alpha_0) - \frac{z'(\alpha_0)}{r_c' \operatorname{ctg} \alpha_0} \right] \right\}$$

Задача теперь свелась к отысканию точки сопряжения $C(c, r_c)$ экстремали (7) и линии нулевого давления (4).

Уравнение (4) в точке C представим в виде

$$\Delta^3 + 3\Delta^2 + 6k\left(\frac{1}{r_c'} - \frac{1}{r_1}\right)\Delta + 6k\left[\frac{z(\alpha_1) - z(\alpha_0)}{R(\alpha_1)} - \frac{1}{r_1}\right] = 0$$

$$\Delta = \frac{r_1}{r_c} - 1 \quad (11)$$

$$k = \frac{\sin^7 \alpha_1}{2} \left[\frac{\cos \alpha}{\sin^6 \alpha} - \frac{1}{4} \frac{\cos \alpha}{\sin^4 \alpha} - \frac{3}{8} \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{3}{8} \ln \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right]_{\alpha_0}^{\alpha_1}$$

Варьируя (11), находим, что (12)

$$N_1(r_c, r_c') \frac{\delta r_c}{r_c} + N_2(r_c, r_c') \frac{\delta r_c'}{1 + r_c'^2} = 0$$

$$N_1(r_c, r_c') = \frac{kz'(\alpha_0)}{3R(\alpha_1) \operatorname{ctg} \alpha_0} + \frac{r_1}{r_c} \left[\frac{\Delta^2}{2} + \Delta + k\left(\frac{1}{r_c'} - \frac{1}{r_1}\right) \right] -$$

$$- \frac{k_{\alpha_0'}}{3r_c'} \left[\Delta \left(\frac{1}{r_c'} - \frac{1}{r_1}\right) + \frac{z(\alpha_1) - z(\alpha_0)}{R(\alpha_1)} - \frac{1}{r_1} \right]$$

$$N_2(r_c, r_c') = \frac{k(1 + r_c'^2)}{r_c'^2} \Delta - \frac{k}{R(\alpha_1)} \left\{ z'(\alpha_1) - \frac{R'(\alpha_1)}{R(\alpha_1)} [z(\alpha_1) - z(\alpha_0)] - \right.$$

$$\left. - \frac{z'(\alpha_0)}{r_c' \operatorname{ctg} \alpha_0} \right\} - \left[\left(\frac{1}{r_c'} - \frac{1}{r_1}\right) \Delta + \frac{z(\alpha_1) - z(\alpha_0)}{R(\alpha_1)} - \frac{1}{r_1} \right] \left[k_{\alpha_1}' + \frac{k_{\alpha_0}'}{r_c' \operatorname{ctg} \alpha_0} \right]$$

Исключая из (10) и (12) вариации, имеем

$$M_1(r_c, r_c') N_2(r_c, r_c') - N_1(r_c, r_c') M_2(r_c, r_c') = 0 \quad (13)$$

Полученные в конечном виде уравнения (11) и (13) позволяют определить величины r_c и r_c' . Все остальные параметры, включая координату c точки сопряжения, находятся затем непосредственно из (8).

Решение уравнений значительно упрощается, если рассматривать тела, зависящие от одного параметра r_1 , например, положив $r_0 = 0$. Однако в осесимметричном потоке получить оптимальное тело совсем без протока нельзя (как и по теории Ньютона), так как, согласно (8), величина r_0 не может быть равна нулю. Поэтому потребуем, чтобы r_0 при заданном r_1 было минимальным. Тогда по (8) один параметр задается условием $\alpha_0 = 1/2 \pi$. Такие тела будем считать практически сплошными, так как даже для толстых тел r_0/r_1 меньше 1%. Уравнения (11) и (13) в этом случае после элементарных выкладок сводятся к одному кубическому уравнению вида

$$\Delta^3 + 3\Delta^2 + a\Delta + b = 0, \quad a = 6 \frac{k(\alpha_1) / \sin^2 \alpha_1 - l}{k_{\alpha_1}'(\alpha_1) / k(\alpha_1) - 2l}$$

$$b = \frac{6k(\alpha_1)}{k_{\alpha_1}'(\alpha_1) / k(\alpha_1) - 2l} \left\{ \left[\frac{z(\alpha_1)}{R(\alpha_1)} - \operatorname{ctg} \alpha_1 \right] l - \frac{z(\alpha_1)}{R(\alpha_1)} \left[\frac{z'(\alpha_1)}{z(\alpha_1)} - \frac{R'(\alpha_1)}{R(\alpha_1)} \right] \right\} \quad (14)$$

$$l \left(2 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_1 \frac{z(\alpha_1)}{R(\alpha_1)} \right) = \left\{ \frac{k(\alpha_1)}{\sin^2 \alpha_1 \cos^2 \alpha_1} - \operatorname{tg} \alpha_1 \frac{z(\alpha_1)}{R(\alpha_1)} \left[\frac{z'(\alpha_1)}{z(\alpha_1)} - \frac{R'(\alpha_1)}{R(\alpha_1)} \right] \right\}$$

Необходимые величины для построения оптимальной кривой находятся следующим образом. Задается значение параметра α_1 , затем вы-

числяются коэффициенты a , b , l и определяется с помощью уравнения (14) величина Δ . После этого из (11) и (8) находятся относительная толщина тела r_1 и координата точки сопряжения C по формулам

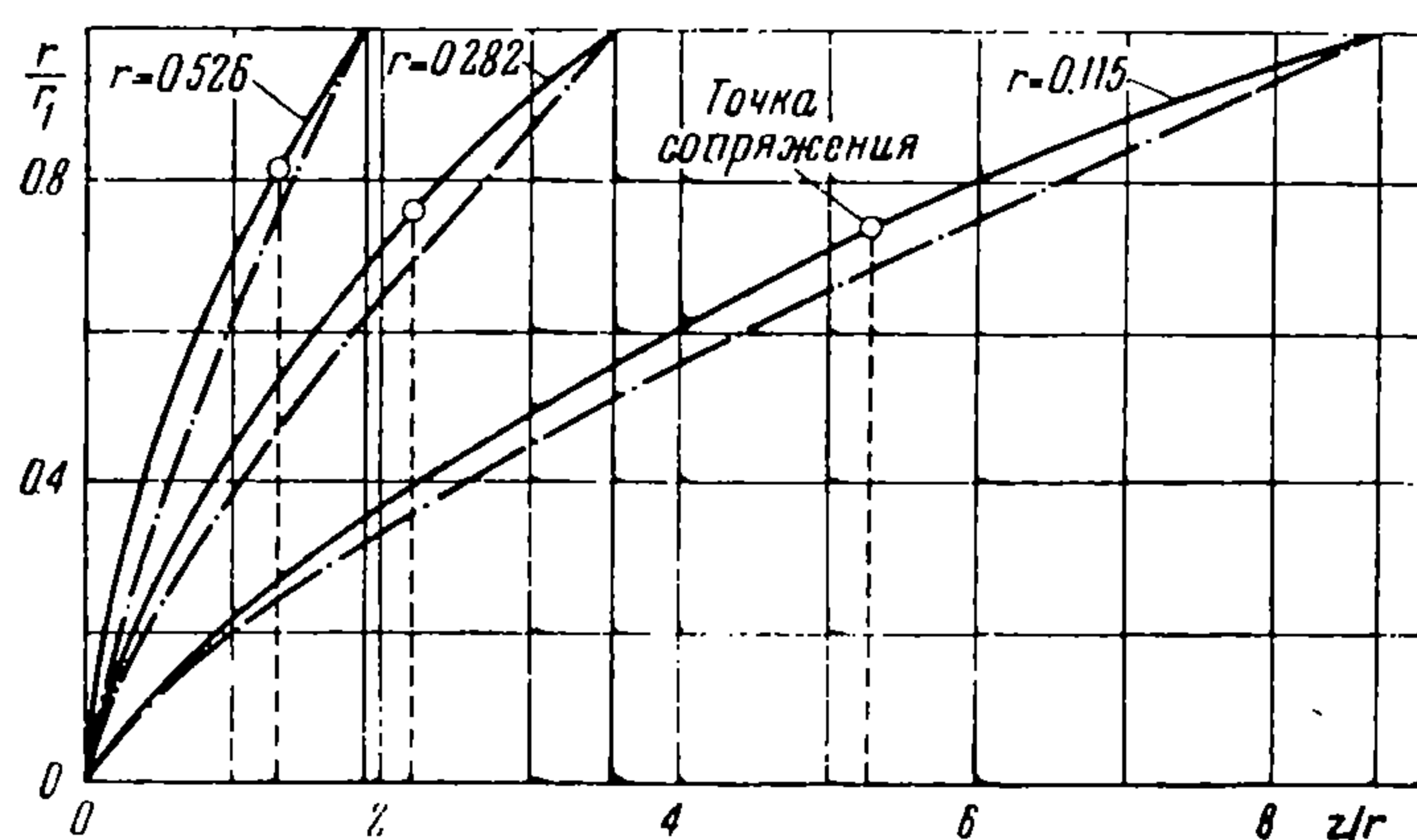
$$r_1 = \frac{6k(1 + \Delta)}{\Delta^3 + 3\Delta^2 + 6k[\Delta \operatorname{ctg} \alpha_1 + z(\alpha_1)/R(\alpha_1)]}, \quad c = \frac{z(\alpha_1)}{R(\alpha_1)} \frac{r_1}{1 + \Delta} \quad (15)$$

Результаты расчета при некоторых значениях параметра α_1 приведены в таблице. Для диапазона значений $r_1 \approx 0.1 \div 0.7$ координата точки сопряжения находится в интервале $0.6 \leq c \leq 0.7$ (для плоского потока $c = 0.5$). На фиг. 2

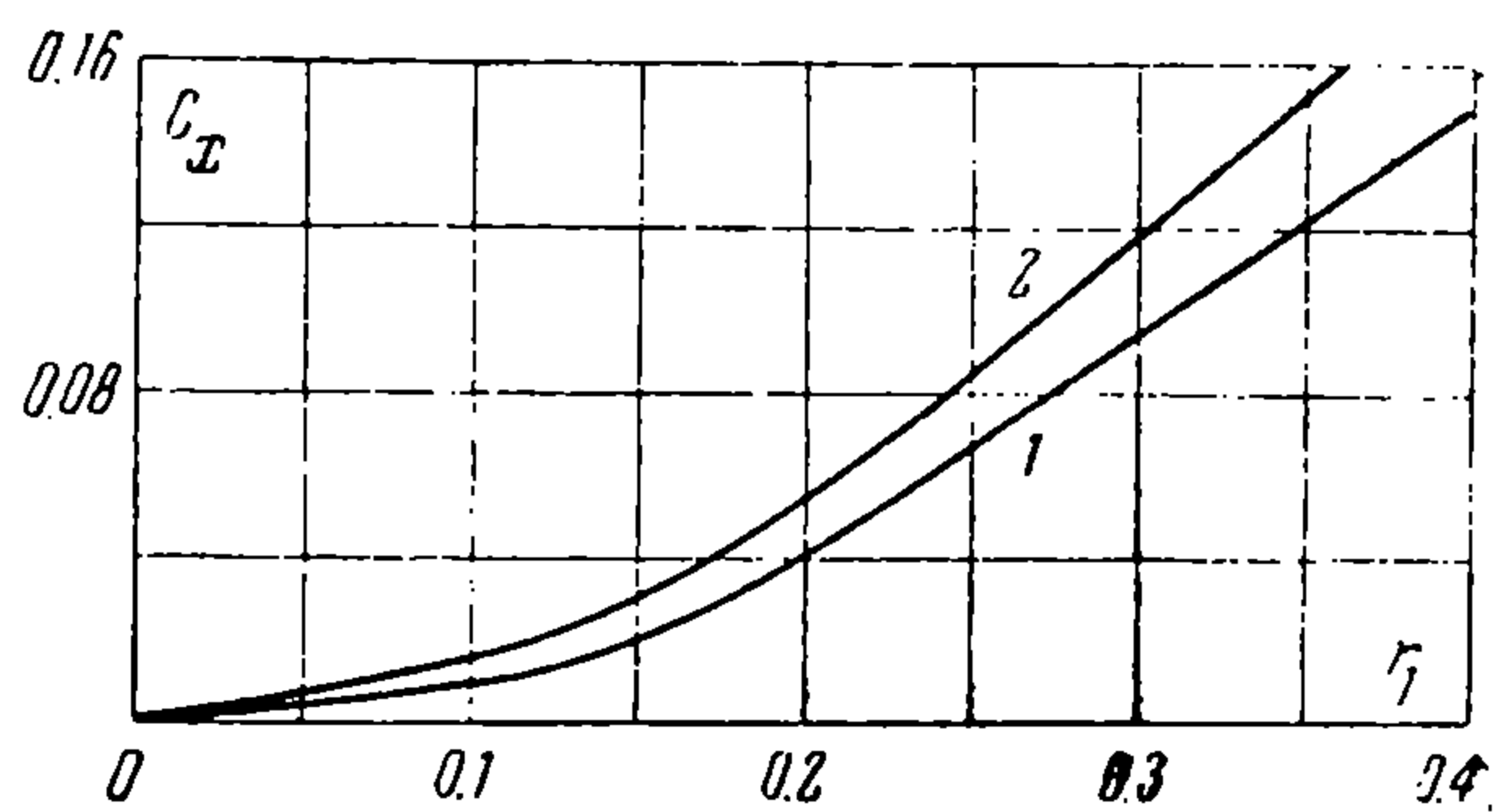
α_1	r_1/r_c	c	C_x	r_1
6°	1.345	0.607	0.011	0.116
8°30'	1.335	0.615	0.030	0.170
11°20'	1.328	0.620	0.054	0.230
14°	1.322	0.625	0.082	0.290
16°50'	1.282	0.644	0.121	0.365
22°	1.248	0.655	0.216	0.532
26°30'	1.206	0.704	0.335	0.673
28°50'	1.183	0.724	0.401	0.767

сплошными линиями нанесены несколько оптимальных кривых, рассчитанных указанным образом по формулам (4) и (8). Пунктиром для сравнения приведены формы оптимальных тел по Ньютону [1], которые в масштабе фигуры не отличаются от кривых $\sim x^{3/4}$. Зависимость сопротивления оптимального тела (5 от относительной толщины показана на фиг. 3 (кривая 1).

Там же приведена аналогичная зависимость, для тела оптимальной формы по Ньютону (кривая 2). Сопротивление оптимального тела, как показало сравнение, получилось меньше сопротивления известных оптимальных тел:



Фиг. 2



Фиг. 3

Коула — на 15 ÷ 17%, Ньютона или закона $\sim x^{3/4}$ — на 20 ÷ 22%. В некоторых случаях, когда толщина тела умеренная, удобно формулы (14) разложить в ряд по параметру α_1 .

Тогда имеем

$$a = 3 \left(1 - \frac{5}{4} \alpha_1^2 \right) + O(\alpha_1^4), \quad b = -\frac{3}{2} \left(1 - \frac{7}{4} \alpha_1^2 \right) + O(\alpha_1^4)$$

Автор признателен Г. Г. Черному за поставленную задачу.

Поступила 2 VII 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Eggers A. J., Resnikoff M. M. and Dannis D. H. Bodies of revolution having minimum drag at high supersonic airspeeds. NASA, 1957, Rep. 1306.
2. Гонор А. Л., Черный Г. Г. О телах наименьшего сопротивления при больших сверхзвуковых скоростях. Изв. АН СССР. ОТН, 1957, № 7.
3. Hayes W. D., Probstein R. F. Hypersonic flow theory. Academic Press, New York, 1959.
4. Lighthill M. J. Dynamics of a dissociation gas, Part I, Equilibrium flow. J. Fluid Mech., 1957, vol. 2,
5. Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. Физматгиз, 1959.