Прикладная математика и механика. Том XXIV, 1960
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

О КРУЧЕНИИ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ НАГРУЗКОЙ

Б. Л. Абрамян

(Ереван)

В статье дано решение некоторых задач о кручении круглых валов переменного сечения. Рассмотрены случаи, когда вал имеет форму круглого усеченного конуса и скручивается в одном случае нагрузкой, распределенной на части его боковой поверхности, а в другом — сосредоточенными моментами, приложенными также и на боковой поверхности вала.

Рассмотрено также и кручение полой полусферы нагрузкой, приложенной на ее поверхности произвольным образом.

Решения этих задач представляются рядами по полиномам Лежандра и тригонометрическим функциям.

Задача о кручении конического вала, когда вал скручивается моментами, приложенными на его торцах, впервые была рассмотрена А. Фепплем [1], который получил решение этой задачи, пользуясь функцией потенциала. Кручение вала в виде конуса в числе других тел вращения рассмотрено также и А. Ш. Локшиным [2]. Решение задачи о кручении полого конического вала было дано Н. Я. Панариным [3]. Кручение конического вала, когда скручивающая нагрузка приложена на его боковой поверхности по степенному закону, рассматривалась автором [4]. Кручение сферы, когда она скручивается сосредоточенными моментами, рассмотрено в работах Снелла [10] и Хубера [11]. Некоторые другие задачи о кручении валов переменного сечения в сферических координатах рассмотрены в работе К. В. Соляника-Красса [5].

§ 1. Постановка задачи. Задачу о кручении тела вращения осесимметричной нагрузкой будем решать при помощи функции перемещения $\Psi(r, z)$, которая в области осевого сечения тела вращения удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} + \frac{3}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} = 0 \tag{1.1}$$

а на границе области осевого сечения задана своей нормальной производной

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\nu} = \frac{1}{Gr}S_\nu(r, z), \qquad (S_\nu(r, z) = \tau_{r\varphi}\cos(r, \nu) + \tau_{z\varphi}\cos(z, \nu)) \tag{1.2}$$

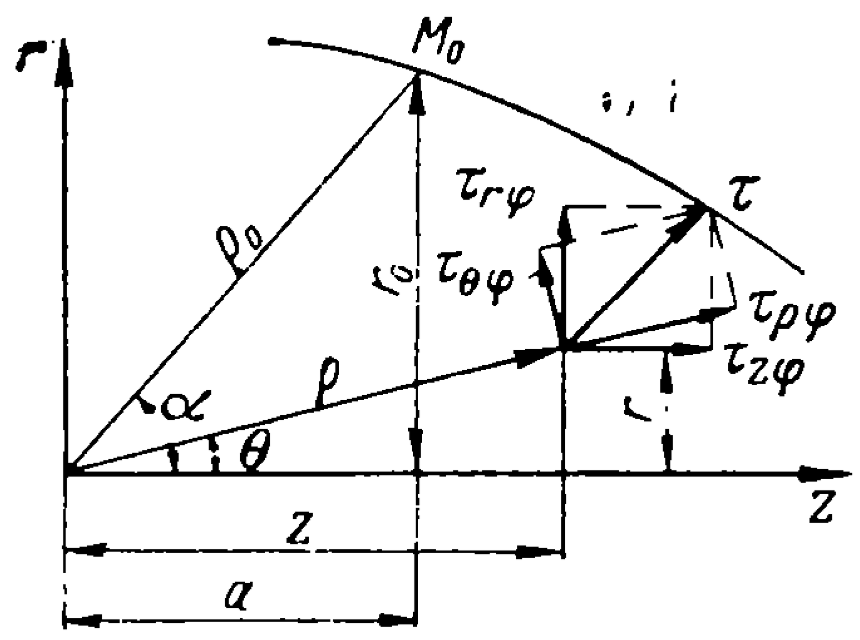
Здесь $S_\nu(r, z)$ — проекция полного касательного напряжения на нормаль к контуру осевого сечения,

$$\begin{aligned} \tau_{r\varphi} &= Gr\frac{\partial\Psi}{\partial r}, \qquad & \cos(r, \nu) &= \frac{dr}{d\nu} = \frac{dz}{ds} \\ \tau_{\varphi z} &= Gr\frac{\partial\Psi}{\partial z}, \qquad & \cos(z, \nu) &= \frac{dz}{d\nu} = -\frac{dr}{ds} \end{aligned} \tag{1.3}$$

Крутящий момент внешних сил, распределенных на свободной поверхности тела вращения от одной точки оси тела до какого-либо поперечного сечения его, определяемого расстоянием s по длине образующей тела, равен

$$M(s) = 2\pi \int_0^s r^2(s)\, S_\nu [r(s),\ z(s)]\, ds \tag{1.4}$$

Произведя интегрирование по всей длине образующей вала, от одной точки оси до другой, согласно (1.4) получим равенство, которое будет представлять собою уравнение равновесия моментов, скручивающих вал.



Фиг. 1

Переходя к сферическим координатам ρ, θ, φ, а в плоскости rz к полярным координатам ρ, θ или t, ξ, имеем

$$r = \rho \sin\theta = \rho_0 e^t \sqrt{1-\xi^2}, \xi = \cos\theta = \frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}} \tag{1.5}$$

$$z = \rho\cos\theta = \rho_0 e^t \xi, \qquad t = \ln\frac{\rho}{\rho_0} = \ln\frac{\sqrt{r^2+z^2}}{\rho_0}$$

где ρ — радиус-вектор точки в осевом сечении тела вращения (фиг. 1), θ — угол наклона радиуса-вектора ρ к оси z, ρ_0 — расстояние какой-нибудь произвольным образом выбранной точки M_0 на контуре осевого сечения тела, приведем уравнение (1.1) к виду

$$\frac{\partial^2\Psi^*}{\partial t^2} + (1-\xi^2)\frac{\partial^2\Psi^*}{\partial\xi^2} + 3\frac{\partial\Psi^*}{\partial t} - 4\xi\frac{\partial\Psi^*}{\partial\xi} = 0 \tag{1.6}$$

Здесь использовано обозначение

$$\Psi[r(t,\xi),\ z(t,\xi)] = \Psi^*(t,\xi) \tag{1.7}$$

В новых координатах компоненты напряжений будут

$$\tau_{\rho\varphi} = \tau_{t\varphi} = G\sqrt{1-\xi^2}\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}, \qquad \tau_{\theta\varphi} = \tau_{\xi\varphi} = -G(1-\xi^2)\frac{\partial\Psi^*}{\partial\xi} \tag{1.8}$$

§ 2. Общее решение уравнения (1.6). Положив в (1.6)

$$\Psi^*(t,\xi) = T(t)\,\varphi(\xi) \tag{2.1}$$

и разделяя переменные, для определения функций $T(t)$ и $\varphi(\xi)$ получим две группы уравнений

$$(1-\xi^2)\varphi''(\xi) - 4\xi\varphi'(\xi) + \lambda^2\varphi(\xi) = 0, \qquad T''(t) + 3T'(t) - \lambda^2 T(t) = 0 \tag{2.2}$$

$$(1-\xi^2)\varphi''(\xi) - 4\xi\varphi'(\xi) - \lambda^2\varphi(\xi) = 0, \qquad T''(t) + 3T'(t) + \lambda^2 T(t) = 0 \tag{2.3}$$

Решениями уравнений (2.2) являются функции

$$\varphi_n(\xi) = \frac{d}{d\xi}[AP_n(\xi) + BQ_n(\xi)] \tag{2.4}$$

$$T_n(t) = e^{-3/2 t}\left[C\,\mathrm{sh}\frac{(2n+1)t}{2} + D\,\mathrm{ch}\frac{(2n+1)t}{2}\right] \tag{2.5}$$

где $P_n(\xi)$ — сферическая функция Лежандра [6] первого рода n-го порядка, $Q_n(\xi)$ — функция второго рода, а λ связано с n уравнением

$$\lambda^2 + 2 - n^2 - n = 0 \tag{2.6}$$

Выбираем только те решения, для которых n — положительное натуральное число, тогда функции $P_n(\xi)$ и $Q_n(\xi)$ будут полиномами Лежандра первого и второго рода. Так как при $\xi = 1$ функция $Q_n'(\xi)$ обращается в бесконечность, то при составлении решения для сплошных валов коэффициент B берется равным нулю.

Решениями уравнений (2.3) являются функции

$$\varphi_k(\xi) = \frac{d}{d\xi}\left[AP_{-1/2+\mu_k i}(\xi) + BQ_{-1/2+\mu_k i}(\xi)\right] \tag{2.7}$$

$$T_k(t) = e^{-3/2t}(C\sin\mu_k t + D\cos\mu_k t) \qquad \left(\mu_k = \sqrt{\lambda_k^2 - \tfrac{9}{4}}\right) \tag{2.8}$$

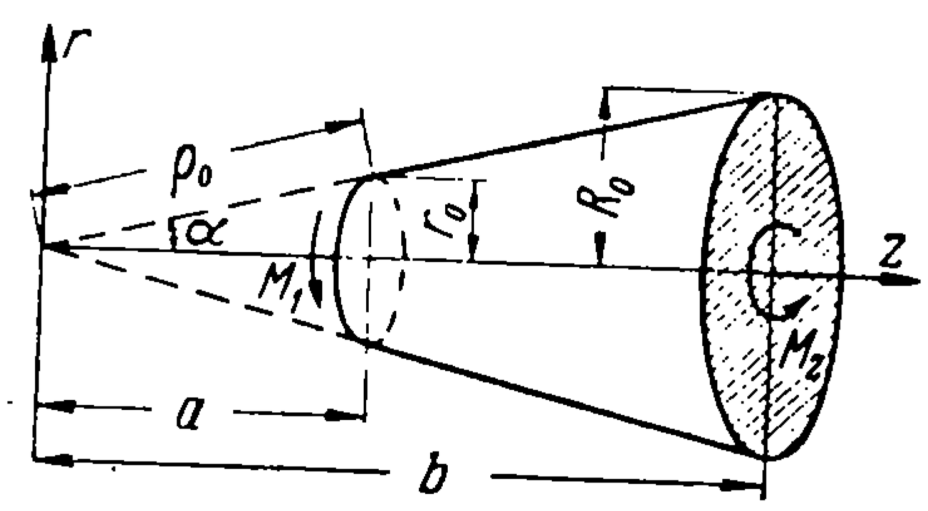
Здесь функции $P_{-1/2+\mu_k i}(\xi)$ и $Q_{-1/2+\mu_k i}(\xi)$ являются функциями конуса [6,7]. При составлении решения для сплошных валов коэффициент B в (2.7) также берется равным нулю.

Отметим, наконец, что функции

$$e^{-3t},\ 1,\ \frac{\xi}{1-\xi^2} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+\xi}{1-\xi} \tag{2.9}$$

также являются частными решениями уравнения (1.6).

Общее решение уравнения (1.6) составляется при помощи функций (2.4), (2.5), (2.7), (2.8) и (2.9).



Фиг. 2

§ 3. Кручение конического вала при произвольном нагружении его боковой поверхности касательными напряжениями. Рассмотрим круглый вал переменного сечения, имеющий форму усеченного конуса (фиг. 2).

Пусть этот вал скручивается сосредоточенными моментами M_1 и M_2, приложенными на торцах вала, и произвольной нагрузкой, приложенной на его боковой поверхности. Пользуясь соотношением (1.4), имеем

$$M_1 = -2\pi\int_0^{r_0} r^2\tau_{\varphi z}(r, a)\,dr, \qquad M_2 = 2\pi\int_0^{R_0} r^2\tau_{\varphi z}(r, b)\,dr \tag{3.1}$$

На боковой поверхности вала заданы напряжения

$$\tau_{\xi\varphi}(t, \xi_1) = S_\nu[r(t, \xi_1),\ z(t, \xi_1)] = f_1(t) \tag{3.2}$$

где $\xi_1 = \cos\alpha$, а $f_1(t)$ — кусочно-непрерывная в интервале $(0, t_1)$ функция, имеющая в этом интервале ограниченное изменение.

Решение для функции $\Psi^*(t, \xi)$, согласно (2.7), (2.8) и (2.9), берем в виде

$$\Psi^*(t, \xi) = A_0\rho_0^{-3}e^{-3t} + B_0P'_{-1/2}(\xi)e^{-3/2t} + \sum_{k=1}^{\infty} B_kP'_{-1/2+\mu_k i}(\xi)T_k(t) \tag{3.3}$$

$$(\xi_1 < \xi < 1,\ 0 < t < t_1)$$

где

$$T_k(t) = e^{-3/2t}\cos\mu_k t, \qquad \mu_k = \frac{k\pi}{t_1} \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{3.4}$$

$$t_1 = \ln\frac{\sqrt{R_0^2 + b^2}}{\rho_0} = \ln\frac{b}{a}, \qquad \rho_0 = \sqrt{r_0^2 + a^2}$$

Функции $T_k(t)$ ортогональны с весом e^{3t} и для них имеет место:

$$\int\limits_0^{t_1} e^{3/2t} T_k(t)\,dt = 0, \qquad \int\limits_0^{t_1} e^{3t} T_k(t)\,T_p(t)\,dt = \begin{cases} 0 & (p \neq k) \\ \frac{1}{2} t_1 & (p = k) \end{cases} \tag{3.5}$$

В цилиндрических координатах функция перемещения $\Psi(r, z)$ будет иметь вид

$$\Psi(r, z) = \frac{A_0}{(r^2+z^2)^{3/2}} + \frac{B_0 \rho_0^{3/2}}{(r^2+z^2)^{3/4}} P'_{-1/2}\left(\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}\right) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} B_k P'_{-1/2+\mu_k i}\left(\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}\right) T_k\left(\ln \frac{\sqrt{r^2+z^2}}{\rho_0}\right) \tag{3.6}$$

Вычисляя напряжения $\tau_{\varphi z}$ и $\tau_{\xi\varphi}$, будем иметь

$$\tau_{\varphi z}(r, z) = Gr\,\frac{\partial \Psi}{\partial z} = Gr\left\{-3A_0 \frac{z}{(r^2+z^2)^{5/2}} + B_0 \rho_0^{3/2}\left[\frac{r^2}{(r^2+z^2)^{5/4}} P''_{-1/2}\left(\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}\right) - \right.\right. \\ \left. - \frac{3z}{2(r^2+z^2)^{7/4}} P'_{-1/2}\left(\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}\right)\right] + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \left[\frac{r^2}{(r^2+z^2)^{3/2}} P''_{-1/2+\mu_k i}\left(\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}\right) \times \right. \\ \left.\left. \times T_k\left(\ln \frac{\sqrt{r^2+z^2}}{\rho_0}\right) + \frac{z}{r^2+z^2} P'_{-1/2+\mu_k i}\left(\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}\right) T_k'\left(\ln \frac{\sqrt{r^2+z^2}}{\rho_0}\right)\right]\right\} \tag{3.7}$$

$$\tau_{\xi\varphi}(t, \xi) = -G(1-\xi^2)\frac{\partial \Psi^*}{\partial \xi} = -G(1-\xi^2)\left\{B_0 e^{-3/2t} P''_{-1/2}(\xi) + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} B_k P''_{-1/2+\mu_k i}(\xi)\,T_k(t)\right\} \tag{3.8}$$

При помощи разложения

$$f_1(t) = g_0 e^{-3/2} + \sum_{k=1}^{\infty} g_k T_k(t) \qquad (0 < t < t_1) \tag{3.9}$$

где

$$g_0 = \frac{1}{t_1}\int\limits_0^{t_1} e^{3/2t} f_1(t)\,dt, \qquad g_k = \frac{2}{t_1}\int\limits_0^{t_1} e^{3t} f_1(t)\,T_k(t)\,dt \tag{3.10}$$

из условия (3.2) получим

$$B_0 = -\frac{g_0}{G(1-\xi_1^2)\,P''_{-1/2}(\xi_1)}, \qquad B_k = -\frac{g_k}{G(1-\xi_1^2)\,P''_{-1/2+\mu_k i}(\xi_1)} \tag{3.11}$$

Удовлетворив первому из условий (3.1) и исключая из полученного выражения коэффициенты B_0 и B_k, получим

$$A_0 = \frac{M_1}{2\pi G c_0} - \frac{\rho_0^3 \sin^2\alpha}{G c_0}\left[\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k}{\mu_k^2 + \frac{9}{4}} + \frac{2}{3} g_0\right] \tag{3.12}$$

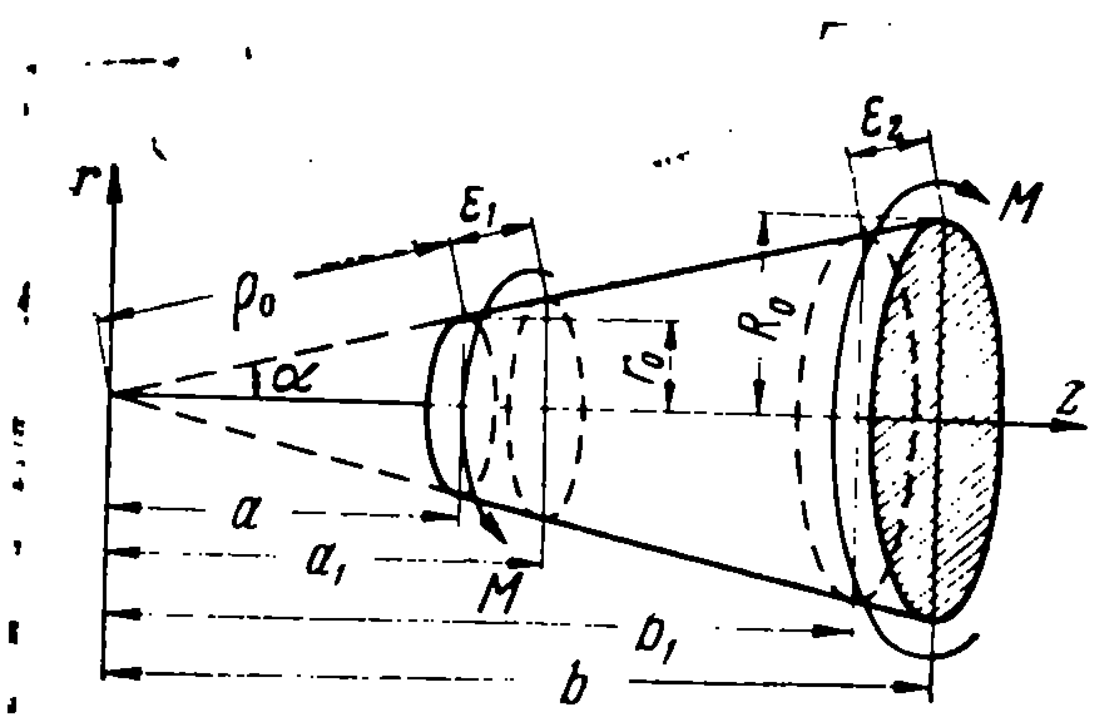
где использовано обозначение

$$c_0 = 2 - 3\cos\alpha + \cos^3\alpha \tag{3.13}$$

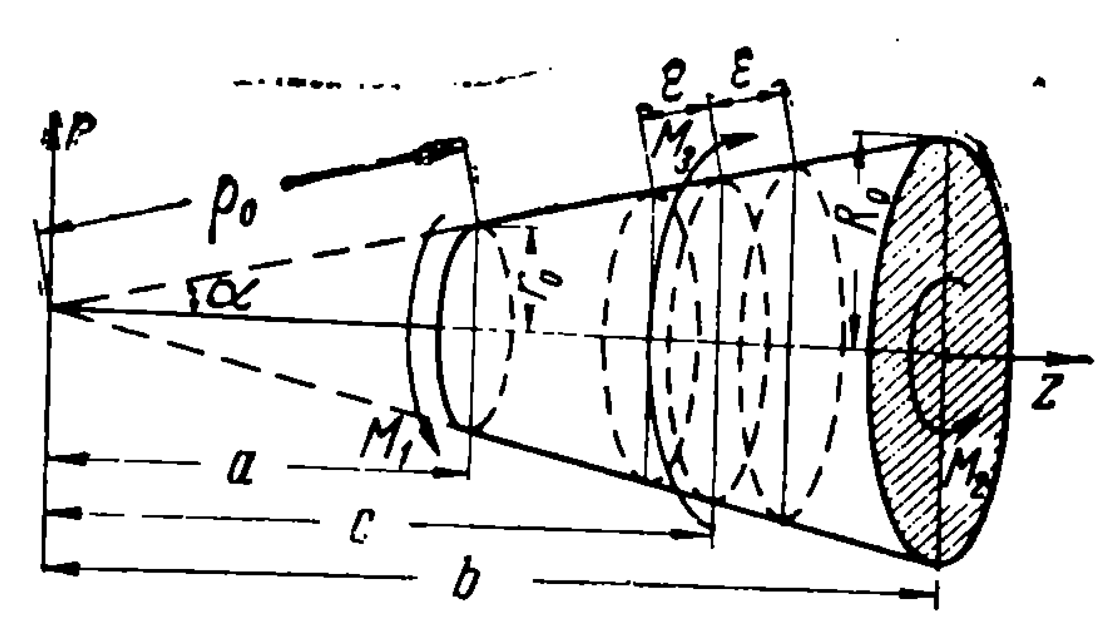
и равенство

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{r^4}{(r^2+z^2)^{1/2}} T_k'(t)\,P''_{-1/2+\mu_k i}(\xi)\right] = \\ = -\left(\mu_k^2 + \frac{9}{4}\right)\frac{r^3}{r^2+z^2}\left[\frac{r^2}{(r^2+z^2)^{1/2}} P''_{-1/2+\mu_k i}(\xi)\,T_k(t) + z P'_{-1/2+\mu_k i}(\xi)\,T_k'(t)\right] \tag{3.14}$$

Удовлетворяя второму из условий (3.1) и исключая из полученного выражения коэффициенты A_0, B_0 и B_k, получим равенство, связывающее коэффициенты Фурье g_0 и g_k с моментами M_1 и M_2.



Фиг. 3



Фиг. 4

Это равенство, являющееся уравнением равновесия скручивающих вал моментов, имеет следующий вид

$$\frac{M_1+M_2}{2\pi}+\rho_0{}^3\sin^2\alpha\left\{\frac{2}{3}g_0\left(e^{3/2 t_1}-1\right)-\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{g_k\left[1+(-1)^{k+1}e^{3/2 t_1}\right]}{9/4+\mu_k{}^2}\right\}=0 \qquad (3.15)$$

§ 4. **Частные случаи.** *1°. Кручение усеченного сплошного конуса моментами M_1 и M_2, приложенными на торцах $z=a$ и $z=b$.* В этом случае, так как боковая поверхность свободна от нагрузки, имеем $g_0=g_k=0$. Уравнение равновесия (3.15) принимает известный вид $M_1=-M_2=M$.

Определение из (3.11) и (3.12) постоянных интегрирования дает

$$B_0=B_k=0, \qquad A_0=\frac{M}{2\pi G\,(2-3\cos\alpha+\cos^3\alpha)} \qquad (4.1)$$

Это приводит к решению А. Феппля [1].

2°. Кручение усеченного конуса, когда на боковой поверхности вала нагрузка приложена на двух участках (фиг. 3). Основания конуса полагаем свободными от нагрузки (такая задача для цилиндра была рассмотрена Л. Файлоном [8]. В этом случае

$$M_1=M_2=0 \qquad (4.2)$$

Пусть нагрузка на боковой поверхности вала распределена по закону

$$\tau_{\xi\varphi}(t,\,\xi_1)=f_1(t)=\begin{cases} p_1 & (0<t<\varepsilon_1), \quad (\varepsilon_1=\ln a_1/a)\\ -p_2 & (t_1-\varepsilon_2<t<t_1), \quad (\varepsilon_2=\ln b/b_1)\end{cases} \qquad (4.3)$$

Пользуясь выражениями (3.10), будем иметь

$$g_0=\frac{2}{3t_1}\left[p_1\left(e^{3/2\varepsilon_1}-1\right)-p_2\left(e^{3/2 t_1}-e^{3/2(t_1-\varepsilon_2)}\right)\right] \qquad (4.4)$$

$$g_k=\frac{2}{t_1\left(\frac{9}{4}+\mu_k{}^2\right)}\left\{p_1\left[e^{3/2\varepsilon_1}\left(\mu_k\sin\mu_k\varepsilon_1+\frac{3}{2}\cos\mu_k\varepsilon_1\right)-\frac{3}{2}\right]-\right. \qquad (4.5)$$

$$\left.-p_2\left[\frac{3}{2}(-1)^k e^{3/2 t_1}-e^{3/2(t_1-\varepsilon_2)}\left(\mu_k\sin\mu_k(t_1-\varepsilon_2)+\frac{3}{2}\cos\mu_k(t_1-\varepsilon_2)\right)\right]\right\}$$

Функция перемещения для этого случая определится выражением (3.3), где коэффициенты A_0, B_0 и B_k должны быть вычислены по формулам (3.11) и (3.12) с учетом равенств (4.2), (4.4) и (4.5).

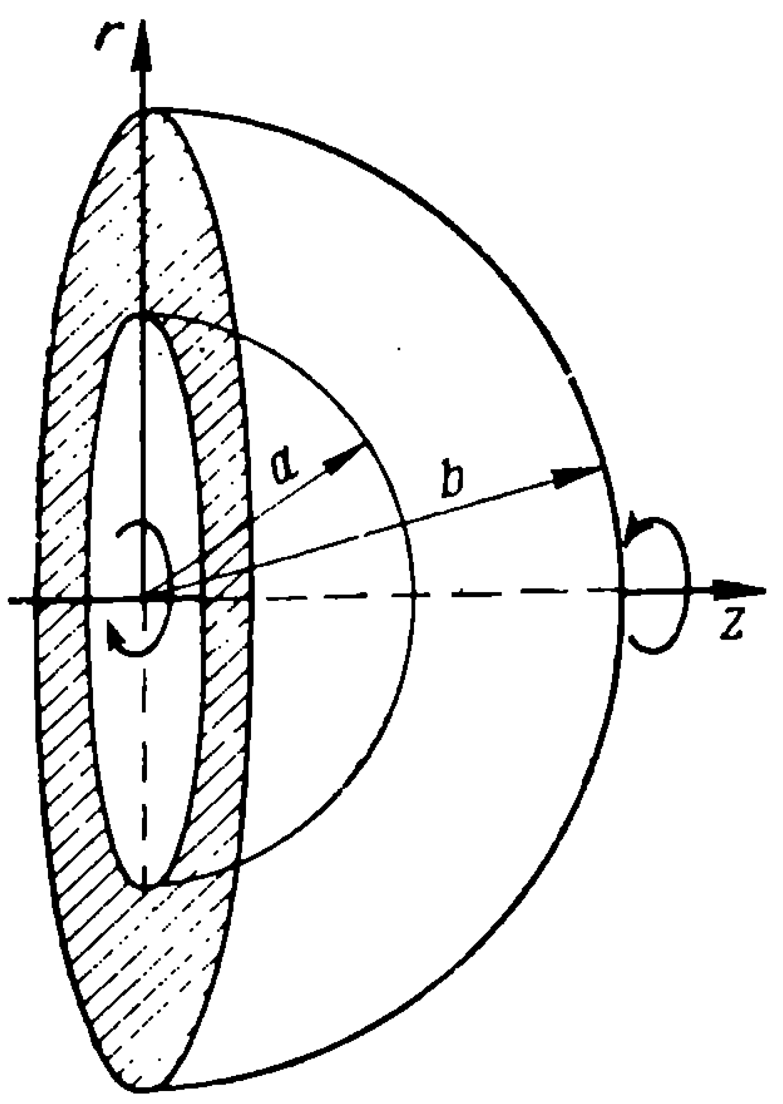
3^0. *Кручение усеченного конуса сосредоточенными моментами* (фиг. 4). Такая задача для бесконечно длинного цилиндра была рассмотрена А. Тимпе [9].

Пусть вал скручивается сосредоточенными моментами M_1 и M_2, приложенными на торцах вала, и моментом M_3, приложенным на его боковой поверхности.

Боковой скручивающий момент представим в виде нагрузки, распределенной на участке боковой поверхности вала шириною в 2ε по закону

$$\tau_{\xi\varphi}(t,\ \xi_1) = f_1(t) = \begin{cases} 0 & (0<t<t_0-\varepsilon,\ t_0+\varepsilon<t<t_1), \quad (t_0=\ln(c/a)) \\ -p & (t_0-\varepsilon<t<t_0+\varepsilon), \qquad\qquad\quad (t_1=\ln(b/a)) \end{cases} \tag{4.6}$$

Тогда крутящий момент M_3 согласно (1.4) определится равенством (4.7)



Фиг. 5

$$M_3 = -2\pi\rho_0^3\sin^2\alpha\int_0^{t_1} e^{3t} f_1(t)\,dt = \frac{4}{3}\pi\rho_0^3\sin^2\alpha\, e^{3t_0} p\,\mathrm{sh}\,3\varepsilon$$

Вычислив g_0 и g^k согласно (4.6) и (3.10), далее пользуясь соотношением (4.7) и переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$, получим для этих коэффициентов следующие выражения

$$g_0 = -\frac{M_3 e^{-3/2\,t_0}}{2\pi t_1\rho_0^3\sin^2\alpha} \tag{4.8}$$

$$g_k = -\frac{M_3 e^{-3/2\,t_0}\cos\mu_k t_0}{t_1\pi\rho_0^3\sin^2\alpha} = 2g_0\cos\mu_k t_0$$

Функция перемещения для этой задачи определится выражением (3.3), где коэффициенты A_0, B_0 и B_k имеют значения (3.11) и (3.12) с учетом значений, определяемых формулой (4.8).

§ 5. Кручение полусферы. Рассмотрим тело вращения в виде полой полусферы (фиг. 5), и пусть оно скручивается нагрузкой, приложенной на свободной поверхности тела произвольным образом, то есть

$$\tau_{\xi\varphi}(t,\ 0) = f_1(t) \qquad (0<t<t_1) \quad (t_1=\ln(b/a)) \tag{5.1}$$

$$\tau_{t\varphi}(0,\ \xi) = f_2(\xi), \qquad \tau_{t\varphi}(t_1,\ \xi) = f_3(\xi) \qquad (0<\xi<1) \tag{5.2}$$

Здесь функции f_i кусочно непрерывны и имеют ограниченное изменение в соответствующих интервалах. Решение уравнения (1.6) для этого случая, согласно (2.4), (2.5), (2.7), (2.8) и (2.9), берем в виде

$$\Psi^*(t,\ \xi) = A_0 e^{-3t} + e^{-3/2\,t}\sum_{k=1}^{\infty}\left[A_k\,\mathrm{sh}\,\alpha_k t + C_k\,\mathrm{ch}\,\alpha_k t\right]\varphi_{2k+1}(\xi) + \tag{5.3}$$

$$+ B_0 e^{-3/2\,t} P'_{-1/2}(\xi) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k P'_{-1/2+\mu_k i}(\xi)\, T_k(t) \qquad \begin{pmatrix} 0<t<t_1 \\ 0<\xi<1 \end{pmatrix} \quad \left(\alpha_k = \frac{4k+3}{2}\right)$$

где функция $T_k(t)$ определяется (3.4). Функции $\varphi_{2k+1}(\xi) = dP_{2k+1}(\xi)/d\xi$, где $P_{2k+1}(\xi)$ — полином Лежандра первого рода, в интервале (0.1) ортогональны с весом $(1-\xi^2)$ и для них имеют место равенства [6]

$$\int_0^1 (1-\xi^2)\,\varphi_{2k+1}(\xi)\,\varphi_{2p+1}(\xi)\,d\xi = \begin{cases} 0 & (p\neq k) \\ \dfrac{(2k+1)(2k+2)}{4k+3} & (p=k=0,1,2,\ldots) \end{cases} \tag{5.4}$$

Вычислив напряжения, будем иметь

$$\tau_{\xi\varphi}(t,\xi) = -G(1-\xi^2)\frac{\partial\Psi^*}{\partial\xi} = -G(1-\xi^2)\Big\{e^{-{}^3/_2 t}\sum_{k=1}^{\infty}[A_k \operatorname{sh}\alpha_k t + \tag{5.5}$$

$$+ C_k \operatorname{ch}\alpha_k t]\,\varphi'_{2k+1}(\xi) + B_0 P''_{-1/2}(\xi)e^{-{}^3/_2 t} + \sum_{k=1}^{\infty} B_k P''_{-1/2+\mu_k i}(\xi)\,T_k(t)\Big\}$$

$$\tau_{t\varphi}(t,\ \xi) = G\sqrt{1-\xi^2}\,\frac{\partial\Psi^*}{\partial t} = G\sqrt{1-\xi^2}\Big\{-3A_0 e^{-3t} + \tag{5.6}$$

$$+\frac{e^{-{}^3/_2 t}}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\Big[[A_k(4k+3)-3C_k]\operatorname{ch}\alpha_k t + [C_k(4k+3)-3A_k]\operatorname{sh}\alpha_k t\Big]\times$$

$$\times\,\varphi_{2k+1}(\xi) - \frac{3}{2}B_0 P'_{-1/2}(\xi)e^{-{}^3/_2 t} + \sum_{k=1}^{\infty} B_k P'_{-1/2+\mu_k i}(\xi)\,T_k'(t)\Big\}$$

Удовлетворив условию (5.1), получим

$$-G\,\Big\{e^{-{}^3/_2 t}\sum_{k=1}^{\infty}[A_k \operatorname{sh}\alpha_k t + C_k \operatorname{ch}\alpha_k t]\,\varphi'_{2k+1}(0) + \tag{5.7}$$

$$+ B_0 P''_{-1/2}(0)e^{-{}^3/_2 t} + \sum_{k=1}^{\infty} B_k P''_{-1/2+\mu_k i}(0)\,T_k(t)\Big\} = f_1(t)$$

Но согласно равенствам [6] (5.8)

$$\varphi'_{2p+1}(\xi) = \frac{d^2}{d\xi^2}P_{2p+1}(\xi) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}(4k-1)(2p-2k+2)(2p+2k+1)P_{2k-1}(\xi)$$

$$P_{2k-1}(0) = 0 \qquad (k = 1,\, 2,\, \ldots)$$

следует, что

$$\varphi'_{2p+1}(0) = 0 \tag{5.9}$$

и тогда соотношение (5.7) примет вид

$$-G\,[B_0 P''_{-1/2}(0)e^{-{}^3/_2 t} + \sum_{k=1}^{\infty} B_k P''_{-1/2+\mu_k i}(0)\,T_k(t)] = f_1(t) \tag{5.10}$$

Представляя функцию $f_1(t)$ в виде ряда (3.9) по функциям $T_k(t)$, из (5.10) получим

$$B_0 = -\frac{g_0}{GP''_{-1/2}(0)}, \qquad B_k = -\frac{g_k}{GP''_{-1/2+\mu_k i}(0)} \tag{5.11}$$

Удовлетворив первому из условий (5.2), будем иметь

$$G\sqrt{1-\xi^2}\,\Big\{-3A_0 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}[A_k(4k+3)-3C_k]\,\varphi_{2k+1}(\xi) -$$

$$-\frac{3}{2}B_0 P'_{-1/2}(\xi) - \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{\infty} B_k P'_{-1/2+\mu_k i}(\xi)\Big\} = f_2(\xi) \tag{5.12}$$

Представим функцию $f_2(\xi)$ в виде разложения по функциям $(1-\xi^2)^{1/2}\varphi_{2k+1}(\xi)$. Такое разложение будет иметь вид [6]

$$f_2(\xi) = a_0\sqrt{1-\xi^2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(1-\xi^2)^{1/2}\varphi_{2k+1}(\xi) \tag{5.13}$$

где

$$a_0 = \frac{3}{2}\int_0^1 \sqrt{1-\xi^2}\, f_2(\xi)\, d\xi \tag{5.14}$$

$$a_k = \frac{4k+3}{(2k+1)(2k+2)}\int_0^1 \sqrt{1-\xi^2}\, f_2(\xi)\, \varphi_{2k+1}(\xi) d\xi$$

Умножив далее равенство (5.12) на $\sqrt{1-\xi^2}$ и интегрируя по ξ в пределах от нуля до единицы, получим

$$-2A_0G + \frac{2}{3}GB_0P''_{-1/2}(0) + \frac{3}{2}G\sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{P''_{-1/2+\mu_k i}(0)}{9/4+\mu_k^2} = \frac{2}{3}a_0 \tag{5.15}$$

при этом использованы равенства (5.4), (5.14),

$$\varphi_1(\xi) = 1$$

$$\int_0^1 (1-\xi^2)\, P'_{-1/2}(\xi)\, d\xi = \frac{4}{9}(\xi^2-1)^2\, P''_{-1/2}(\xi)\Big|_0^1 = -\frac{4}{9}P''_{-1/2}(0) \tag{5.16}$$

$$\int_0^1 (1-\xi^2)\, P'_{-1/2+\mu_k i}(\xi)\, d\xi = \frac{(\xi^2-1)^2 P''_{-1/2+\mu_k i}(\xi)}{9/4+\mu_k^2}\Bigg|_0^1 = -\frac{P''_{-1/2+\mu_k i}(0)}{9/4+\mu_k^2}$$

Подставляя в (5.15) значения (5.11) и разрешив полученное соотношение относительно A_0, получим

$$A_0 = -\frac{1}{3G}\left(a_0 + g_0 + \frac{9}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{g_k}{9/4+\mu_k^2}\right) \tag{5.17}$$

Умножив равенство (5.12) на $\sqrt{1-\xi^2}\,\varphi_{2p+1}(\xi)$ и интегрируя полученное соотношение по ξ в тех же пределах, будем иметь (5.18)

$$\frac{G\,[A_p(4p+3)-3C_p]}{2}\,\frac{(2p+1)(2p+2)}{4p+3} - \frac{3}{2}GB_0\int_0^1 (1-\xi^2)\, P'_{-1/2}(\xi)\varphi_{2p+1}(\xi)\, d\xi -$$

$$-\frac{3}{2}G\sum_{k=1}^{\infty} B_k\int_0^1 (1-\xi^2)\, P'_{-1/2+\mu_k i}(\xi)\, \varphi_{2p+1}(\xi)\, d\xi = \frac{(2p+1)(2p+2)}{4p+3}a_p$$

при этом использованы равенства (5.4) и (5.14).

Вычислим интегралы, входящие в (5.18). Так как функции $\varphi_{2p+1}(\xi)$ и $P'_{-1/2+\mu_k i}(\xi) = y_k(\xi)$ удовлетворяют уравнениям

$$(\xi^2-1)\, y_k''(\xi) + 4\xi y_k'(\xi) + (\mu_k^2 + 9/4)\, y_k(\xi) = 0 \tag{5.19}$$

$$(\xi^2-1)\, \varphi''_{2p+1}(\xi) + 4\xi\varphi'_{2p+1}(\xi) - (4p^2+6p)\, \varphi_{2p+1}(\xi) = 0$$

то, умножив первое из них на $(\xi^2-1)\,\varphi_{2p+1}(\xi)$, а второе на $(\xi^2-1)\, y_k(\xi)$ и вычитая из первого второе, получим

$$\frac{d}{d\xi}\{(\xi^2-1)^2\,[\varphi_{2p+1}(\xi)\, y_k'(\xi) - \varphi'_{2p+1}(\xi)\, y_k(\xi)]\} =$$

$$= \left[\mu_k^2 + \left(\frac{3}{2}+2p\right)^2\right](1-\xi^2)\,\varphi_{2p+1}(\xi)\, y_k(\xi) \tag{5.20}$$

Интегрируя это соотношение по ξ в пределах от нуля до единицы, будем иметь

$$\int_0^1 (1-\xi^2) P'_{-1/2+\mu_k i}(\xi)\,\varphi_{2p+1}(\xi)\,d\xi =$$
$$= \frac{(\xi^2-1)^2}{\mu_k^2+(3/2+2p)^2}\left[\varphi_{2p+1}(\xi) P''_{-1/2+\mu_k i}(\xi) - \varphi'_{2p+1}(\xi) P'_{-1/2+\mu_k i}(\xi)\right]\Big|_0^1 = \tag{5.21}$$
$$= -\frac{P''_{-1/2+\mu_k i}(0)}{\mu_k^2+(3/2+2p)^2}\,\varphi_{2p+1}(0)$$

при этом использовано значение (5.9). Заметим также, что [6]

$$\varphi_{2p+1}(\xi) = \frac{d}{d\xi} P_{2p+1}(\xi) = \sum_{k=0}^{p} (4k+1) P_{2k}(\xi) \tag{5.22}$$

$$P_{2k}(0) = (-1)^k \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2k} \tag{5.23}$$

Поэтому

$$\varphi_{2p+1}(0) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2k}(4k+1) < \frac{p+2}{2} \tag{5.24}$$

Для другого интеграла получается значение

$$\int_0^1 (1-\xi^2) P'_{-1/2}(\xi)\,\varphi_{2p+1}(\xi)\,d\xi = -\frac{4P''_{-1/2}(0)}{(4p+3)^2}\,\varphi_{2p+1}(0) \tag{5.25}$$

Подставляя значения (5.21) и (5.25) в (5.18), будем иметь

$$A_p(4p+3) - 3C_p = \frac{2}{G} Q_p \tag{5.26}$$

где (5.27)

$$Q_p = a_p + \frac{6\varphi_{2p+1}(0)}{(2p+1)(2p+2)(4p+3)} g_0 + \frac{3(4p+3)\varphi_{2p+1}(0)}{2(2p+1)(2p+2)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k}{\mu_k^2+(3/2+2p)^2}$$

Аналогичным образом, удовлетворив второму из условий (5.2), получим соотношения

$$A_0 = -\frac{1}{3G}\left[b_0 e^{3t_1} + g_0 e^{3/2 t_1} + \frac{9}{4} e^{3/2 t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k g_k}{9/4+\mu_k^2}\right] \tag{5.28}$$

$$A_p[(4p+3)\operatorname{ch}\alpha_p t_1 - 3\operatorname{sh}\alpha_p t_1] + C_p[(4p+3)\operatorname{sh}\alpha_p t_1 - 3\operatorname{ch}\alpha_p t_1] = \frac{2}{G} N_p \tag{5.29}$$

Здесь введены обозначения

$$b_0 = \frac{3}{2}\int_0^1 \sqrt{1-\xi^2}\, f_3(\xi)\,d\xi$$
$$b_k = \frac{4k+3}{(2k+1)(2k+2)} \int_0^1 \sqrt{1-\xi^2}\, f_3(\xi)\,\varphi_{2k+1}(\xi)\,d\xi \tag{5.30}$$

$$N_p = b_p e^{3/2 t_1} + \frac{6\varphi_{2p+1}(0)}{(2p+1)(2p+2)(4p+3)} g_0 + \tag{5.31}$$
$$+ \frac{3(4p+3)\varphi_{2p+1}(0)}{2(2p+1)(2p+2)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k g_k}{\mu_k^2+(3/2+2p)^2}$$

Сопоставляя выражения (5.17) и (5.28), получим следующее равенство

$$a_0 - b_0 e^{3t_1} + g_0 (1 - e^{3/2 t_1}) + \frac{9}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k [1 + (-1)^{k+1} e^{3/2 t_1}]}{\mu_k^2 + 9/4} = 0 \qquad (5.32)$$

которое представляет собою уравнение равновесия скручивающих вал крутящих моментов.

Решая соотношения (5.26) и (5.29) относительно A_p и C_p, найдем

$$A_p = \frac{1}{4G(2p+3)p} \{Q_p [4p + 3 - 3 \operatorname{cth} \alpha_p t_1] + 3N_p \operatorname{csch} \alpha_p t_1\} \qquad (5.33)$$

$$C_p = \frac{1}{4G(2p+3)p} \{(4p+3) N_p \operatorname{csch} \alpha_p t_1 - Q_p [(4p+3) \operatorname{cth} \alpha_p t_1 - 3]\}$$

Наконец, подставляя значения (5.11), (5.17) и (5.33) в (5.3), для функции перемещения $\Psi^*(t, \xi)$ получим следующее выражение

$$\Psi^*(t, \xi) = -\frac{e^{-3t}}{3G}\left(a_0 + g_0 + {}^9/_4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k}{9/4 + \mu_k^2}\right) +$$

$$+ \frac{e^{-3/2 t}}{4G} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\varphi_{2p+1}(\xi)}{(2p+3)p} \{Q_p [3 \operatorname{sh} \alpha_p (t_1 - t) \operatorname{csch} \alpha_p t_1 -$$

$$- (4p+3) \operatorname{ch} \alpha_p (t_1 - t) \operatorname{csch} \alpha_p t_1] - N_p [3 \operatorname{sh} \alpha_p t \operatorname{csch} \alpha_p t_1 +$$

$$+ (4p+3) \operatorname{ch} \alpha_p t \operatorname{csch} \alpha_p t_1]\} - \frac{g_0 e^{-3/2 t}}{G} \frac{P'_{-1/2}(\xi)}{P''_{-1/2}(0)} -$$

$$- \frac{e^{-3/2 t}}{G} \sum_{k=1}^{\infty} g_k \frac{P'_{-1/2 + \mu_k i}(\xi)}{P''_{-1/2 + \mu_k i}(0)} \cos \frac{k\pi t}{t_1} \qquad (5.34)$$

Легко убедиться, что ряды, входящие в выражение (5.34), сходящиеся.

Пользуясь формулами (1.8) и (5.34), можно определить напряжения в любой точке осевого сечения полусферы.

Поступила 8 VII 1960

Институт математики и механики АН АрмССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Föppl A. Über die Torsion von runden Stäben mit veränderlichen Durchmesser. Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. München, 1905, Bd. 35.
2. Локшин А. Ш. О кручении тела вращения. Изв. Екатеринослав. горн. ин-та, 1923, т. XI, № 1.
3. Панарин Н. Я. К расчету усеченного полого конуса при кручении. Изв. НИИГ, 1937, том. XX.
4. Абрамян Б. Л. Кручение конических стержней и цилиндрических стержней с конической частью. ДАН АрмССР, 1960, том XXX, № 1.
5. Соляник-Красса К. В. Кручение валов переменного сечения. Гостехиздат, М.— Л., 1949.
6. Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. ИИЛ, М., 1952.
7. Рыжик И. М., Градштейн И. С. Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. Гостехиздат, М.— Л., 1951.
8. Filon L. N. G. On the elastic equilibrium of circular cylinders under certain practical sistems of load. Philos. Trans. Roy. Soc., A, London, 1902, vol. 198.
9. Timpe A. Die Torsion von Undrehungskorpern. Math. Ann. Leipzig, 1911, Bd. 71.
10. Snell C. The twisted sphere. Mathematica, 1957, vol. 4, № 8.
11. Huber A. The elastik sphere under concentrated torques. Quart. Appl. Math., 1955, v. 13.