

ОБ ОСНОВНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ДИНАМИКИ ГРУНТОВ

С. С. Григорян

(Москва)

В краткой заметке автора [1] была предложена математическая модель, предназначенная для описания движений сред типа грунтов. Ниже дается подробное обсуждение этой модели, включая термодинамические вопросы.

Грунт представляет собой дисперсную среду—смесь минеральных частиц, воды и воздуха. Минеральные частицы образуют пористый скелет (как правило, сцементированный), поры которого заполнены водой и воздухом. При воздействии на грунт сравнительно небольшими нагрузками жесткость скелета оказывается достаточной для сопротивления этим нагрузкам, среда ведет себя упруго, и для описания ее деформирования и движения пригодна модель линейно-упругого тела Гука. При повышении нагрузки скелет постепенно разрушается, минеральные частицы располагаются более плотно (уменьшается пористость), все большую долю нагрузки начинают воспринимать вода и воздух; с дальнейшим ростом нагрузки разрушению подвергаются не только более слабые цементирующие связи, но и основные минеральные частицы скелета. При этих условиях модель Гука становится неприменимой, и ее нужно заменить новой. При построении такой модели следует позаботиться о том, чтобы она при малых нагрузках превращалась в модель Гука, а при больших — достаточно полно учитывала свойства среды, связанные с отмеченными процессами. Прежде всего нужно учесть то очевидное обстоятельство, что в то время как при повышении напряжений, сжимающих малый элемент грунта, вследствие переупаковки частиц и их дробления плотность элемента может заметно возрасти, при снятии нагрузки ввиду необратимости указанных процессов переупаковки и дробления плотность снижается незначительно. Поэтому процесс нагружения элемента и процесс его разгрузки должны описываться разными соотношениями.

Кроме того, в разрушенном скелете грунта связи между частицами в основном сводятся к их взаимным контактам, а силовое взаимодействие осуществляется путем взаимного сжатия и трения в местах контактов, поэтому сама величина конечного взаимного перемещения частиц не может влиять на возникающие напряжения (в отличие, например, от материалов типа резины, в которых конечные деформации определяют напряжения), т. е. компоненты тензора напряжений не должны зависеть от конечных деформаций сдвига. Напряжения должны быть связаны с деформацией текущего состояния, т. е. с тензором скоростей деформаций. Вместе с тем, эта связь должна сохранить существенное свойство сухого трения, при помощи которого при умеренной влажности осуществляется силовое взаимодействие между минеральными частицами. Это свойство заключается в однородности закона сухого трения во времени. Таким свойством не обладает, например, связь между напряжениями и скоростями деформаций в модели вязкой жидкости Ньютона. Этим свойством обладает такая связь в теориях течения в пластичности металлов.

Наконец, в формировании компонентов тензора напряжений участвуют не только силы сухого трения между контактирующими минеральными частицами, но и силы упругости, возникающие внутри самих этих частиц, поэтому в соотношениях между компонентами тензоров напряжений и скоростей деформаций должны быть, вообще говоря, учтены упругие составляющие.

Учет такого рода требований проводится в теории пластичности Прандтля — Рейсса [2, 3], положения которой здесь используются при описании пластической деформации сдвига.

Можно полагать, что в изотропной среде характер объемной деформации определяется средним напряжением (или гидростатическим давлением, как это принято называть в теории твердого тела), причем величина объемной деформации однозначно определяется изменением плотности среды. Поэтому в качестве первой гипотезы примем предположение о существовании однозначного соответствия между средним напряжением — давлением $p = -\frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$ и плотностью ρ , которая, однако, различна для случаев, когда при возрастании p происходит необратимое изменение объема, т. е. происходит пластическая объемная деформация, и когда изменения объема происходят обратимо, т. е. объемная деформация протекает упруго. Этим конструируемая модель среды наиболее существенным образом отличается от моделей различных теорий пластичности, в которых объемная деформация всегда считается протекающей упруго (обратимо), если она вообще не предполагается отсутствующей [2-4]. Это связано с тем, что плотные непористые материалы (главным образом металлы), для которых строятся теории пластичности, действительно в опытах не обнаруживают заметных необратимых объемных деформаций, в то время как грунты благодаря их дисперсному строению и пористости весьма характерны именно способностью к таким деформациям. Кроме этого, они, конечно, легко поддаются и необратимым сдвиговым деформациям, и в этом отношении они принципиально не отличаются от металлов.

§ 1. Основные гипотезы и полная система механических уравнений. Будем считать, что, если элемент среды испытывает необратимые изменения объема, то давление при этом связано с плотностью соотношением

$$p = f_1(\rho) \quad (1.1)$$

Необратимые изменения плотности (объема) имеют место лишь при нагружении, поэтому будем считать, что соотношение (1.1) возможно лишь при необходимом условии $dp/dt > 0$. Если же после некоторого этапа роста p , при котором происходила необратимая объемная деформация, давление в частице начинает падать, а после некоторого такого падения может возрасти, но не достигая первоначально достигнутого при необратимом деформировании уровня, так что изменения объема происходят обратимо, то связь между давлением и плотностью для этого процесса определяется другим соотношением

$$p = f_2(\rho, p_*) \quad (1.2)$$

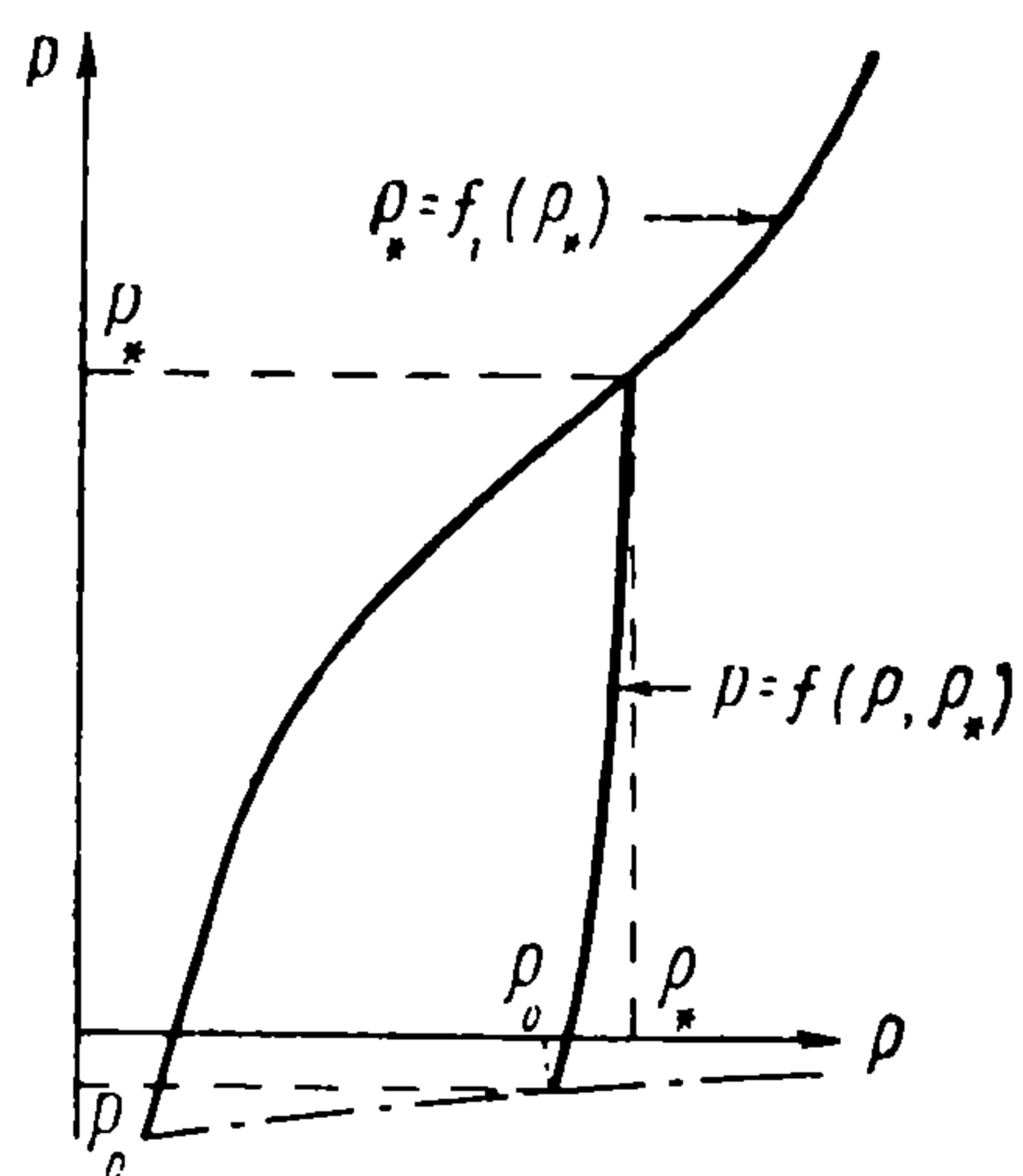
В этом соотношении в качестве параметра фигурирует максимальное давление p_* , действию которого была подвергнута рассматриваемая частица в процессе предыдущего необратимого изменения ее объема. При помощи (1.1) можно ввести в рассмотрение значение плотности ρ_* , соответствующее p_* ,

$$p_* = f_1(\rho_*) \quad (1.3)$$

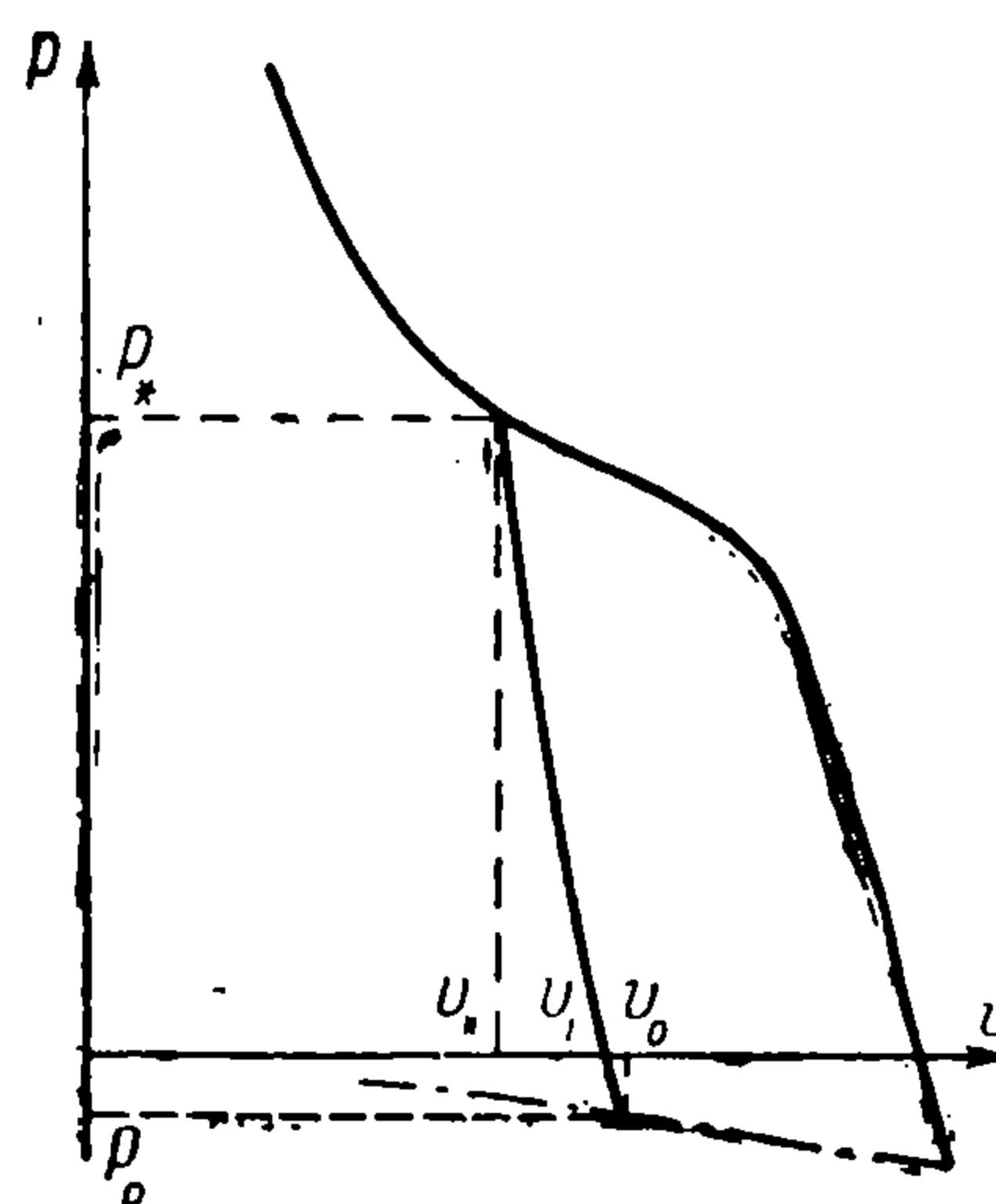
и ввести в соотношение (1.2) вместо p_* параметр ρ_* . Для данной частицы параметр ρ_* , так же как и p_* , может только возрасти, причем это будет происходить только при протекании необратимой объемной деформации; при упругих изменениях объема частицы p_* и ρ_* не будут изменяться. Поэтому p_* (или ρ_*) можно рассматривать как параметр, характеризующий остаточную (необратимую) объемную деформацию.

Опыт [5] и простые интуитивные соображения показывают, что функции f_1 и f_2 имеют качественно вид, изображенный на фиг. 1.

На фиг. 2 изображена та же картина в плоскости $p, V = 1/\rho$. Функция (1.1) при малых значениях p должна иметь начальный упругий участок в соответствии со сказанным во введении. При разгрузке от любой точки p_* , ρ_* на кривой (1.3) происходит обратимое



Фиг. 1



Фиг. 2

изменение объема, и точка, изображающая этот процесс, перемещается по кривой (1.2). Эта точка может опуститься лишь до положения ρ_0 , ρ_0 , которое соответствует такому состоянию частицы, когда она более не может выдержать растягивающего всестороннего напряжения и разрушается. Совокупность таких состояний на фиг. 1, 2 изображена штрихпунктирной линией, уравнение которой возьмем в виде

$$\rho_0 = \Phi(\rho_0) \quad (1.4)$$

Последнее соотношение устанавливает зависимость давления разрушения от плотности, при которой происходит разрушение; обе эти величины, очевидно, однозначно определяются степенью необратимой объемной деформации, т. е. параметром p_* (или ρ_*). Если среда не обладает сцеплением, то $\rho_0 \equiv 0$. Поскольку в среде, обладающей в начальном естественном состоянии сцеплением, в процессе необратимой объемной деформации скелет постепенно разрушается и уменьшается сцепление, с ростом p_* , т. е. ρ_0 , абсолютная величина ρ_0 должна убывать. Она может с определенного значения ρ_0 (т. е. p_*) обратиться в нуль и оставаться нулем при всех больших значениях $\rho_0(p_*)$. Это будет соответствовать полной потере сцепления при значительной необратимой объемной деформации.

При очень больших давлениях пористость среды будет почти полностью ликвидирована, и материал будет сжиматься без заметной необратимой объемной деформации подобно металлам и непористым горным породам. Поэтому следует считать, что p_* и ρ_* ограничены сверху некоторыми предельными значениями $p_{*\infty}$, $\rho_{*\infty}$, после достижения которых зависимости (1.1) и (2.2) совпадают, и вся объемная деформация протекает обратимо.

Итак, множество состояний на плоскости p, ρ (или p, V), изменение которых происходит обратимо, изображается областью, ограниченной

сверху и слева кривой (1.3), снизу — кривой (1.4) и справа — кривой (1.2) при значении параметра $p_* = p_{*\infty}$. Обратимые изменения состояний в этой области происходят при неизменном p_* (или ρ_*) вдоль линий однопараметрического семейства, определяемого соотношением (1.2); параметром на линиях семейства является p_* (или ρ_*). Кроме этой области, обратимые изменения состояния могут происходить при $p > p_{*\infty}$ вдоль продолжения линии $p_* = p_{*\infty}$, совпадающего с линией (1.3) при $p > p_{*\infty}$.

Для упрощения обращения с описанными выше достаточно сложными свойствами объемной деформации среды, особенно важного при численном решении задач, дадим единое аналитическое их представление. Нижеследующие соотношения, очевидно, осуществляют такое представление.

Во-первых, вместо (1.1), (1.2) и (1.3) пишем

$$\begin{aligned} p &= f(\rho, \rho_*) e(\rho - \rho_0) e(\rho_* - \rho), & p_* &= f(\rho_*, \rho_*) \equiv f_1(\rho_*) \\ \rho_0 &= f(\rho_0, \rho_*) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Далее, из соотношений (1.4) и (1.5) получаем

$$f(\rho_0, \rho_*) = \varphi(\rho_0) \quad \text{или} \quad \rho_0 = \Psi(\rho_*) < \rho_* \quad (1.6)$$

Наконец, условие того, что необратимая объемная деформация происходит только с возрастанием ρ_* , выражаем в виде

$$\frac{d\rho_*}{dt} = \frac{d\rho}{dt} e(\rho - \rho_*) e\left(\frac{d\rho}{dt}\right) \quad (1.7)$$

Здесь оператор d/dt означает полную производную по времени. Функция $e(u)$ в соотношениях (1.5), (1.7) — единичная функция:

$$e(u) = \begin{cases} 1 & (u \geq 0) \\ 0 & (u < 0) \end{cases} \quad (1.8)$$

Ясно, что в силу соотношений (1.5) — (1.8) при $\rho_0 < \rho < \rho_*$ происходит только обратимая объемная деформация ($\rho_* = \text{const}$), и лишь при $\rho = \rho_*$ и $d\rho/dt > 0$ часть объемной деформации протекает необратимо ($d\rho_* > 0$).

Заметим здесь, что в то время как изменения ρ_* могут, вообще говоря, быть значительными, изменения плотности при чисто обратимой объемной деформации будут малыми, так как они определяются упругой деформацией минеральных частиц и воды, которая незначительна. Поэтому следует считать, что

$$\rho_* - \rho_0 \ll \rho_* \quad (1.9)$$

Это условие существенно используется ниже.

Переходя к аналитическому описанию деформации сдвига в предлагаемой модели, отметим, что мы формулируем, по-видимому, простейшие в принципиальном отношении зависимости, которые бы содержали в себе все описанные в начале работы качественные особенности деформации сдвига в грунте. Тем не менее, они оказываются весьма сложными математически. Именно, следуя основным идеям теории Прандтля — Рейсса, будем предполагать, что при условиях, когда деформация сдвига

не может протекать чисто упруго, часть бесконечно малой сдвиговой деформации текущего состояния элемента протекает пластически (необратимо) и пропорциональна девиатору тензора напряжений. Это имеет место при условии, что указанный девиатор в определенном смысле существенно отличается от нуля (что и вызывает необратимую деформацию сдвига), причем величина этого отклонения, при достижении которой начинается пластическая деформация, зависит, вообще говоря, от давления.

Последнее условие аналитически выражается в виде некоторого соотношения (условия пластичности), которое возьмем в виде зависимости второго инварианта указанного девиатора от p

$$J_2 \equiv \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} = F(p) \quad (S_{ij} = \sigma_{ij} + p\delta_{ij}) \quad (1.10)$$

Здесь F — неубывающая функция своего аргумента.

Видом условия пластичности (1.10) предлагаемая модель также отличается от моделей теории пластичности металлов, в которых J_2 принимается либо постоянной при пластической деформации (идеальная пластичность), либо зависящей от характеристик пластической деформации (упрочнение). Соотношение (1.10) является условием типа идеальной пластичности, в котором, однако, предел пластичности зависит от первого инварианта тензора напряжений — давления p . Это — условие типа Мизеса — Шлейхера [3, 4, 6].

В теории предельного равновесия сыпучей среды и грунтов [7, 8], обычно рассматривающей лишь плоскую задачу, в качестве условия предельного равновесия, т. е. условия пластичности, принимается закон трения Кулона или более общее условие прочности Мора, связывающее на площадках скольжения нормальное и касательное напряжения. Эти условия, удобные в плоской задаче предельного равновесия, непригодны в общем пространственном случае ввиду сложности их аналитического представления. По этой причине мы предлагаем аналитически более простое соотношение (1.10), которое обладает такой же механической природой, что и условия Кулона — Мора, и может рассматриваться как аппроксимирующее их. Здесь мы поступаем, следуя Мизесу, который в теории пластичности металлов заменил условие текучести Треска более простым (условием Мизеса), оказавшимся впоследствии во многих случаях в лучшем соответствии с опытными данными, чем условие Треска [2, 3].

Правильное описание упругой части бесконечно малой деформации текущего состояния в случае, когда возможны значительные деформации, встречает наибольшие трудности; они связаны с тем, что, с одной стороны, и пластическая, и упругая составляющие бесконечно малой деформации текущего состояния выражаются через тензор скоростей деформаций, а с другой стороны — упругий закон связывает тензор напряжений с тензором самих упругих деформаций, а не их скоростей. Поэтому для написания объединенных соотношений, связывающих напряжения по необходимости со скоростями деформаций, приходится писать закон упругости в дифференциальной форме. А это в случае развитого течения, когда полные деформации и перемещения не малы и состояние, относительно которого отсчитываются упругие составляющие деформации, непрерывно и существенно изменяется представляет нетривиальную задачу.

В частности, возникает трудность в определении скорости изменения напряжений, которая должна использоваться в упругом законе, написанном в дифференциальной форме. На эти вопросы недавно обратил внимание В. Прагер, который в своем докладе на Всесоюзном съезде по механике подверг сравнительному анализу различные определения скорости изменения во времени тензора напряжений, существующие в литературе, и отметил некоторые преимущества определения Яумана [9]. Изучению вопроса о дифференцировании тензоров по времени в общей

трактовке теории конечных деформаций посвящена написанная в связи с этим докладом работа Л. И. Седова [10]. В нашей работе [1] учет упругих деформаций в соотношениях течения был произведен в свете этих представлений неверно, и здесь мы устраняем эту неточность.

Для описания упругой составляющей деформации сдвига будем пользоваться определением Яумана производной по времени девиатора тензора напряжений [9]. Это приводит к следующим соотношениям между компонентами девиатора тензора напряжений и девиатора тензора скоростей деформаций

$$G \left(e_{ij} - \frac{1}{3} e_{kk} \delta_{ij} \right) = \frac{\tilde{d}S_{ij}}{dt} + \lambda S_{ij} \quad \left(e_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.11)$$

где G — модуль сдвига, а производная $\tilde{d}S_{ij}/dt$ по Яуману определяется формулой

$$\frac{\tilde{d}S_{ij}}{dt} = \frac{dS_{ij}}{dt} - S_{ik}\Omega_{jk} - S_{jk}\Omega_{ik}, \quad 2\Omega_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \quad (1.12)$$

Величина λ должна быть положительной, когда происходит пластическая деформация сдвига, и тождественно обращаться в нуль при упругом сдвиге. Таким образом, соотношения (1.11) при $\lambda \equiv 0$ и следует рассматривать как определение упругого закона в данной модели. Легко показать, что при малых перемещениях и деформациях это определение переходит в обычный закон Гука.

Множитель λ , как обычно, можно исключить при помощи условия пластичности (1.10). Для этого умножаем (1.11) на S_{ij} и суммируем

$$2GW \equiv GS_{ij} \left(e_{ij} - \frac{1}{3} e_{kk} \delta_{ij} \right) = GS_{ij} e_{ij} = S_{ij} \frac{\tilde{d}S_{ij}}{dt} + \lambda S_{ij} S_{ij} \quad (1.13)$$

Можно показать, что

$$S_{ij} \frac{\tilde{d}S_{ij}}{dt} = S_{ij} \frac{dS_{ij}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(S_{ij} S_{ij})}{dt} = \frac{dJ_2}{dt} \quad (1.14)$$

Поэтому (1.13), (1.14) с учетом (1.10) дают для λ .

$$\lambda = \frac{2GW - F'(p) dp/dt}{2F(p)} \quad (1.15)$$

Формула (1.15) имеет место только при $J_2 = F(p)$ и при условии что $\lambda > 0$, т. е. при $2GW - F'(p) dp/dt > 0$. Если эти условия не выполняются, то $\lambda \equiv 0$.

Как и выше, все эти свойства параметра λ можно и следует выразить при помощи единого аналитического соотношения

$$\lambda = \frac{2GW - F'(p) dp/dt}{2F(p)} e [J_2 - F(p)] e \left[2GW - F'(p) \frac{dp}{dt} \right] \quad (1.16)$$

где $e(u)$ — единичная функция (1.8). Таким образом, соотношения (1.11), (1.12), (1.16) дают полное описание деформации сдвига.

Эти соотношения вместе с (1.5) — (1.8) и уравнениями движения

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho F_i^e - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.17)$$

и неразрывности

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.18)$$

образуют полную замкнутую систему механических уравнений предлагаемой модели.

Подобно модели вязкой несжимаемой жидкости, моделям теории пластичности и некоторым другим, здесь замкнутая система уравнений построена без использования закона сохранения энергии. Вопрос о том, как в таких случаях записывается уравнение энергии и вообще какая термодинамика соответствует такого рода моделям, рассмотрен в работе [11].

§ 2. Термодинамика среды и уравнение энергии. Уравнение притока тепла в общем случае записывается в виде [12]

$$\frac{\delta Q}{\delta t} = \rho \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{1}{2} \sigma_{ij} e_{ij} \quad (2.1)$$

где количество в левой части уравнения есть внешний приток тепла к единице объема в единицу времени, а ε — внутренняя энергия единицы массы среды. Используя соотношения (1.10), (1.11), (1.13), (1.14), (1.16), приведем уравнение (2.1) к виду

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\delta Q}{\delta t} - \frac{1}{2} p e_{kk} + \frac{1}{2G} \frac{dJ_2}{dt} + \\ + \left[W - \frac{1}{2G} F'(p) \frac{dp}{dt} \right] e [J_2 - F(p)] e \left[W - \frac{1}{2G} F'(p) \frac{dp}{dt} \right] \end{aligned} \quad (2.2)$$

Разделив уравнение (2.2) на ρ и воспользовавшись соотношениями (1.11) и (1.18), получим

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\delta Q}{\delta t} - p \frac{d(1/\rho)}{dt} + \frac{1}{2G\rho} \frac{dJ_2}{dt} + \\ + \frac{1}{\rho} \left[W - \frac{1}{2G} F'(p) \frac{dp}{dt} \right] e [J_2 - F(p)] e \left[W - \frac{1}{2G} F'(p) \frac{dp}{dt} \right] \end{aligned} \quad (2.3)$$

Введем теперь величину V_e по формуле

$$V_e = V_1 - V, \quad V_1 = V_1(V_*) \quad (V = 1/\rho, V_* = 1/\rho_*) \quad (2.4)$$

где V_1 — значение удельного объема в точке пересечения кривой упругого изменения объема с осью удельных объемов (фиг. 2). Поскольку в силу уравнения (1.7) всегда $\rho \leq \rho_*$, т. е. $V \geq V_*$, и, кроме того, $\rho \geq \rho_0$, т. е. $V \leq V_0$, для V_e справедливы неравенства

$$V_1 - V_0 \leq V_e \leq V_1 - V_* \quad (2.5)$$

Далее из формул (2.4), (1.7) вытекает, что

$$\frac{dV_e}{dt} = \frac{dV}{dt} \left[-1 + \frac{dV_1}{dV_*} e(V_* - V) e\left(-\frac{dV}{dt}\right) \right] \quad (2.6)$$

и, следовательно, при чисто обратимом изменении объема $dV_e/dt = -dV/dt$. Наконец, в силу условия (1.9),

$$V_e \ll V_*, \quad V_1 \approx V_* \quad (2.7)$$

Пользуясь последним обстоятельством, можно в уравнении (2.3) всюду, где имеется множитель $1/\rho = V$, заменить его на V_* , отбрасывая величины порядка $(V_1 - V_*)/V_*$, малые по сравнению с единицей. Уравнение в результате примет вид

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = V_* \frac{\delta Q}{\delta t} - p \frac{dV}{dt} + \frac{V_*}{2G} \frac{dJ_2}{dt} + \\ + V_* \left[W - \frac{1}{2G} F'(p) \frac{dp}{dt} \right] e [J_2 - F(p)] e \left[W - \frac{1}{2G} F'(p) \frac{dp}{dt} \right] \quad (2.8)$$

Перейдем теперь к определению системы термодинамических параметров состояния и вида термодинамических функций состояния. Рассмотрим для этого сначала обратимый процесс. В этом случае $dV_*/dt = 0$, последний член в правой части (2.8) также обращается в нуль, а внешний приток тепла к единице массы $V_* \delta Q / \delta t$ в силу второго закона термодинамики обращается в величину $T dS / dt$, где S — энтропия единицы массы, а T — абсолютная температура частицы. Таким образом, уравнение притока тепла (2.8) для обратимых процессов превращается в следующее термодинамическое тождество:

$$d\varepsilon = T dS + p dV_e + \frac{V_*}{2G} dJ_2 \quad (2.9)$$

Это соотношение показывает, что в качестве параметров состояния для обратимых процессов следует принять величины T , V_e , J_2 . Кроме того, термодинамические функции, конечно, могут зависеть как от простого параметра (но не параметра состояния!) от величины V_* [11]. Условия интегрируемости dS приводят к необходимости выполнения соотношений

$$-\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial J_2}\right)_{T, V_e} + \frac{V_*}{2G} = T \left[\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{V_*}{2G} \right) \right]_{V_e, J_2} \\ - \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial V_e} \right)_{T, J_2} + p = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_{V_e, J_2}, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial J_2} \right)_{T, V_e} = \left[\frac{\partial}{\partial V_e} \left(\frac{V_*}{2G} \right) \right]_{T, J_2} \quad (2.10)$$

Заметим здесь, что наиболее общая модель при рассматриваемых параметрах состояния получится, если давление p , модуль сдвига G и теплоемкость $C_{V_e, J_2} = (\partial \varepsilon / \partial T)_{V_e, J_2}$ при постоянных V_e и J_2 задать в виде функций от аргументов T , V_e , J_2 , удовлетворяющих лишь условиям (2.10), а в остальном произвольных. Именно, если полагать известной зависимость

$$p = p(T, V_e, J_2; V_*) \quad (2.11)$$

то с учетом (2.10) будем иметь

$$\frac{V_*}{2G} = \int_0^{V_e} \left(\frac{\partial p}{\partial J_2} \right)_{T, V_e} dV_e + \frac{V_*}{2G_0(T, J_2; V_*)} \quad (2.12)$$

$$C_{V_e, J_2} = -T \left[\int_0^{V_e} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2} \right)_{V_e, J_2} dV_e + \int_0^{J_2} \left[\frac{\partial^2}{\partial T^2} \left(\frac{V_*}{2G} \right) \right]_{V_e, J_2} dJ_2 \right] + C_{V_e, J_2}^\circ(T; V_*) \quad (2.13)$$

где G_0 и C_{V_e, J_2}° — произвольные функции своих аргументов и могут зависеть от параметра V_* .

Имея эти выражения, интегрированием находим внутреннюю энергию и энтропию

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \int_0^{V_e} \left[p - T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_{V_e, J_2} \right] dV_e + \\ & + \int_0^{J_2} \left\{ \frac{V_*}{2G} - T \left[\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{V_*}{2G} \right) \right]_{V_e, J_2} \right\} dJ_2 + \int_0^T C_{V_e, J_2} dT + \varepsilon_0(V_*) \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$S = \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{T} - \frac{1}{T} \int_0^{V_e} p dV_e - \frac{1}{T} \int_0^{J_2} \frac{V_*}{2G} dJ_2 + S_0(V_*) \quad (2.15)$$

Здесь ε_0 и S_0 , — вообще говоря, произвольные функции параметра V_* , не являющегося термодинамическим параметром состояния, ибо при обратимых процессах он не меняется. Определение вида этих функций связано с изучением механизма необратимых микропроцессов в среде [11]. Для вычисления первого интеграла в (2.15), написанного для краткости в символическом виде, нужно использовать соотношения (2.10). По известным формулам, имея (2.14), (2.15), можно получить выражения для остальных термодинамических функций.

Полученные выражения для уравнений состояния (2.11), (2.12), теплоемкости (2.13), внутренней энергии и энтропии (2.14), (2.15) зависят, как от параметра, от V_* — меры объемной пластической деформации. При протекании объемной пластической деформации параметр V_* будет убывать, а процесс будет термодинамически необратимым. Необратимость также будет иметь место в деформации сдвига, если $\lambda > 0$, а также за счет теплопроводности в среде. Чтобы иметь нужные термодинамические соотношения также для описания этих процессов, мы сделаем, так же, как и в примерах, рассмотренных в [11], основное термодинамическое предположение, заключающееся в том, что все написанные выше термодинамические соотношения остаются в силе также и для необратимых процессов. Однако в то время, как при написании термодинамических тождеств (2.9), (2.10) параметр V_* считается постоянным, при подстановке формул (2.11) — (2.15) в уравнения, описывающие процессы при наличии необратимостей, нужно учитывать изменение (убывание) параметра V_* , определяемое дифференциальным уравнением (1.7).

Соответствие этого предположения действительности, конечно, можно установить лишь опытным путем.

Простейший частный случай описанной выше термодинамики, соответствующий построенной в первом параграфе механической модели, мы получим, приняв наряду с вытекающим из соотношения (1.5) допущением о независимости давления p от T и J_2 еще предположение о независимости модуля сдвига G от T и J_2 . Тогда из (2.12) будет следовать, что G не зависит также от V_e , а из (2.13) будет следовать, что теплоемкость зависит только от T и V_* , и, следовательно, все теплоемкости будут совпадать между собой, а коэффициент теплового расширения будет равен нулю [11]. Формулы же (2.14), (2.15) перейдут в

$$\varepsilon = \int_0^{V_e} p(V_e; V_*) dV_e + \frac{V_*}{2G(V_*)} J_2 + \int_0^T C(T; V_*) dT + \varepsilon_0(V_*) \quad (2.16)$$

$$S = \int_0^T \frac{C(T; V_*)}{T} dT + S_0(V_*) \quad (2.17)$$

Таким образом, полная модель оказывается моделью с разделяющейся энергией, при этом энтропия зависит только от температуры и V_* , вполне аналогично случаю обычной пластической среды [11].

Подставив выражение для ε (2.16) в уравнение (2.8) и принимая для внешнего притока тепла закон

$$\frac{\delta Q}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \quad (2.18)$$

где κ — коэффициент теплопроводности, и используя (2.6), (1.7), получим окончательно уравнение притока тепла применительно к рассматриваемой модели в виде

$$\begin{aligned} C(T; V_*) \frac{dT}{dt} = & V_* \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) - \left(p \frac{dV_1}{dV_*} + \frac{\partial e}{\partial V_*} \right) \frac{dV_*}{dt} + \\ & + V_* \left[W - \frac{1}{2G} F'(p) \frac{dp}{dt} \right] e [J_2 - F(p)] e \left[W - \frac{1}{2G} F'(p) \frac{dp}{dt} \right] \end{aligned} \quad (2.19)$$

Это уравнение служит для определения поля температур, после того как механическая задача решена. В правой части его первое слагаемое определяет приток тепла, связанный с теплопроводностью. Второе слагаемое определяет приток тепла, связанный с диссипацией механической энергии, вызванной необратимой объемной деформацией; этот приток тепла равен избытку работы давления на пластической объемной деформации над работой, идущей на необратимое изменение внутренней энергии при изменении параметра V_* . Точно так же, как и в [11], можно показать, что этот избыток должен быть неотрицательным. Наконец, третье слагаемое определяет приток тепла, связанный с диссипацией механической энергии из-за пластической деформации сдвига. Это количество также всегда неотрицательно. Все это вместе с естественным условием $(\partial S / \partial V_*) (dV_* / dt) \geq 0$ так же, как и в [11], находится в соответствии с требованием второго закона термодинамики о неубывании энтропии в любом теплоизолированном материальном объеме среды.

§ 3. Характер диссипации в среде и моделирование. Построенная в предыдущих параграфах модель среды содержит диссипативный механизм, осуществляющий превращение механической энергии в теплоту. Потери механической энергии в этой модели могут, с одной стороны, возникать, когда протекает пластическая объемная деформация, т. е. когда меняется параметр ρ_* . При этом в теплоту превращается часть работы сил давления на объемной деформации (второй член в правой части уравнения (2.19)). С другой стороны, они будут возникать, если сдвиговая деформация протекает пластически, т. е. когда $\lambda > 0$. При этом в теплоту будет превращаться часть работы сдвигающих напряжений на деформациях сдвига (третий член в правой части уравнения (2.19)).

В силу особой структуры основных соотношений модели, заключающейся в их однородности во времени, диссипация в среде обладает свойствами сухого трения, поэтому характер движений среды в определенном смысле не зависит от скорости их протекания. Для более точного выражения сказанного следует рассмотреть два класса движений: первый — движения, в которых можно пренебречь ускорениями в уравнениях движения, и второй — движения, в которых ускорения существенны (динамические задачи).

Легко проверить, что в первом случае при отсутствии массовых сил ($F_i^e = 0$) полная система механических соотношений (но не уравнение энергии (2.19)) инва-

риантна относительно группы преобразований (3.1)

$$v_i' = kv_i / \dot{\varphi}(t), \quad p' = p, \quad \rho' = \rho, \quad \rho_*' = \rho_*, \quad S_{ij}' = S_{ij}, \quad x_i' = kx_i, \quad t' = \varphi(t)$$

где $\varphi(t)$ — произвольная монотонно растущая функция, а k — произвольная положительная постоянная (при наличии массовых сил инвариантность будет иметь место при $k=1$). Это и означает, что для указанного класса движений в данной модели время как таковое несущественно, характер движения не зависит от темпа его развития, от скорости процесса. В этом отношении модель полностью подобна моделям теории течения в пластичности [2-4]. Ясно, что далеко не всякая модель сплошной среды, в которой напряжения связаны со скоростями деформации, обладает указанным свойством. Модель вязкой жидкости Ньютона, например, не обладает этим свойством; для движений вязкой жидкости скорость процесса является весьма существенной величиной, определяющей характер таких движений.

Отметим, что для рассматриваемого случая уравнение энергии (2.19) не инвариантно, вообще говоря, относительно группы (3.1). Если, однако, скорости явления таковы, что членами, связанными с теплопроводностью среды, в уравнении (2.19) можно пренебречь, то эта инвариантность сохранится, т. е. к соотношениям (3.1) добавится

$$T' = T \quad (3.2)$$

Для второго класса движений полная система механических соотношений при отсутствии массовых сил инвариантна лишь относительно подгруппы подобия по времени и пространству группы (3.1), соответствующей частному виду функции $\varphi(t) = kt$

$$v_i' = v_i, \quad p' = p, \quad \rho' = \rho, \quad \rho_*' = \rho_*, \quad S_{ij}' = S_{ij}, \quad x_i' = kx_i, \quad t' = kt \quad (3.3)$$

Здесь также уравнение энергии не будет инвариантным из-за наличия в нем членов, связанных с теплопроводностью. Если этими членами можно пренебречь, то инвариантным будет и уравнение энергии, и к соотношениям (3.3) добавится (3.2).

В данном случае инвариантность уравнений относительно (3.3) позволяет лишь утверждать, что геометрически подобные движения, т. е. движения, у которых характеристики граничных и начальных условий геометрически подобны, будут подобными и в целом для одной и той же среды, при выполнении некоторых простых добавочных условий подобия.

Для разъяснения сказанного рассмотрим простой пример. Пусть в пространстве, наполненном рассматриваемой здесь средой, находящейся в покое и однородной, происходит детонация заряда взрывчатого вещества сферической формы. Требуется найти возникающее при этом движение среды. В данной задаче искомыми функциями будут радиальная скорость частиц среды v , два главных напряжения σ_r и σ_θ и плотности ρ и ρ_* . Они будут зависеть от радиальной координаты r , времени t и параметров: p_1 , $\sigma_{r_1} = \sigma_{\theta_1} = -p_1$ — начальных данных, r_0 — радиуса заряда, ρ_0 — плотности вещества заряда, q — количества тепла, выделяющегося при сгорании единицы массы заряда, γ — показателя адиабаты продуктов детонации заряда, а также ряда параметров ρ_i, K_i , имеющих размерности плотности и напряжения, которые фигурируют в основных соотношениях модели¹. Считаем массовые силы отсутствующими. Не решая задачи, на основе анализа размерностей [13] можно установить, что зависимость искомых функций от системы их переменных и постоянных аргументов имеет вид

$$v = \sqrt{\frac{p_1}{\rho_1}} V \left(\frac{r}{r_0}, \sqrt{\frac{p_1}{\rho_1}} \frac{t}{r_0}, \frac{\rho_0}{\rho_1}, \frac{q\rho_1}{p_1}, \gamma, \frac{\rho_i}{\rho_1}, \frac{K_i}{p_1} \right) \quad (3.4)$$

$$\sigma_r = p_1 \Sigma_r, \quad \sigma_\theta = p_1 \Sigma_\theta, \quad \rho = \rho_1 R, \quad \rho_* = \rho_1 R_*$$

где $V, \Sigma_r, \Sigma_\theta, R, R_*$ — безразмерные функции безразмерных аргументов, выписанных только для V . Из формул (3.4) следует, что для подобия двух движений, соз-

¹ Процессами теплообмена в продуктах детонации и между этими продуктами и грунтом пренебрегаем.

данных в одной и той же среде двумя различными зарядами, необходимо, чтобы оба заряда были изготовлены из одного и того же вещества (или из веществ с одинаковыми ρ_0, q, γ), а начальные давления и плотность в среде p_1, ρ_1 были бы в обоих случаях одинаковыми. В этом случае у обоих движений функции $V, \Sigma_r, \Sigma_\theta, R, R_*$ будут совпадать, и в геометрически подобных точках, т. е. в точках, координаты которых связаны соотношением $r_2 = r_1 r_{20} / r_{10} \equiv \mu r_1$, в моменты, связанные соотношением $t_2 = \mu t_1$, будут одинаковыми скорости, напряжения и плотности.

Возможность отмеченного типа подобия движений, называемого иногда простым геометрическим подобием, обеспечивается, очевидно, строением соотношений модели, допускающим преобразования (3.3), или, с другой точки зрения, тем, что имеющиеся в соотношениях модели постоянные параметры имеют только размерности плотности или напряжения.

При моделировании необходимо иметь в виду, что конкретное движение будет происходить в поле силы тяжести, которое, вообще говоря, будет влиять на движение. Однако в определенных задачах влияние силы тяжести может оказаться несущественным, и тогда обычные трудности, связанные с необходимостью изменения ускорения силы тяжести g при моделировании, требующегося для подобия, отпадают. В качестве примера рассмотрим ту же задачу о взрыве.

В начальный момент в среде из-за наличия силы тяжести будут существовать начальные напряжения, величина которых нарастает с глубиной примерно по линейному закону. После детонации заряда от его поверхности по среде будет распространяться фронт, отделяющий область покоя от области, в которой среда вовлечена в движение. В моменты времени, непосредственно следующие за моментом детонации, область, в которой происходит движение среды, будет сравнительно малой, а возникшие в ней напряжения — весьма значительными по сравнению как со средними начальными напряжениями в этой области, так и с их разностями в различных точках. Поэтому в рассматриваемой стадии движения можно начальными напряжениями пренебречь, а это означает, что сила тяжести на начальный этап движения не будет оказывать заметного влияния. С течением времени область, охваченная движением, будет неограниченно увеличиваться, а напряжения в ней будут падать, так что на определенном этапе движение станет полностью упругим. Однако уравнения, описывающие движение на этом этапе (уравнения теории упругости), линейны, поэтому здесь поле напряжений будет представлять собой просто сумму начального поля, определяемого силой тяжести, и поля возмущений, являющегося решением задачи, математическая формулировка которой не содержит силы тяжести вовсе. Поэтому поле возмущений не будет зависеть от силы тяжести. Очевидно, что от нее не будет зависеть также поле скоростей на этом этапе. На промежуточной стадии движения сила тяжести, вообще говоря, будет влиять, однако можно ожидать, что эта стадия будет непродолжительной и влияние силы тяжести на движение в целом будет незначительным.

Если взрыв заряда производится на сравнительно небольшой глубине, то уже на первой стадии движения фронт возмущений выходит на дневную поверхность в результате образуется воронка; на движение среды, а также на поле напряжений сила тяжести и в этом случае не будет влиять. Однако на окончательные размеры воронки сила тяжести может оказать косвенное влияние; например, при значительных размерах воронки часть материала, выброшенного из воронки взрывом, упадет обратно в нее. Опыты, проведенные при этих условиях в различных мягких грунтах, показывают, что окончательные характеристики взрыва (объем и форма воронки, распределение грунта в навале вне воронки), а также некоторые кинематические характеристики явления в процессе выброса грунта из воронки [14] согласуются с условиями простого геометрического подобия. Из этих опытов следует, что сила тяжести на форму и размеры воронки будет влиять лишь при очень больших зарядах, так как для зарядов весом вплоть до 1000 Т это влияние оказывается слабым.

— Далее, лабораторные опыты по измерению кинематических характеристик движения песка при взрыве малых сферических зарядов при отсутствии дневной поверхности [15, 16], также подтверждают наличие простого геометрического подобия

Наконец, наши опыты [17] по непосредственному измерению поля напряжений при взрыве в песчаном грунте, проведенные в полевых условиях, также обнаружили в исследовавшемся диапазоне размеров явления выполнение условий простого геометрического подобия.

Таким образом, существующий экспериментальный материал свидетельствует о том, что структура соотношений модели, предназначенной для описания движения грунтов, должна допускать простое геометрическое подобие в описанных выше условиях, т. е. что в этих соотношениях не должны содержаться постоянные параметры, имеющие размерности, не выражающиеся через размерности плотности и напряжения.

Предлагаемая здесь модель обладает этим свойством.

§ 4. Об экспериментальной проверке модели. Отмеченные в предыдущем параграфе экспериментальные результаты показывают, что общая структура соотношений обсуждаемой модели является приемлемой. Однако для полной экспериментальной проверки модели требуется проведение специальных опытов, чтобы установить вид функций — характеристик среды, которые фигурируют в соотношениях модели. В работе [1] был предложен способ опытной проверки справедливости принятого в модели условия пластичности (1.10) и определения функции $F(p)$, фигурирующей в этом условии.

Этот способ сводится к следующему. Путем подрыва заряда взрывчатого вещества в изучаемом грунте создается движение, обладающее центральной или цилиндрической симметрией. В силу этой симметрии ориентация главных площадок поля напряжений известна, и возможно измерение главных напряжений в различных точках движущейся среды при помощи специальных датчиков напряжения. В результате измерений можно получить весь тензор напряжений как функцию времени и расстояния от центра или оси симметрии. Составив затем из измеренных компонент тензора напряжений выражения J_2 и p , фигурирующие в соотношении (1.10), которые также будут функциями времени и расстояния от центра заряда, и исключив как параметр время, можно получить для каждого значения указанного расстояния функцию F из соотношения (1.10). Если построенная таким образом функция F будет одинаковой для всех расстояний и при разных геометрических условиях, т. е. при условиях центральной и цилиндрической симметрий, то это будет свидетельствовать о том, что, действительно, при развитии течения в среде выполняется условие пластичности типа (1.10). Одновременно на основании проведенных опытов будет установлен конкретный вид функции $F(p)$ для исследуемого грунта. Речь здесь идет, разумеется, о не очень больших расстояниях, на которых движение было бы уже чисто упругим.

Автором совместно с В. Д. Алексеенко, Г. В. Рыковым и А. Ф. Новгородовым летом 1959 г. были осуществлены опыты по описанной схеме в песчаном грунте, которые подтвердили приемлемость условия вида (1.10) и позволили установить, что для песчаного грунта в естественных условиях при $p < 15 \text{ кг/см}^2$ функция $F(p)$ имеет вид [17]

$$F(p) = (kp + b)^2 \quad (k, b = \text{const}) \quad (4.1)$$

Для установления вида функций из соотношений (1.2), (1.3) (или (1.5)) можно предложить следующий опыт. Образец исследуемого грунта надо покрыть тонкой легко изгибаемой, но непроницаемой для жидкости оболочкой и поместить в прочный жесткий сосуд с жидкостью с известной сжимаемостью, так чтобы образец был полностью погружен в жидкость. Сжимая затем жидкость в сосуде герметически подогнанным к стенкам сосуда поршнем и измеряя давление, создаваемое в жидкости, и перемещение поршня, соответствующее этому давлению, можно вычислить по результатам измерений зависимость между давлением p и плотностью образца ρ . В самом деле, в жидкости поршень создает равномерное давление, поэтому на поверхность сплошного образца будет действовать постоянное по поверхности нормальное напряжение, которое будет создавать в предполагаемом однородном и изотропном образце однородное поле напряжений, сводящееся к гидростатическому давлению p . При этом образец будет деформироваться геоме-

трически подобно, деформация в нем будет однородной и изотропной, так что при заданном давлении жидкости плотность во всех точках образца будет одинаковой. Поэтому при фиксированных массах образца и жидкости и при известной сжимаемости жидкости и деформируемости сосуда под действием внутреннего давления можно по измеренному перемещению поршня вычислить плотность. Производя измерения при возрастании давления и при разгрузке, можно построить как нагрузочную функцию (1.3), так и разгрузочную (1.2).

Заметим, что функции в соотношениях (1.2) и (1.3) не содержат характеристик скорости деформирования, поэтому для определения этих функций достаточно провести только что описанные статические измерения. Принятое же в модели предположение о независимости объемного деформирования от скорости деформирования должно быть дополнительно проверено теми или иными опытами. Рассмотренные выше результаты опытов, подтверждающие выполнение простого геометрического подобия, показывают, что скорость деформирования не влияет на явление в целом, а, значит, от нее, в частности, не зависят и соотношения, описывающие объемную деформацию.

Отметим еще в связи со сказанным, что обсуждающийся иногда вопрос о так называемой «динамической диаграмме» деформирования не имеет смысла; действительно, если диаграммы деформирования в статических и динамических условиях различаются, то говорить о диаграмме в динамических условиях нельзя, так как в этом случае на зависимость между напряжениями и деформацией влияет скорость деформирования, т. е. в динамических условиях мы будем иметь дело не с одной диаграммой, а с семейством таких диаграмм, соответствующих различным значениям инвариантов тензора скоростей деформации, которые в этом случае будут входить в соотношения, связывающие напряжения с деформацией.

Рассмотрим еще вопрос об экспериментальном определении функции $F(p)$ из условия (1.10) в лабораторных статических условиях. Во-первых, совпадение найденной таким образом функции F с определенной описанным выше динамическим способом функцией F будет еще одним подтверждением справедливости предположения о характере условия пластичности. Во-вторых, что важнее, в статических лабораторных условиях функцию $F(p)$, по-видимому, можно построить для широкого диапазона значений аргумента p , включая весьма большие давления, тогда как в описанных динамических условиях такое построение крайне затруднительно, так как мы не имеем средств для измерения напряжений в близкой к центру взрыва области, где только и возникают большие напряжения.

В лабораторных условиях $F(p)$ можно определить из следующего опыта¹. В жесткий цилиндр нужно поместить цилиндрический образец испытуемого грунта с диаметром, совпадающим с внутренним диаметром цилиндра, и высотой, много меньшей этого диаметра. Сжимая образец входящим плотно в цилиндр поршнем, будем создавать в цилиндрическом образце одноосное деформированное состояние. Отклонение от одноосности будет иметь место вблизи боковой поверхности образца из-за наличия там сил трения о стенки цилиндра, однако, так как образец выбран тонким, т. е. с малой по сравнению с диаметром высотой, этим отклонением, которое будет локализовано в малом пристеночном слое образца, можно пренебречь. Измеряя перемещение поршня и давление под поршнем (или на дне цилиндра) — σ_x , мы можем построить зависимость

$$\sigma_x = \sigma_x(p) \quad (4.2)$$

Пользуясь этой зависимостью и соотношениями (1.2), (1.3), можно построить функцию $F(p)$.

Если вести опыт с монотонно растущим сжатием, то достаточно пользоваться только соотношением (1.3).

¹ Описываемый ниже опыт по схеме сходен с опытом по определению так называемых компрессионных кривых в механике грунтов [8, 18, 19], а также опытов по определению параметров нефтеносного пласта, работающего на упруго-пластическом режиме [20], однако назначение этих опытов различно.

Из (1.3) и (4.2) можно получить J_2 как функцию p

$$J_2 = \frac{3}{4} (\sigma_x + p)^2 = J_2(p) \quad (4.3)$$

Исключив из (1.3) и (4.3) параметр p , получим соотношение между J_2 и p

$$J_2 = J_2(p) \quad (4.4)$$

На начальной стадии опыта, когда и объемная и сдвиговая деформации протекают упруго, будем иметь линейные соотношения

$$p = A\theta, \quad \sigma_x = B\theta, \quad J_2 = C\theta^2 \quad (\theta = 1 - \rho_0/\rho), \quad (4.5)$$

где ρ_0 — начальная плотность, A, B, C — постоянные, выражающиеся через упругие постоянные среды. Поэтому на этой стадии соотношение (4.4) будет совпадать с вытекающей из (4.5) зависимостью

$$J_2 = \frac{C}{A^2} p^2 \quad (4.6)$$

С дальнейшим ростом p (или θ) будет превзойден предел упругости и в объемной деформации и в сдвиговой, в той или иной последовательности в зависимости от свойств конкретной среды. Если в последнее из соотношений (4.5) подставить зависимость $\theta = \theta(p)$, полученную обращением (1.3), то придем к соотношению между J_2 и p , которое будет совпадать с (4.4) до тех пор, пока не будет превзойден предел упругости по деформации сдвига. После того как будет превышен этот предел, указанные функции будут различаться, и, начиная с этого момента, функция (4.4) может рассматриваться как искомая $F(p)$.

Аналогичные рассуждения можно провести и для случая опыта с разгрузками от различных состояний сжатия.

Отметим, наконец, еще одно обстоятельство, имеющее принципиальное значение. Если изобразить соотношение (1.3) в переменных p, θ , то, как предполагается моделью, получающаяся кривая будет обладать следующими свойствами (ср. фиг. 1). При малых значениях p на кривой имеется прямолинейный упругий участок, затем она становится выпуклой кверху, перегибается и, наконец, сделавшись выпуклой вниз, круто уходит вверх. Исходя из этих геометрических свойств диаграммы сжатия среды, можно установить характер изменения профилей волн напряжений, скоростей и т. д., возникающих, например, от взрыва сферического заряда ВВ в неограниченной среде.

В работе Г. И. Баренблатта [21] изучены автомоделльные плоские одномерные движения нелинейно-упругой среды, диаграмма которой, в частности, может обладать отмеченными выше геометрическими свойствами. Там установлено, что, если приложенное к границе полупространства постоянное давление достаточно велико, то по среде пойдет волна возмущений, ограниченная спереди резким фронтом — ударной волной. При умеренных значениях этого давления скорость ударной волны, оказывается сравнительно небольшой, так что впереди нее возникает область непрерывного движения и передняя граница возмущения является слабым разрывом — характеристикой. Наконец, начиная со значения приложенного давления, соответствующего точке перегиба на диаграмме, и при меньших значениях возмущение становится непрерывной волной, ограниченной спереди характеристикой.

Рассматривая теперь вопрос о том, как будет видоизменяться возмущение от сосредоточенного взрыва в рассматриваемой среде, можно показать, что все описанные выше качественные типы волн возмущений здесь будут иметь место, последовательно сменяясь один другим. Именно, в близкой к заряду области, где напряжения велики, будет распространяться возмущение, ограниченное спереди ударной волной. По мере удаления этой волны от заряда она будет затухать, а скорость ее уменьшаться. В некоторый момент времени скорость ее станет меньше скорости распространения упругих возмущений, соответствующих начальному участку диаграммы, так что впереди ударной волны возникнет упругое движение. Далее наступит момент, когда ударная волна истощится, движение станет полностью непрерывным

и в конце концов выработается чисто упругая волна, которая с течением времени неограниченно удалится от очага взрыва.

Нами были поставлены специальные опыты для проверки описанного характера развития волны возмущений от взрыва с течением времени. Опыт полностью подтвердил ожидаемые эффекты [17].

Отметим, что в сильно идеализированной постановке рассмотренная только что задача о взрыве недавно изучалась Н. В. Зволинским [22]. В его работе также выявлены все описанные здесь этапы развития возмущений.

Опытное подтверждение описанных качественных особенностей возмущения, которое можно предсказать теоретически на основе геометрических свойств диаграммы объемного деформирования, свидетельствует о том, что диаграмма эта действительно обладает указанными свойствами.

В заключение я с особой признательностью хочу отметить внимание и интерес, проявленные к этой работе Г. И. Баренблаттом.

Поступила 7 VI 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорян С. С. Об общих уравнениях динамики грунтов. ДАН СССР, 1959, т. 124, № 2.
2. Прагер В., Ходж Ф. Г. Теория идеально пластических тел. ИИЛ, М., 1956.
3. Хилл Р. Математическая теория пластичности (перев. с англ.). Гостехтеоретиздат, М., 1956.
4. Соколовский В. В. Теория пластичности. Гостехиздат, М.—Л., 1950.
5. Allen W. A., Mayfield E. B., Morrison H. L. Dynamics of a projectile penetrating sand. J. Appl. Phys., 1957, vol. 28, № 3.
6. Schleicher F. Der Spannungszustand an der Fließgrenze (Plastizitätsbedingung). Z. angew. Math. und Mech., 1926, Band, Heft 3.
7. Соколовский В. В. Статика сыпучей среды. Гостехиздат, М., 1954.
8. Цытович Н. А. Механика грунтов. М.—Л., 1951.
9. Прагер В. Элементарное обсуждение определения скорости изменения напряжений. Доклад на Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике, М., 1960.
10. Седов Л. И. Понятия разных скоростей изменения тензоров. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 3.
11. Григорян С. С. О некоторых специальных вопросах термодинамики сплошных сред. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 4.
12. Современное состояние аэродинамики больших скоростей, ред. Л. Хоуарт, т. I. ИИЛ, М., 1955.
13. Седов Л. И. Методы подобия и размерностей в механике. Гостехтеоретиздат, М., 1957.
14. Белопухов Л. К., Виноградов В. А. Результаты кинематографических исследований подземных взрывов. Сб. Учен. совета по народнохозяйственному использованию взрыва СО АН СССР, 1959, № 4.
15. Ромашов А. Н., Родионов В. Н., Сухотин А. П. Взрыв в уплотняющейся неограниченной среде. ДАН СССР, 1958, т. 123, № 4.
16. Родионов В. Н., Ромашов А. Н., Сухотин А. П. Взрыв в грунте. Сб. Учен. совета по народнохозяйственному использованию взрыва СО АН СССР, 1959, № 2.
17. Алексеенко В. Д., Григорян С. С., Новгородов А. Ф., Рыков Г. В. Некоторые экспериментальные исследования по динамике мягких грунтов. ДАН СССР, 1960, т. 133, № 6.
18. Терцаги К. Строительная механика грунта на основе его физических свойств. Госстройиздат, М.—Л., 1933.
19. Герсепавов Н. М. Основы динамики грунтовой массы. М.—Л., Госстройиздат, 1931.
20. Баренблатт Г. И., Крылов А. П. Об упруго-пластическом режиме фильтрации. Изв. АН СССР, ОТН, 1955, № 2.
21. Баренблатт Г. И. О распространении мгновенных возмущений в среде с нелинейной зависимостью напряжений от деформации. ПММ, 1953, т. XVII, вып. 4.
22. Зволинский Н. В. Об излучении упругой волны при сферическом взрыве в грунте. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 1.